LA MATEMATICA PER CONTARE GLI INFINITI

MARIA MADDALENA MICCOLI
Ricercatrice di Algebra – Università del Salento

MARIA PAOLA MIGHALI
Laureata in Scienze della Formazione Primaria – Università del Salento

Riassunto:
Mai disciplina è stata più utile e nello stesso tempo più odiata della Matematica!
La repulsione deriva indubbiamente dalle regole, a volte incomprensibili e astruse, che spesso vengono somministrate a chi è costretto a studiarla. Ma la Matematica non è un insieme di regole da applicare rigidamente, essa è intuizione e astrazione; per dirla con le parole di Ennio De Giorgi, grande matematico leccese, *la Matematica è pensiero, libertà, sogno, cultura.* Recuperare la dimensione culturale della Matematica è sicuramente il modo più efficace per farla conoscere, non solo dal punto di vista pratico ma soprattutto concettuale, per restituirle il suo indubbio valore formativo. Si va sicuramente in tale direzione quando si guarda al modo in cui da sempre la Matematica si è cimentata con l'infinito, mondo affascinante ma pieno di insidie e di paradossi, affrontando problemi che inevitabilmente portano nella sfera della Filosofia.

Abstract:
Mathematics is the most useful and, at the same time, the most hated discipline ever.
The repulsion undoubtedly derives from the set of incomprehensible and abstruse rules often administered to those forced to study it. However, Mathematics is not a set of rules to be applied rigidly; Mathematics is intuition and abstraction. In the words of Ennio De Giorgi, a great mathematician from Lecce, *Mathematics is thinking, freedom, dream, culture*. The most effective way to make Mathematics known is recovering its cultural dimension, not only from a practical but above all conceptual point of view, to return its undoubted formative value. We certainly achieve this aim if we look at how Mathematics dealt with the concept of the infinite - fascinating world full of pitfalls and paradoxes - by facing problems which led into the sphere of Philosophy.

Parole chiave: matematica, infinito, equipotenza.

Keywords: mathematics, infinity, equipotence.

1. Recuperare la dimensione culturale della matematica

Molto spesso la Matematica viene considerata una disciplina meccanica, fredda, un insieme di procedimenti e regole da applicare rigidamente, tanto chela maggior parte delle persone nutre paura nei confronti di questa materia e gli studenti non vedono l'ora di 'liberarsene' alla fine del liceo.

Ma, se all'alunno vengono fornite solo informazioni e non lo si aiuta a capire il loro valore e la loro utilità, molto probabilmente egli non metterà in atto un ragionamento critico e il suo apprendimento sarà esclusivamente di tipo mnemonico.

Anche Cartesio, filosofo e matematico del 1600, metteva in evidenza come la Matematica, intesa semplicemente come una materia che si occupa di "figure immaginarie" o di "numeri vuoti", risultasse un gioco sterile dell'intelletto. Egli scriveva: "[…] *non mi stupivo del fatto che la maggior parte degli uomini d'ingegno e di scienza, dopo esser entrati in contatto con queste scienze [l'aritmetica e la geometria], le trascurino subito come puerili e vane, o al contrario si spaventino fin dall'inizio, all'idea di apprenderle, tanto sono difficili ed intricate. Poiché in verità niente è più vano dell'occuparsi di numeri vuoti e di figure immaginarie, fino al punto di sembrare volersi compiacere della conoscenza di simili bagattelle; e niente è più vano che fissarsi su queste dimostrazioni superficiali, che si conseguono più spesso per caso che tramite il metodo, e che fanno appello agli occhi e all'immaginazione più che all'intelletto, fino al punto di disabituarsi all'uso della ragione; e nello stesso tempo nulla è più complicato che mettere in luce con un metodo siffatto le nuove difficoltà che sono nascoste dalla confusione dei numeri. Ma quando, in seguito, mi chiesi da che cosa dipendeva il fatto che i primi filosofi non volessero ammettere allo studio del sapere coloro che ignoravano la matematica, quasi che questa disciplina fosse per loro la più facile e la più necessaria di tutte per formare e preparare gli intelletti a comprendere altre scienze più elevate, mi convinsi che essi conoscevano una matematica molto diversa dalla matematica volgare del nostro tempo*" (Israel, Millàn Gasca , 2016, p. 461).

Ai tempi di Galileo prima e di Cartesio poi, la Matematica divenne interessante perché si presentò come lo strumento principale per comprendere l'essenza dei fenomeni naturali.

Anche se attualmente essa è alla base della tecnologia, che è al centro della nostra vita quotidiana, sembra che abbia perso il suo modo di essere parte del sistema di conoscenza dell'uomo, diventando semplicemente una forma di pensiero pratico, qualcosa di 'volgare' e, di conseguenza, noioso e poco stimolante.

Ci si rende facilmente conto come questo esito sia il risultato di un modo sbagliato di concepire la posizione della Matematica nel pensiero e nella cultura e di metodi poco adeguati nell'insegnarla. Ci si è troppo concentrati sul dualismo tra la Matematica considerata come scienza astratta e come pensiero e la Matematica vista come attività pratica. Per lungo tempo si è superficialmente creduto che insistere sugli aspetti concettuali di questa disciplina fosse la causa della sua difficoltà e della repulsione che desta nella maggior parte delle persone, non considerando il fatto che 'tagliare in due' la cultura è un errore gravissimo. Questo vuol dire che considerare la Matematica, all'interno della cultura scientifica, come un'attività pratica non la rende più attraente, ma piuttosto mediocre (https://scuolevaltiberina.wordpress.com/2014/02/16/quale-matematica-insegnare/#more-1868, verificato in data 12/10/2020).

