Note di Matematica Vol. XI, 261-272 (1991)

DE L'ESPACE EUCLIDIEN VERS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

A.F. MONNA

Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe

1. EVOLUTIONS

En avril 1989 est décédé le mathématicien G. Köthe à l'âge de 83 ans. Il était parmi le groupe des mathématiciens, en nombre toujours diminuant, qui faisaient leurs premiers pas dans le domaine de la mathématique dans une période qu'on peut considérer - en tout cas pour autant qu'il s'agit l'éducation - comme encore classique. Ainsi, comme l'auteur de cet article, Köthe a assisté à une phase de transformation, la transformation de la mathématique classique en mathématique moderne. On peut voir cette phase comme une période de transition, une période de conflits, de débats, même de querelles entre les anciens et les modernes. On pense alors à Cantor, Kronecker, Hilbert, Russell, Brouwer et les discussions sur les fondements de la mathématique. Dans une classification très globale on peut considérer la mathématique classique comme d'un caractère constructif, encore largement influencée par les sciences naturelles. La mathématique moderne apparaît alors comme une science plus autonome, influencée par des idées concernant structures et existence de caractère abstrait. De ce point de vue l'attention quant à Köthe se dirige alors vers son livre «Topologische lineare Räume I» de 1960. C'est un livre trouvant sa place dans la période moderne. Ce qui frappe est la riche matière, munie de plusieurs notes et références. Actuellement on aurait peut-être préféré le titre «Analyse fonctionelle» puisqu'on considère maintenant ces matières comme des sujets d'analyse, et pas comme «géométrie» et des «espaces géométriques». Dans ce livre Köthe apparaît comme un Maître dans ce discipline. En 1960 ce sujet était encore assez jeune lorsqu'on fait une comparison avec d'autres domaines de la mathématique. En effet, on en trouve les origines dans les années autour la transition du 19me en le 20me siècle, du moins lorsqu'on considère les sources plus directes. Les noms de Volterra, Hilbert, F. Riesz et tant d'autres y sont liés. Dan un livre de M. Klein [5] se trouve un passage sur la théorie des équations intégrales en connection avec la théorie des systèmes algébriques infinis d'équations linéaires où l'auteur fait la remarque qu'en 1914 «Hilbert space had not yet become fashionable» (p. 208). Ceci caractérize la situation en ces années. Parmi les premiers monographies sur le terrain de l'analyse fonctionelle il faut noter deux livres de 1932 de grande influence:

(i) S. Banach, Théorie des opérations linéaires, ayant ses sources dans l'Ecole Polonaise;

(ii) M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert space.

Ce premier livre traite exclusivement la théorie des espaces de Hilbert, déjà pénétrant loin dans cette théorie. A cause du caractère des matières, le livre de Köthe a des connections plus directes avec celui de Banach, bien que ce dernier se limite aux espaces normés. Les espaces localement convexes, un point culminant pour Köthe (chap. 4, 5, 6), ne se trouvent pas encore chez Banach. Néanmoins on peut en certaine mesure regarder le livre de Köthe comme une suite de Banach. En comparant les deux livres ce qui frappe c'est le très grand progrès dans ce domaine dans une période de trois décades, avec des extensions de concepts déjà existant et l'introduction de nouvelles idées. Ce n'est pas la place de donner ici un résumé de tout ceci. Je veux suivre une autre voie pour exposer quelques développements en mathématique. Je considérerai ces développements en les plaçant dans le cadre de *l'évolution générale* de la mathématique. Il s'agit d'étudier les structures du progrès, l'introduction de nouvelles idées qui sont à la base des développements. Cela peut aussi contribuer à mieux comprendre les aspects dans la phase de transition entre «classique» et «moderne». En particulier j'ai l'intention d'étudier la ligne des développements qui ont conduit à la théorie des *espaces localement convexes.*

Tout d'abord remarquons qu'il y a de bonnes raisons pour considérer d'un tel point de vu la voie vers les espaces localement convexes. Non seulement parce que ces espaces prennent une place importante dans les travaux de Köthe, il existe aussi une raison intrinsèque. Ces espaces prennent une place importante en analyse moderne. Pour ainsi dire ces espaces occupent une place en mathématique qu'on peut comparer avec la place des espaces euclidiens, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$, en analyse classique. Là on a étudié l'analyse sur $\mathbf{R}^n$, dans nos années on a développé une analyse sur les espaces localement convexes. Pensons à la théorie des opérations linéaires, les fonctionnelles et la dualité, la théorie des distributions et la théorie des équations différentielles, des procédés géométriques comme le théorème de Krein-Milman etc. [2], [4].

