Note di Matematica Vol. XI, 127-134 (1991)

ÜBER DIREKTE SUMMANDEN VON AZUMAYA-MODULN

SIGURD ELLIGER

Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe

G. Köthe's Arbeit von 1930 «Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist» ist ein Klassiker unter den Arbeiten zur Radikaltheorie. Grundidee der Radikaltheorie war: ein eher «nichtiger» Teil des Ringes R (nämlich lauter Wurzeln aus 0; noch Köthe's Radikal ist ein Nilideal) wird als Radikal r abgetrennt und R zunächst modulo r studiert. Allen Radikalen gemeinsam ist, daß sie zwar die Struktur des Restklassenringes einigermaßen erhellen, diejenige des Radikals selbst aber weitgehend unklar bleibt. Indessen zeichnet sich bereits in Köthe's Arbeit eine Akzentverschiebung ab, die erst von Azumaya ([1], [2]) weiter verfolgt wird: von der Ring- zur Modultheorie; und zwar durch die Betonung der Rolle der Idempotenten (Satz 7 in [4]). Paarweise orthogonale Idempotente e_i mit $\sum_1^n e_1 = 1$ beschreiben auf bekannte Weise die Zerlegung eines Moduls, dessen Endomorphismenring sie entstammen. Außer $M = \oplus_1^n Me_i$ gilt also auch ${}_BB = \oplus_1^n Be_i$ und ${}_BB = \oplus_1^n e_iB$. Bei unendlich vielen orthogonalen Idempotenten $\{e_i, i \in I\}$ mit $\Pi e_i = 1$ wird der Zusammenhang weniger übersichtlich. Zwar setzt sich M aus den direkten Summanden Me_i zusammen, aber im allgemeinen weder als direkte Summe $\oplus$ noch als direktes Produkt Π, sondern als interdirekte Summe $S_{i\in I}Me_i$, d.h. als Zwischenmodul zwischen $\oplus$ und Π, $\oplus Me_i \subseteq M = SMe_i \subseteq \Pi Me_i$. Auch jetzt gilt neben $M = SMe_i$ für den Endomorphismenring ${}_BB = SBe_i$, $B_B = Se_iB$. (Ist speziell $M = \oplus Me_i$, d.h. $me_i = 0$ für fast alle i, dann gilt bekanntlich $B_B = \Pi e_iB$ und $B_B = SBe_i$). Azumaya definiert sein Radikal $Az\ B$ nur für solche Ringe B, für die $Az\ B = \{b \in B, bB$ enthält kein Idempotent $\neq 0\}$ ein (zweiseitiges) Ideal ist. Die Endomorphismenringe (quasi-)injektiver Moduln besitzen ein Azumayaradikal, das gleich dem Jacobsonradikal ist. Demnach ist jeder Ring A in einen Ring B mit Azumayaradikal einbettbar, nämlich in $B = \mathrm{End}\ I({}_AA)$, wobei $I({}_AA)$ die injektive Hülle des Moduls ${}_AA$ ist, die stets ein (A, A)-Modul ist.

Beispiele von Ringen mit Azumayaradikal sind auch die Endomorphismenringe von Azumaya-Moduln, d.h. Moduln $M = \oplus M_i$ mit End M_i lokaler Ring für jedes i. Die Frage ist (nach wie vor): Ist jeder direkte Summand eines solchen Moduls Azumayamodul? In dieser Arbeit werden Kriterien untersucht, daß ein Modul $M^{(I)}$ Azumayamodul ist, ohne daß M es ist. Dabei beschränken wir uns auf Moduln M vom Typ T (vgl. Def. in 1.). Ist T injektiv, dann ist jeder direkte Summand Me von $M = T^{(I)}$ interdirekte Summe von gewissen $Me_i \simeq T$, $Me \simeq S_{i\in I_1} Me_i$ (Satz 1.5). Auch die folgenden Überlegungen lassen eine positive Antwort auf obige Frage unwahrscheinlich erscheinen (z.B. Satz 5.1).