Dans quelques publications antérieures [9], [10], [11], j'ai développé des idées concernant les problèmes qui se présentent lorsqu'on étudie le progrès général. Je veux suivre ici cette voie. On peut considérer le progrès général comme une structure consistant en une succession de phases de niveau de plus en plus haut. Dans les développements dans ces phases plusieurs éléments jouent un rôle: imitations, des analogies, des généralisations, assimilation d'idées et de concepts venant d'autres domaines parfois à grande distance. Cependant, tout cela ne suffit pas pour expliquer et motiver tout progrès et certainement pas la création de directions nouvelles fondamentales. Des idées plus pénétrantes sont nécessaires. Ce sont surtout les procédés créatifs mentaux qui conduisent à l'introduction de nouvelles idées et de nouveaux points de vu qui ainsi sont la cause de progrès dans le niveau. C'est difficile, parfois même impossible, d'expliquer ou de comprendre de telles créations comme étant en relation causale avec ce qui déjà existait. Plutôt on peut dire que de telles activités sont *préparées* par le passé, mais pas déterminées d'une façon causale. Je les considère commes des *discontinuités* dans la voie du progrès. Comme exemple de telles activités on peut indiquer Descartes et l'arithmétisation de la mathématique, c'est l'assimilation avec la notion de nombre, Leibniz et Newton et l'introduction du calcul infinitésimal, les travaux de Cantor et les connections avec les procédés d'axiomatisation. L'idée de présenter l'évolution sous la forme de chaînes de phases peut se concrétiser en traçant des lignes structurelles parcourant les développements dans la mathématique. Il faut choisir d'une façon adéquate les sujets dans une telle ligne de sorte qu'il existe une cohérence basée sur similarité parmi ces sujets. Cela peut éclairer la vision sur la multitude et la complexité des aspects. Les travaux de Köthe donnent lieu à une ligne qui commence dans la géométrie pure et la notion concrète d'«espace» et qui, en parcourant les phases de l'arithmétisation, et l'introduction des notions topologiques et de structures algébriques, conduit aux espaces localement convexes tels que Köthe les a traité dans son livre. Cette ligne aboutit donc en analyse. Justement ce fait fournit un point de vu intéressant puisque c'est une façon d'illustrer l'évolution de la notion d'«espace»: de la réalité fysique concrète vers la réalité abstraite de la notion d'un «espace» en mathématique moderne. On peut trouver les éléments pour une telle ligne dans les chapitres successives du livre de Köthe. On verra le rôle capital de la notion d'espace vectoriel sur un corps K. Köthe les introduit comme «espace linéaire sur K» (chap. 2). C'est une notion de grande importance dans la phase de transition entre «ancienne» et «moderne». Les notions fondamentales dans l'analyse fonctionnelle, telles que fonctionnelles linéaires (formes linéaires), la dualité, la réflexivité etc., trouvent là leur base dans une forme d'abstraction et d'une forme axiomatique. Cette ligne commence dans la géométrie pure et concrète dans l'Antiquité. On peut poser des problèmes de continuation dans cette période, par exemple le problème de savoir les façons par lesquelles les anciens trouvaient leurs propositions. Mais puisque cela aboutit bientôt en des questions philosophiques je laisserai à côté ce domaine. Et d'ailleurs, c'est un problèmatique qui n'est pas réservé pour l'Antiquité.

Je veux commencer mes réflections dans la géométrie analytique liée avec le nom de Descartes: la géométrique analytique classique à coordonnées cartésiennes. Cela me fournit un bon point de départ puisque ce domaine est basé sur l'assimilation des nombres dans la géométrie, ainsi conduisant à l'analyse. Jusqu'aux premières décades de notre siècle c'était la méthode usuelle. On peut regarder la transition de la géométrie analytique du plan en celle dans l'espace $\mathbf{R}^3$ en grande partie comme une imitation. Les traités usuels dans ce domaine furent traditionnellement écrits en deux volumes: un volume contenant la géométrie du plan, un deuxième sur l'espace; mentionnons par exemple les livres de Salmon, plus tard Salmon-Fiedler. C'est l'expérience de l'auteur de cet article que c'était la même situation dans l'enseignement académique: la première année le plan, la deuxième l'espace. Mais évidemment en pratique c'étaient des activités commutatives et je n'ai jamais entendu d'objections. Il sembre qu'on ne pensait pas à une synthèse. Ce n'était pas convenable dans la période ancienne bien qu'une synthèse aurait été possible, en tout cas lorsqu'on fait abstraction de propriétés très spèciales. Pensons par exemple aux problèmes de classification.

La transition vers l'espace à 4 dimensions était encore un probléme au 19me siécle et même parfois dans notre siécle. On éprouvait des difficultés de caractère conceptuel. Référons à Möbius, Cayley, Grassmann; pour des remarques historiques, et sur des questions qui concernent des relations avec d'autres sciences (physique et philosophie etc.) voir [18]. La transition vers les espaces à une infinité de coordonnées peut être liée à la question de l'influence causale de la géométrie analytique à un nombre fini de dimension. C'est la voie vers les espaces de suites $(x_1, x_2, \ldots)$, $x_i \in \mathbf{R}$ et les espaces de Hilbert. Il faut alors observer que l'origine de ces espaces était cependant toute différente [8]. Une synthèse ne fut réalisée qu'au commencement du 20me siècle au moyen des méthodes de l'algèbre linéaire sur un corps K. Pensons par exemple à la théorie des formes quadratiques au sens général. L'introduction des espaces vectoriels sur K (parfois indiqué comme espaces linéaires) était essentielle. Mais la pénétration générale a pris plusieurs décades. Cependant, déjà en 1888 Peano avait donné une définition presque moderne sous une forme axiomatique de cette notion [12]. Mais cette définition tirait à peine d'attention; les autres travaux de Peano prévalaient. Ce n'était qu'aux années vingt que les espaces vectoriels commençaient à prendre une place définitive et fondamentale [8]. L'introduction signifiait en certaine mesure une discontinuité dans le progrès. Du point de vu de «discontinuités» on peut comparer l'introduction de la notion d'«espace vectoriel» dans le développement de l'algèbre, avec l'introduction axiomatique des espaces normés dans la voie de l'analyse, tous les deux un produit de l'algébrisation. On peut alors continuer cette ligne vers les espaces localement convexes, introduits sous forme axiomatique. Ce sont des phénomènes qui se présentaient dans la phase de transition entre «classique» et «moderne»; les générations antérieures les ont éprouvés [11]. Essentiel ici est la réalisationd'une attitude axiomatique en analyse dont les origines se trouvent originellement en *géométrie.* Les notions primaires en analyse fonctionelle furent alors introduits: la dualité, réflexivité, convergence forte et convergence faible et tant plus. On les trouve dans les chapitres du livre de Köthe.

La théorie des espaces localement convexes est essentiellement basée sur la notion d'ensemble convexe. Dans un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$ on définit une topologie à l'aide d'une famille d'ensembles convexes et alors E est appelé *localement convexe.* On obtient une définition analytique équivalente au moyen de la famille des semi-normes p associée à ces ensembles convexes. Les semi-normes p possèdent les propriétés bien connues; je rappelle seulement la sous-additivité

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Une telle topologie n'est pas nécessairement une topologie métrisable. L'analyse sur de tels espaces est donc d'un niveau surpassant celui de l'analyse classique.

La question se pose de savoir l'origine de *l'idée* pour définir une topologie à l'aide d'une famille d'ensembles convexes comprenant ainsi même des situations non-métriques. La notion n'ensemble convexe a une longue histoire. Je rappelle au problème isopérimétrique et la géométrie des nombres chez Minkowski. Mais ce sont des sujets bien loins de la topologie. Il me semble qu'il n'y a pas une voie plus ou moins naturelle vers ces espaces. L'introduction repose sur une idée heureuse et pas en quelque mesure sur des arguments de causalité.

Je ferai quelques remarques sur le rôle du corps K, respectivement du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, dans cette théorie.