0. Jeder Modul ist A-Modul über einem Ring A. Ein Modul $M = \oplus_{i\in I} M_i$ heißt «Azumayamodul», wenn der Endomorphismenring End M_i ein lokaler Ring ist für jedes $i \in I$. In der ganzen Arbeit ist T ein Modul mit lokalem Endomorphismenring. Ein Modul M zwischen der direkten Summe und dem direkten Produkt: $\oplus_{i\in I} M_i \subseteq M \subseteq \Pi_{i\in I} M_i$ wird «interdirekte Summe der M_i» genannt und $S_{i\in I} M_i$ geschrieben. «Summand» soll stets «direkter Summand» bedeuten; unzerlegbare Summanden heißen «primitiv», desgleichen die zugehörigen Projektionen. Ein Summand, der keinen direkt unzerlegbaren Summanden $\neq 0$ besitzt, heißt «total imprimitiv», desgleichen seine Projektionen.

1. Sei T ein Modul mit lokalem Endomorphismenring.

Definition. *Ein Modul M heißt «(primär) vom Typ T», wenn jeder Summand $\neq 0$ von M einen direkt unzerlegbaren Summanden $\simeq T$ enthält.*

Proposition 1.1. *Sei B Endomorphismenring eines Moduls M. Dann sind äquivalent:*
(i) M ist vom Typ $T = Me$, $e^2 = e \in B$;
(ii) ${}_BB$ ist vom Typ $Hom(M,T) = Be$;
(iii) B_B ist vom Typ $Hom(T,M) = eB$.
Ein Modul ist also primär dann und nur dann, wenn sein Endomorphismenring primär ist, gleich, ob als Links- oder Rechtsmodul betrachtet.

Beweis. Sei e die Projection auf T, f eine beliebige Projektion aus B. Nach Voraussetzung ist $Mf \simeq Me \oplus M'$. Die Behauptung folgt im wesentlichen aus Lemma 3.2 in [3].

Nach Azumaya ist für primäre Ringe die Menge $Az\ B = \{b \in B, bB$ enthält kein Idempotent $\neq 0\}$ ein Ideal, B besitz das Radikal $Az\ B$ (vgl. [3]). Primäre Ringe sind gekennzeichnet durch die beiden Eigenschaften; für je zwei primitive Idempotente e und f ist $eB \simeq fB$ und eBe lokal; B besitzt kein total imprimitives Idempotent $\neq 0$ ([2], S. 117).

Proposition 1.2. *Sei B ein Ring mit Azumayaradikal $Az\ B$. Dann sind äquivalent:*
(i) B ist primär;
(ii) $B/Az\ B = \overline{B}$ ist primitiv und $So\overline{B} \neq 0$.

Beweis. Mit B ist $\overline{B}$ primär. Denn $Az\overline{B} = 0$, $\overline{eB} \simeq \overline{fB} \iff eB \simeq fB$ für primitive Summanden, und $\overline{B}$ enthält kein total imprimitives Idempotent $\neq 0$: Angenommen, $\overline{e} \neq 0$ wäre total imprimitiv. Für ein Urbild e von $\overline{e}$ wäre $Be = Be_1 \oplus X$, $e_1^2 = e_1$ primitiv, da $e \notin Az\ B$. Also $Be = Be_1 \oplus X$, Widerspruch. Für ein primitives Idempotent $f \in B$ ist $\overline{fB}$ einfacher $\overline{B}$-Modul. Angenommen, $(\overline{fB})\overline{I} = 0$ für ein Ideal $\overline{I} \subseteq \overline{B}$, dann wäre $\overline{I} = 0$, da sonst $\overline{I}$ ein primitives Idempotent $\overline{e}$ enthielte, $\overline{eB} \simeq \overline{fB}$, also $\overline{fB\overline{e}} \neq 0$. Also ist $\overline{B}$ primitiver Ring mit Sockel $\neq 0$.