Dans le premier chapitre «Grundbegriffe der allgemeinen Topologie» il s'agit des premières notions de la topologie: espaces topologiques, espaces métriques, espaces uniformes etc. Au deuxième chapitre «Lineare Räume über beliebigen Körpern» Köthe a traité l'aspect algébrique de la théorie: théorie algébrique des fonctionnelles linéaires, dualité algébrique etc. Köthe introduit «lineartopologische Räume» où le corps K est supposé discret. Aux chapitres suivants il s'agit de la théorie des espaces normés, espaces de Banach, espaces localement convexes et l'analyse dans ces espaces. Köthe a quitté alors la généralité quant au corps K en écrivant: «In diesem und den fogenden Kapiteln werden wir nur reelle oder complexe lineare Räume betrachten. Der Koeffizientenkörper K bedeutet von nun an stets entweder den Körper P der reellen Zahlen oder den Körper Γ der komplexen Zahlen. Wird nicht ausdrücklich bemerkt daß es sich um einen reellen oder einen komplexen linearen Raum handelt, so gelten die Behauptungen stets für beide Fälle». ([6], p. 127). La raison de cette restriction est claire. La grande ligne des développements a se tourné vers l'analyse et alors des questions de continuité, de convergence commencent à jouer un rôle; pour cela une relation d'ordre, des propriétés topologiques et métriques du corps de base K sont inévitables. Ce qu'il faut c'est une assimilation avec la théorie des corps valués. En tâchant de donner une théorie dans une forme de synthèse on se trouve alors placé envers des difficultés qui rendent difficile une telle méthode. Quant à la théorie des corps valués il y a deux cas. En désignant par $|\cdot|$ la valuation, ce sont (a) le cas où l'ensemble $\{n\cdot 1_K : n \in \mathbb{N}\}$, où 1_K est l'élément-unité dans K, est non borné; dans ce cas la valuation est dite archimédienne. Et (b): autrement la valuation est appelée nonarchimédienne, ce qui implique $|n| \leq 1$ pour tout entier. On démontre que la valuation est non-archimédienne si et seulement si

$$|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$$

d'où ce qui suit

$$|a + b| = \max(|a|, |b|)$$

si $|a| \neq |b|$.

D'aprés un théorème de Ostrowski un corps K muni d'une valuation archimédienne est isomorphe à un sous-corps du corps des nombres complexes. Ce cas conduit donc au cas traditionnel de la théorie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, une théorie dans des espaces sur un corps K différent de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est nécessairement *non-archimédienne*. Ceci a des conséquences importantes dans l'analyse aussi bien qu'en géométrie. Dans ce qui suit K désigne un corps K

muni d'une valuation non-triviale non-archimédienne. On muni K de la topologie introduite par la métrique

$$d(a+b) = |a-b|.$$

Les propriétés suivantes sont une conséquence.

1. K est totalement discontinu.
2. Par des raisons d'analogie on définit un intervalle I comme $\{x \in K \mid |x-a| \leq \varepsilon\}$ resp. $\{x \in K \mid |x-a| < \varepsilon\}$. Ces ensembles sont ouverts ainsi que fermés.
3. K est localement compact si et seulement si
   (i) la valuation est discrète;
   (ii) K est complet;
   (iii) le corps résiduel est fini.
4. La propriété traditionnelle dans le corps des nombres réels, exprimant la relation classique entre la norme et la relation d'ordre, est en défaut: c'est à dire K n'est pas un corps ordonné.

Comme conséquence de cette dernière propriété mentionnons qu'en établissant une analyse sur K on ne peut pas se recourir aux arguments basés sur un ordre sur le corps de base: toute proposition faut être prouvée au moyen de la métrique - bien qu'évidemment il faut se réaliser qu'il s'agit d'une valuation réelle.

Comme suite de ces propositions il existe une différence essentielle entre l'analyse réelle ou complexe et une analyse sur un corps valué non-archimédien. Bien qu'il y ait des aspects d'analogie, l'étude du cas non-archimédien exige des méthodes spéciales et des principes nouveaux ce qui conduit à des propriétés différentes de celles de l'analyse réelle. Ainsi une synthèse entre les deux cas semble difficile à réaliser et on comprend qu'elle ne se trouve pas dans le livre de Köthe; Köthe ne continuait pas sa théorie générale après le deuxième chapitre. Quant à cela Köthe fait la remarque suivante: «Komplizierter liegen die Verhältnisse, wenn K als beliebiger topologischer Körper vorausgesetzt sind. Wir verweisen auf die Untersuchungen von Fleischer (..), Köthe (..), Nachbin (..), Vilenkin (..). Eingehend ist der Fall eines nichtarchimedisch bewerteten Körpers betrachtet worden, der manche Analogie zum Fall des reellen Zahlkörpers aufweist, vgl. z.B. Bourbaki (..), Fleischer (..), Ingleton (..), Monna (..)» (l.c. p. 125).

Comme j'ai dit on reconnaît des analogies entre ces deux cas. Mais on pourrait mieux dire peut-être qu'il s'agit d'une *analogie en forme,* plutôt que d'une analogie intrinsèque: ce n'est pas une simple imitation. En effet, le cas non-archimédien exige de nouvelles notions et d'autres voies pour démontrer les théorèmes. Et d'ailleurs, je crois qu'il n'y ait pas lieu de s'étonner sur une analogie en *forme.* En cherchant de former une nouvelle théorie on commence souvent par des efforts qui dépendent de la possibilité d'appliquer les opérations primaires en algèbre et en analyse: les structures de groupe, anneau, corps, isomorphismes, sous-groupes et sous-espaces, quotients, métriques, problèmes d'extension etc. Ce sont des schémas très généraux qu'on peut découvrir en analyse mais aussi d'une façon plus générale.

Il s'agit de certains patrons fixes concernant le comportement des objects par rapport à des opérations fondamentales. On peut voir ceci comme un certain règle de recherche, développé pendant des siècles. Mais c'est tout autrement lorsqu'il s'agit de concrétiser ces patrons et structures, de traduire ces règles en des résultats. On se trouve souvent placé envers des conditions spéciales qui exigent de nouvelles voies. Ainsi l'analyse non-archimédienne n'est pas une imitation de l'analyse réelle. On peut supposer que Köthe a pensé à une synthèse, d'autant plus puisqu'il a commencé cette voie aux premiers chapitres, et d'ailleurs c'est l'habitude des mathématiciens dans de telles situations.

2. ANALYSE DANS LES ESPACES SUR K

Pour illustrer les différences entre l'analyse réelle et l'analyse non-archimédienne je veux préciser quelques resultats qui sont caractéristique poiur ce dernier cas [7].

1. En analyse élémentaire on étudie les propriétés des applications $K \to K$, $K^n \to K$ ou $X \to K$, X étant un espace topologique. On trouve une analogie en *forme,* mais il y a des différences essentielles.

C'est trivial qu'*il existe une infinité de fonctions non-constantes* $K \to K$, *partout dérivable et avec dérivée zéro en chaque point.*

Une série $\sum a_n, a_n \in K$, est convergente si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Une définition de la notion d'une intégrale selon la méthode de Riemann c.q. Lebesgue au moyen de partitions et de sommes de Riemann ne satisfait pas en absence d'un ordre sur K et K étant totalement discontinu. La méthode moderne de Bourbaki, cependant, est applicable. Voir aussi Schikhof [14], [15], [16].

2. On introduit les espaces normés non-archimédiens sur K comme en analyse réelle de telle sorte que l'inégalité triangulaire poir la norme $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ est remplacée par l'inégalité triangulaire forte

$$\| x + y \| \leq \max(\| x \|, \| y \|)$$

ce qui entraîne

$$\| x + y \| = \max(\| x \|, \| y \|)$$

si $\| x \| \neq \| y \|$.

Note 1. La valuation non-archimédienne sur K n'entraîne pas nécessairement cette inégalité pour $\| \cdot \|$. Dans l'espace ℓ^1 des suites $x = (x_i)$, $x_i \in K$ telles que $\sum |x_i| < \infty$ avec la norme $\| x \| = \sum |x_i|$ l'inégalité forte est en défaut. Ainsi, c'est un espace «semi-non-arhimédien».

3. Mentionnons quelques résultats d'un type géométrique dans les espaces normés non-archimédiens. Ces propriétés sont assez pathologiques et ainsi la cause de difficultés en analyse.

On définit une boule «ouverte» resp. «fermée» comme en analyse réelle par une inégalité $\| x - x_0 \| < r$ resp. $\| x - x_0 \| \leq r$. Alors on a: chaque point d'une boule peut servit comme le centre de cette même boule.