Proposition 1.3. *Für einen Modul M sind äquivalent:*
(i) M ist vom Typ $T = Me$;
(ii) Ist $0 \neq f^2 = f \in B$, dann ist $eBf \not\subseteq RaB$ (= Jacobsonradikal von B).

Beweis. Lemma 5.3 in [3].

Proposition 1.4. *Ist M vom Typ T, dann existiert ein Untermodul $\oplus_{i \in I} Me_i$ aus lauter Summanden $Me_i \simeq T$ und ein Untermodul U ohne Summanden $\neq 0$ von M, so daß $\oplus_{i \in I} Me_i \oplus U \subset M$ wesentlich ist.*

Beweis. Sei $\{Me_i, i \in I\}$ eine maximale Menge unabhängiger primitiver Summanden von M. Jedes $U \subset M$, maximal bezüglich $U \cap (\oplus_{i \in I} Me_i) = 0$, erfüllt dann die Behauptung. Beispiele für Moduln vom Typ T sind
1) Azumayamoduln vom Typ T, also Moduln $T^{(I)}$;
2 Direkte Summen von Summanden von Azumayamoduln vom Typ T;
3) Summanden von Moduln vom Typ T;
4) Direkte Summen $M = \oplus M_k$ von Moduln M_k der Form $M_k = S_{i \in I_k} M_k e_{ik}$, $\oplus_{i \in I_k} M_k e_{ik} \subset$ $\subset M_k$ wesentlich und $M_k e_{ik} \simeq T$.

Beweis von 4. Mit $\oplus_{i \in I_k} M_k e_{ik} \subset M_k$ wesentlich ist auch $\oplus_{i \in I_k k \in K} M_k e_{ik} \subset M_k$ wesentlich. Die Behauptung folgt aus Proposition 5.5 in [3].

Ist T injektiv, dann kann man die Summanden $M = e$ der Azumayamoduln $M = T^{(I)}$ vom Typ T genauer beschreiben: jedes Idempotent e ist Produkt primitiver Idempotente in B, also $Me \simeq S_{i \in I} Mf_i$ (nicht notwendig $\simeq \oplus_{I_1} Mf_i$):

Satz 1.5. *Sei $M = T^{(I)} = Me \oplus M(1-e), T$ injektiv. Dann ist $Me \simeq S_{I_1} T$.*

Beweis. Nach Beispiel 2) ist Me vom Typ T, also $T^{(I_1)} \oplus U \subset Me$ wesentlich (Proposition 1.4) für ein U ohne Summanden $\neq 0$. Zu zeigen: $U = 0$. Denn dann ist $T^{(I_1)} \subseteq Me \subseteq$ $\subseteq I(Me) \subseteq T^{I_1}$, für die injektive Hülle $I(Me)$ von Me, also $Me \simeq S_{I_1} T$.

Angenommen, $U \ni u \neq 0$. u liegt in einem gewissen $T^n \subset M$. Sei H maximale wesentiliche Erweiterung von uA in T^n. Mit T ist T^n und H injektiv, also $H \simeq T^k$ für $k \leq n$. Die Projektion e bewirkt einen Homomorphismus $H \to Me$. Sei $x \in \operatorname{Ker} e \cap H$, $x \neq 0$. Aus $H \supset uA$ wesentlich folgt $0 \neq xa \in uA$ für ein $a \in A$, also $(xa)e = xa$, andereseits $(xa)e = (xe)a = 0$, da $x \in \operatorname{Ker} e$, ein Widerspruch, also ist $x = 0$. D.h. mit uA ist eine maximal wesentliche Erweiterung He von uA in $(T^n)e$, also $He \simeq H$ injektiv. Mit uA ist $He \simeq T^k$ unabhänging von $T^{(I_1)}$ im Widerspruch zur Maximalität von $T^{(I_1)}$.