Si l'intersection de deux boules n'est pas vide, une de ces boules contient l'autre. Il s'ensuit: Si l'on a une famille de boules telle que chaque paire de ces boules a une intersection non-vide, la famille de ces boules est totalement oronnée par rapport à la relation d'inclusion.

Toute boule «ouverte» ou «fermée» est ouverte et fermée dans la topologie introduite par la norme (voir p. 7). Cela veut dire que *la frontière est vide.*

Il y a des exemples de boules possédant une infinité de rayons.

Note 2. Ces propriétés pathologiques, appliquées à K comme espace sur lui-même, sont la cause des difficultés qu'on rencontre dans le développement d'une théorie des fonctions analytiques sur K. C'est facile à s'en convaincre que le procédé classique du prolongement analytique ne fournit pas un procédé pour prolonger la fonction en dehors du cercle de convergence. Ainsi, une définition de fonctions holomorphes selon la méthode locale en analyse complexe ne conduit pas à une théorie au cas non-archimédien. On a vaincu ces difficultés au moyen des méthodes de l'algèbre moderne (initiées par Tate) Voir [7].

4. Pour définir la notion *d'ensemble convexe* au cas non-archimédien il faut suivre une autre voie comme usuelle au cas réel. Quand Day [3] écrit: «If $x, y \in L$, the *line segment* between them is the set $\{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$» et alors donne une définition de convexité à l'aide de cette notion, cela ne peut pas se traduire en analyse non-archimédienne en absence d'un ordre sur K. Une certaine analogie a fourni une méthode alternative: Soit E un espace sur K. Un ensemble $A \subset E$ tel que $0 \in A$ est appelé convexe si poir tout $x, y \in A, \lambda, \mu \in K$, $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$ on a $\lambda x + \mu y \in A$. Plus général: chaque ensemble qui se déduit d'un tel ensemble au moyen d'une translation est aussi appelé convexe.

La définition suivante, sans intermédiaire de translations, en est équivalente: $A \subset E$ est appelé convexe si $x, y, z \in A$, $\lambda + \mu + \nu = 1$, $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$, $|\nu| \leq 1$ entraînent $\lambda x + \mu y + v z \in A$.

Une topologie sur un espace vectoriel E sur K est appelée *localement convexe* s'il existe une base fondamentale de voisinages de 0 conssistant en ensembles convexes. E est alors appelé localement convexe.

Note 3. L'espace ℓ^1 de la Note 1 n'est pas localement convexe. Dans la théorie sur $\mathbb{R}$ les espaces non-localement convexes jouent un rôle. Au cas des espaces sur K ce domaine n'est pas encore abordé.

On a développé une théorie extensive des espaces de Banach et des espaces localement convexes sur de tels corps K. Les propriétés suivantes de cette théorie correspondent aux résultats de la théorie sur $\mathbf{R}$.

5. Le théorème fondamental de Hahn-Banach concernant le prolongement des formes (fonctionnelles) linéaires n'est pas vrai pour les corps valués quelconques. On connaît une condition nécessaire et suffisante qu'il faut imposer au corps K pourque le théorème soit vrai, et alors le théorème est même plus général que le théorème classique en ce sens qu'il a rapport à des applications linéaires d'un espace E dans un espace F, et non seulement à des formes linéaires. Il faut et il suffit que K - resp. l'espace F - soit c-compact. C'est une notion de compacité définie au moyen de familles de boules; cette notion est spécifique pour la théorie non-archimédienne. On la désigne aussi comme «sphériquement complet».

Comme corollaire de ce résultat on obtient des propositions concernant l'existence de formes linéaires continues $\neq 0$.

Note 4. Ils existent des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ tels que toute forme linéaire continue sur cet espace est identiquement 0, c'est-à-dire que l'espace dual est 0. Voir [6] p. 161.

Au cas non-archimédien on a le théorème suivant: pour tout corps K qui n'est pas c-compact il existe un espace normé sur K non réduit à 0 dont l'espace dual est 0. La théorie est compliquée. Dans l'espace ℓ^1 (voir la Note 1) le théorème de Hahn-Banach n'est pas vrai; l'espace dual de ℓ^1, cependant, n'est pas trivial ([7], p. 62). Quant aux espaces dont le dual est trivial Köthe fait la remarque suivante: «Diese pathologische Möglichkeit verhindert die Aufstellung einer wirklich inhaltreichen und brauchbaren Theorie für beliebige topologischen linearen Räume. Eine solche erhält man erst wenn man sich, wie wir es im nächsten Kapitel tun werden, auf die lokalkonvexen Räume beschränkt» ([6], p. 160).

Quant à cette remarque sur des pathologies je rappelle au rôle que des théories et des exemples pathologiques ont joué dans l'évolution historique de la mathématique. Il est facile de donner des exemples (courbe de Peano, fonctions continues sans dérivée etc.). Voir par exemple dans M. Fréchet «Les espaces abstraits» (Paris 1928). Les exemples que j'ai considéré ici puissent être placés dans le cadre plus général du probléme de l'existence des espaces (ou des ensembles; Fréchet) dans lesquels toute fonction continue est nécessairement constante (Fréchet, p. 208).

6. Dans son livre de 1932 (p. 238) Banach a formulé le problème de l'existence d'une *base* dans les espaces de Banach sur $\mathbf{R}$, aussi connue sous le nom de «Schauder-base». C'est le problème de l'existence d'une famille d'éléments $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in E$, telle que chaque $x \in E$ peut être représenté dans la forme d'une série convergente $\sum \xi_i x_i$, $\xi_i \in K$.

Dans les espaces sur $\mathbf{R}$ le problème de l'existence d'une telle base a resté ouvert pendant plusieurs décades. Le contre-example donné par Enflo aux années soixante-dix signifiait une réponse négative. Au début des années quarante, cependant, on avait déjà développé une théorie au cas des espaces sur K. Une condition d'existence suffisante est que la norme de E soit discrète (cela veut dire que dans l'ensemble $\{\| x \| \,|x \in E\}$ toute suite strictement décroissante tend vers 0). Pour plus d'information voir dans [7]. On pourrait dire que les espaces non-archimédiens se comportent ici comme l'espace de Hilbert.

Note 5. Au cas non-archimédien une telle base est notée dans la litérature par «base orthogonale», aussi «base orthonormale». C'est puisque la théorie est en relation avec le problème de l'orthogonalité et du procédés d'orthogonalisation de vecteurs et de sous-espaces. Remarquons qu'une notion d'orthogonalité ne peut pas être introduite dans les espaces sur K comme au cas réel au moyen d'un produit intérieur. En effet, un tel produit n'est pas défini dans ces espaces. Pour introduire une notion d'orthogonalité on a alors suivi le moyen de «plus petite distance» ou de «meilleure approximation». Une théorie de projecteurs fut alors développée. S'il existe une projection sur un sous-espace, cette projection n'est pas unique; ils en existent alors une infinité.

7. Rappelons aux théorèmes concernant la séparation des ensembles convexes par des hyperplans qu'on prouve au cas réel. Ces théorèmes sont liés à la notion de «côtés» d'un hyperplan et à l'ordre naturel sur $\mathbf{R}$. On les a généralisé pour les espaces non-archimédien. Au moyen d'une relation d'équivalence, définie en considérant l'intersection d'un hyperplan avec l'enveloppe convexe de l'ensemble consistant en deux points $x, y \in E$, on introduit aussi dans ce cas la notion «côtés d'un hyperplan H». Il s'ensuit que, contraire au cas réel où il existe deux côtés, un hyperplan a maintenant une infinité de côtés. En appliquant cette théorie à K, considéré comme espace sur lui-même, cette méthode conduit à introduire un *pseudo-ordre* sur K. Ce pseudo-ordre est défini par les «côtés» de $0 \in K$. Ils existent une infinités de «côtés». Il faut les comparer avec $\mathbf{R}_+$ et $\mathbf{R}_-$. Ces «côtés» forment un groupe abélien qui est l'analogue des régles de calcul pour la multiplication des nombres réels, positifs et négatifs. On a axiomatisé cette théorie. Ainsi on obtient une synthèse des cas de $\mathbf{R}$ et K, généralisant la relation entre la valuation et l'ordre.