2. Das folgende Lemma kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Lemma 2.1. *Sei M ein Modul, B sein Endomorphismenring, $e^2 = e \in B$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $(Me)^n \simeq M \oplus M'$;

(ii) $(Be)^n \simeq B \oplus B'$;

(iii) $BeB = B$.

Die Äquivalenz von (i) und (ii) läßt sich analog Lemma 3.1 in [3] beweisen. (ii) bedeutet, daß Be Generator in der Kategorie der B-Linksmoduln ist.

Proposition 2.2. *Sei $M \simeq M^{(N)}$ für einen Modul M. Ein Summand Me von M besitze seinerseits M als Summanden: $Me \simeq M \oplus M'$. Dann ist $M \simeq Me$.*

Beweis.

$$M \simeq M^{(N)} = (Me \oplus M(1-e))^{(N)} \simeq (Me)^{(N)} \oplus (M(1-e))^{(N)} \simeq$$
$$\simeq Me \oplus (Me)^{(N)} \oplus (M(1-e))^{(N)} \simeq Me \oplus M^{(N)} \simeq Me \oplus M \simeq$$
$$\simeq M \oplus M' \oplus M \simeq M^2 \oplus M' \simeq M \oplus M' \simeq Me.$$

Der folgende Satz erscheint später noch in anderen Variationen:

Satz 2.3. *Sei $M \simeq M^{(N)}$, $e^2 = e \in B = End\ M$ und $BeB = B$. Dann ist $(Me)^n \simeq M$.*

Beweis. Nach Lemma 2.1 ist $(Me)^n \simeq M \oplus M'$, nach Proposition 2.2 $(Me)^n \simeq M^n \simeq M$ (durch Ersetzen von M durch M^n, Me durch $(M^n)e' = (Me)^n$).

3. Wir wollen jetzt die Tragweite der Bedingung (*): «große Idempotente e erzeugen B, $BeB = B$» für Moduln vom Typ T untersuchen. Dazu müssen wir zuerst präzisieren, was «groß» heißen soll:

Definition. *Ein Modul M vom Typ T habe die Dimension α, $\dim M = \alpha$, wenn sein Endomorphismenring B mod Az B dicht im Endomorphismenring eines Vektorraums der Dimension α ist.*

Damit ist $\dim M$ definiert, denn nach Proposition 1.2 ist $\overline{B} = B/Az\ B$ primitiv. Die Bedingung (*) besage: $BeB = B$ für $e^2 = e \in B$ mit $\dim Me = \dim M$.

Beispiele für Ringe mit Bedingung (*) liefert.

Proposition 3.1. $B = End\ M$ *erfüllt (*) in jedem der Fälle*

a) M *ist quasiinjektiv vom Typ* T;

b) M *ist Azumayamodul vom Typ* T, *und jeder Summand ist ebenfalls Azumayamodul.*

Beweis.
a) Sei $e^2 = e \in B$ und dim Me = dim M, also dim $\bar{e}\overline{B}$ = dim $\overline{B}$ für $\overline{B} = B/Az\ B$. Dann ist $\bar{e}\overline{B} \simeq \overline{B}$, denn $\overline{B}$ ist Endomorphismenring eines halbeinfachen homogenen Moduls (vgl. [3]), also $BeB = B$ nach Lemma 2.1.
b) Ist M Azumayamodul vom Typ T, also $M \simeq T^{(I)}$, dann ist $|I|$ = dim M. Jeder Summand Me ist Azumayamodul nach Voraussetzung, also $\simeq M$, falls dim $Me = |I|$.

Proposition 3.2. *Seien $M_i, i \in I$, Moduln vom Typ T, dim $M_i \leq |I|$. Sei $M = \oplus_{i\in I} M_i$. Gilt für jeden Summanden Me vom Typ T mit dim $Me = |I| BeB = B$ für B = End M, dann ist M Summand eines Azumayamoduls.*

Beweis. Jedes M_i besitzt eine Zerlegung $M_i \simeq T \oplus M_i'$, also $M \simeq T^{(I)} \oplus \bigoplus_{i\in I} M_i'$. Der Summand $Me \simeq T^{(I)}$ hat dim $Me = |I|$. Also ist (Lemma 2.1) $(Me)^n \simeq M \oplus M'$ Azumayamodul.

Proposition 3.3. *Sei N vom Typ T, $M = N^{(I)}$ für $|I|$ = dim N, I nicht endlich. Gilt $BeB = B$ = End M für jeden Summanden Me vom Typ T mit dim $Me = |I|$, dann ist $M \simeq N^n$ Azumayamodul.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß M Azumayamodul ist. Es ist $M^{(N)} \simeq M$. Sei Me der Summand $\simeq T^{(I)}$ aus Proposition 3.2. Dann ist $Me \simeq (Me)^n \simeq M \oplus M'$, also $Me \simeq M$ nach Satz 2.3. Wir wählen jetzt N als Summanden Me von M. Dann ist dim $Me = |I|$, also nach Satz 2.3 $N^n \simeq (Me)^n \simeq M$.

4. In diesem § suchen und untersuchen wir hinreichende Bedingungen für die Eigenschaft (*). Jeder vollständig primitive Ring erfüllt (*). Ein solcher Ring ist bilokal im Sinne der

Definition. *Ein Ring B heißt «bilokal», wenn er nur* ein *maximales Ideal hat. B heißt «schwach bilokal», wenn aus $b \in B$ folgt $(b) = B$ oder $(1 - b) = B$.*

Proposition 4.1. *Sei $I = \{b \in B, (b) \neq B\}$. Dann ist äquivalent:*
(i) I ist additiv abgeschlossen;
(ii) I ist Ideal;
(iii) I ist bilokal;
(iv) aus $B = b_1 + b_2$, Summe zweier Ideale b_1 und b_2, folgt $b_1 = B$ oder $b_2 = B$.

Der Beweis ist ähnlich wie im Fall lokaler Ringe.

Folgerung. *Ist B bilokal, dann ist B schwach bilokal.*

Beweis. Eigenschaft (iv) der letzten Proposition.

Proposition 4.2. *Besitzt* B *ein Azumaya-Radikal* $Az\ B$, *dann ist äquivalent:*
(i) $AzB \subseteq Ra_B B_B$ *dem Durchschnitt aller maximalen Ideale;*
(ii) $B(1-z)B + m = B$ *für jedes* $z \in AzB$ *und jedes maximale Ideal* $m \subset B$.

Beweis. Sei $m \subset B$ maximales Ideal. Dann gilt

$$Az\ B \subset m \Longleftrightarrow Az\ B + m \neq B \Longleftrightarrow 1 \notin Az\ B + m \Longleftrightarrow 1 - z \notin m$$

für jedes $z \in Az\ B \Longleftrightarrow B(1-z)B + m = B$. $Az\ B \subset m$ für jedes maximale $m \subset$ $\subset B \Longleftrightarrow AzB \subseteq Ra\ _B B_B$.

Proposition 4.3. B *besitze das Azumaya-Radikal* $Az\ B$, $\overline{B} = B/Az\ B$ *sei bilokal. Dann ist äquivalent:*
(i) B *bilokal;*
(ii) $Az\ B \subseteq Ra\ _B B_B$;
(iii) $B(1-z)B = B$ *für jedes* $z \in Az\ B$;
(iv) B *ist schwach bilokal.*

Beweis. Gelte (i). Sei m das einzige maximale Ideal, dann ist $m = Ra\ _B B_B$, also $Az\ B \subseteq Ra\ _B B_B$, d.h. (ii). Jedes $b \notin m$ erzeugt B, also $B(1-z)B = B$ für jedes $z \in Az\ B$, d.h. (iii). Aus (iii) folgt $B(1-z)B + m = B$ für jedes maximale Ideal $m \subset B$, also (ii) nach Proposition 4.2. Da $\overline{B}$ bilokal ist, gibt es nur ein maximales Ideal $\supseteq Az\ B$. Also ist dies das einzige, also (i). Schließlich gilt (iv) $\Rightarrow$ (i), da $B(1-z)B + BzB = B$.