8. Dans le chapitre «Topologisch-geometrische Eigenschaften der lokalconvexen Räume» Köthe a traité d'une façon détaillée les propriétés géométriques des ensembles convexes. On y trouve des précisions de la convexité. Il s'agit des propriétés spéciales de la frontière qui trouvent leur origine dans la métrique: convexité uniforme, convexité stricte etc. et aussi la notion de point extrémal d'un ensemble convexe et le théorème de Krein-Milman. Je fais mention de ce sujet tout spécial puisque ce domaine est presqu'ouvert au cas non-archimédien - sauf quelques efforts concernant le théorème de Krein-Milman. La raison de la différence résulte du fait que pour un ensemble convexe dont l'intérieur n'est pas vide, la frontiére est vide. La topologie est trop faible et il semble que la métrique ne suffit pas pour établir une théorie au cas non-archimédien - bien qu'on puisse penser qu'une spécialisation de la structure de l'espace par l'introduction d'une métrique pourrait conduire à une théorie de la convexité contenant plus de propriétés que seulement la définition et les primaires propriétés topologiques.

Les débuts et les fondements d'une analyse sur des corps valués furent développés vers la fin des années trente et surtout au commencement des années quarante. Le livre de Köthe est daté en 1960 et on puisse supposer que pour composer ce livre il lui a fallu quelques années. Vers la fin des années cinquante le cas non-archimédien ne se trouvait pas encore dans le stage pour pouvoir l'incorporer et on comprend que Köthe se limitait à quelques références. Maintenant la théorie non-archimédienne se trouve dans une phase propre pour en écrire un livre autonome Je réfère à [7], [13], [14], [15], [16].

On peut lire le livre de Köthe comme un livre présentant une évolution de la mathématique dans laquelle des aspects de l'analyse et de la géométrie sont traités dans une certaine forme de synthèse. Mais c'est alors une forme de géométrie d'un niveau plus haut que celui d'Euclide. Il s'agit d'une ligne tracée de la période classique vers la théorie contemporaine de la notion d'«espace». La notion d'un «espace» y fut approfondie. De ce point de vu on comprend pourquoi on parle d'un *espace* de fonctions et non simplement d'un *ensemble* de fonctions. Une telle dénomisation serait d'une portée trop limitée: il ne s'agit pas simplement d'un ensemble d'éléments discrets, sans connection, mais on a ajouté une structure qui rend l'ensemble au niveau d'un «espace».

REFERENCES

[1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[2] H. BAUER, *Konvexität in topologischen Vektorräumen*, Universität Hamburg, 1964.

[3] M.M. DAY, *Normed linear spaces*, Berlin etc., 1958.

[4] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Berlin etc., 1963.

[5] M.J. KLEIN, *Paul Ehrenfest*, Amsterdam, 1970.

[6] G. KÖTHE, *Topologische Lineare Räume I*, Berlin etc., 1960.

[7] A.F. MONNA, *Analyse non-archimédienne*, Berlin etc., 1970.

[8] A.F. MONNA, *Functional analysis in historical perspective*, New York, Utrecht, 1973.

[9] A.F. MONNA, *The way of mathematics and mathematicians; a historical-philosophical study*, Communications of the Mathematical Institute Rijksuniversiteit Utrecht 17 (1984); resp. From reading towards fiction (1992).

[10] A.F. MONNA, *Methods, concepts and ideas in mathematics: aspects of an evolution*, Amsterdam, 1986, 1989.

[11] A.F. MONNA, *Towards theoretical history of mathematics. An essay about mathematics*, Nieuw Archief voor Wiskunde, (4), deel 6, 3 (1988), pp. 211-225.

[12] G. PEANO, *Calcolo geométrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino, 1888.

[13] A.C.M. VAN ROOIJ, *Non-archimedean functional analysis*, New York etc., 1978.

[14] W. SCHIKHOF, *Non-archimedean calculus*, Report 7812 Math. Inst. Kath. Universiteit Nijmegen, 1978.

[15] W. SCHIKHOF, *Non-archimedean monotone functions*, Report 7916 Math. Inst. Kath. Universiteit Nijmegen, 1979.

[16] W. SCHIKHOF, *Ultrametric calculus, an introduction to p-adic analysis*, Cambridge, 1984.

[17] M.H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, New York, 1932.

[18] R. WEITZENBÖCK, *Der vierdimensionale Raum*, Braunschweig, 1929.

Received June 27, 1990

A.F. Monna
Kerkdwarslaan 15
3731 EM De Bilt
The Netherlands