Die folgende Proposition gibt eine hinreichende Bedingung, daß $B(*)$ erfüllt. Ist B vollständing primitiv, also Endomorphismenring eines halbeinfachen Moduls vom Typ T, T einfach, dann erfüllt $B(*)$.

Proposition 4.4. B *besitze das Azumaya-Radikal* $Az\ B$, *und es sei* $Az\ B \subseteq Ra\ _B B_B$. *Ist* $\overline{B}\overline{e}\overline{B} = \overline{B}$ *für* $\overline{B} = B/Az\ B$, *dann ist* $BeB = B$ *für* $e^2 = e \in B$.

Beweis. Aus $\overline{B}\overline{e}\overline{B} = \overline{B}$ folgt $BeB + Az\ B = B$, also $BeB + Ra\ _B B_B = B$. Dann ist aber $BeB = B$, da das Radikal $Ra\ _B B_B$ des zyklischen Moduls $_B B_B$ überflüssig ist.

5.

Definition. *Seien* M, M' *Moduln,* M *vom Typ* T, M' *vom Typ* T'. M *heißt äquivalent zu* M', $M \sim M'$, *wenn gilt* $End\ M^{(I)} \simeq End\ M'^{(I)}$ *für* $|I| = dim\ M = dim\ M'$.

Satz 5.1. *Sei* $M \sim N$, M *Azumayamodul,* N *nicht. Dann gibt es Azumayamoduln mit Summanden, die nicht Azumayamoduln sind.*

Beweis. 1. Fall: $B = \text{End } M^{(I)}$ erfüllt Bedingung (*) aus 3. Dann ist $N^{(I)}$ Azumayamodul (Proposition 3.3). Also N Summand eines Azumayamoduls.

2. Fall: B erfüllt nicht Bedingung (*). Dann besitzt $M^{(I)}$ Summanden der Dimension $|I|$, die nicht Azumayamoduln sind (Proposition 3.1).

Für bestimmte Azumayamoduln M ist bekannt, daß auch jeder Summand Azumayamodul ist, z.B. wenn T endlich oder abzählbar unendlich erzeugt ist, oder wenn $Az\ B = Ra\ B$ ist (vgl. [3]). Sei nun $M \sim N$. Ist dann N Azumayamodul?

Satz 5.2. *Sei $M \sim N$. Jeder Summand von $M^{(I)}$ sei Azumayamodul. Dann auch N.*

Beweis. Sei $B = \text{End } M^{(I)}$. Nach Proposition 3.1 erfüllt B Eigenschaft (*). Nach Proposition 3.3 ist dann $N^{(I)} \simeq N^n$ Azumayamodul. N ist Summand von $N^{(I)}$ mit dim N = dim $N^{(I)} = |I|$. Nach Voraussetzung über $M^{(I)}$ ist ein Summand der Dimension $|I|$ isomorph $M^{(I)}$, also $B \simeq eB$. Daher ist auch $N \simeq N^{(I)}$, also Azumayamodul.

REFERENCES

[1] G. Azumaya, *On generalized semi-primary rings and Krull-Remark-Schmidt's theorem*, Japan J. Math., **19** (1948), pp. 525-547.

[2] G. Azumaya, *Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remark-Schmidt's theorem*, Nagoya J. Math., **1** (1958), pp. 117-124.

[3] S. Elliger, *Interdirekte Summen von Moduln*, J. Algebra, **18** (1971), pp. 271-303.

[4] G. Köthe, *Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständing reduzibel ist*, Math. Z., **32** (1930), pp. 161-186.

Received January 3, 1991
S. Elliger
Mathematisches Institut
Universität Bochum
D-4630 Bochum 1
Germany