Proprio partendo da questi aspetti, negli ultimi anni è emersa la necessità di restituire alla Matematica la sua dimensione culturale, ancora poco presente nella scuola italiana, in modo da favorire un impegno attivo degli studenti nella costruzione del proprio apprendimento.

Appare abbastanza chiaro che l'obiettivo da raggiungere è quello di lavorare per cercare di promuovere lo sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti di tale disciplina, inteso come la propensione ad affrontare i problemi e le difficoltà con curiosità e voglia di "mettersi in gioco".

A questo proposito, il matematico Federigo Enriques (1871-1946) attribuiva all'istruzione scientifica una doppia finalità: formativa e strumentale.

Infatti, egli riteneva che l'insegnamento della Matematica fosse fondamentale per il futuro del cittadino in quanto gli forniva gli strumenti per leggere la realtà e capire come affrontarne i problemi, oltre che per favorire la piena partecipazione alla vita della società. Tuttavia, era altrettanto importante per la funzione culturale a esso affidata. Secondo Enriques, infatti, l'educazione matematica contribuiva alla formazione generale dello spirito poiché promuoveva lo sviluppo dello spirito di ricerca e delle capacità critiche.

Le Indicazioni Nazionali del 2012 recuperano il valore culturale della Matematica e sottolineano l'importanza di lavorare per far emergere negli alunni una visione positiva della stessa: un obiettivo importante e significativo del percorso educativo matematico della scuola primaria.

Infatti, si legge: "*Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo*" (http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf).

È molto interessante rilevare che nelle Indicazioni Nazionali prima si descrive come non deve essere la visione della Matematica (cioè un insieme di regole da memorizzare e applicare) e successivamente si esplicita cosa si debba intendere per essa. La necessità di questa evidenziazione deriva molto probabilmente dalla consapevolezza che molti considerano la Matematica proprio in questi termini. Appare allora abbastanza chiaro come le Indicazioni Nazionali mettano in evidenza l'importanza della dimensione culturale della Matematica: una disciplina non a sé stante, ma parte della cultura. L'insegnamento deve perciò valorizzare gli aspetti concettuali che permettono di collegarla con le altre discipline.

Indubbiamente la dimensione culturale della Matematica e la sua relazione con le altre discipline, in particolare la Filosofia, emergono quando si affronta il tema dell'infinito che "aleggia" in gran parte della Matematica.

2. La Matematica e l'infinito

Il matematico e filosofo Hermann Weil (1899-1955) diceva che "La Matematica è la scienza dell'infinito".

Tale affermazione si contrappone al pensiero di Aristotele:

Sicché il numero è infinito in potenza ma non in atto […] questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi [cioè: i matematici], allo stato presente, non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono), ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita […] (Radice, 2014, p. 7).

Se ci si ferma all'Aritmetica e più precisamente all'impostazione assiomatica di Peano, verrebbe di condividere il pensiero di Aristotele.

Infatti, negli assiomi di Peano si considera un infinito potenziale, quello che si scopre fin dall'infanzia, quando si raggiunge la consapevolezza che qualunque numero si pronunci, anche molto grande, ce n'è sempre uno più grande di esso che si ottiene semplicemente aggiungendo uno.

Tuttavia, l'affermazione di H. Weil è invece condivisibile quando si scopre che l'infinito in atto e non solo in potenza, cioè un'infinità compiuta, è il cuore della maggior parte dei temi fondamentali della Matematica. Senza accettare l'infinito in atto si farebbe veramente ben poca Matematica!

Questo era già evidente agli antichi greci da quando i Pitagorici, loro malgrado, scoprirono, usando appunto il Teorema di Pitagora, che il lato e la diagonale di un quadrato non erano commensurabili, essendo il loro rapporto il numero irrazionale $\sqrt{2}$. Ma la difficoltà di manipolare l'infinito li fece arrendere.

In effetti, manipolare l'infinito non è semplice e spesso dà luogo a risultati sorprendenti che sono in contraddizione con l'opinione comune: i *paradossi*.

I numeri e i loro quadrati sono evidentemente distinti: più precisamente i quadrati costituiscono una parte di tutti i numeri; è perciò naturale pensare che i quadrati siano meno dei numeri.

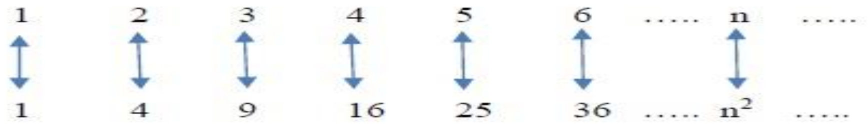
Nel 1638, nelle "Nuove Scienze", Galileo espose questo paradosso in un dialogo tra l'aristotelico Simplicio, il gentiluomo dilettante di scienze Gianfranco Sagredo e lo "scienziato nuovo" Filippo Salviati, che rappresentava Galileo stesso. Si riporta di seguito un riassunto del dialogo a cui si fa riferimento.

In primo luogo, Salviati afferma che i quadrati dei numeri sono solo una parte dei numeri perché ci sono numeri che non sono quadrati di alcun numero, per esempio il numero 6. Però alla domanda "quanti sono i numeri quadrati?" si può rispondere "con verità" che essi sono tanti quante sono le proprie radici. Infatti, ogni numero ha un solo quadrato e ogni quadrato ha una sola radice.

Inoltre, non si può negare che le radici siano tante quanti tutti i numeri perché non vi è numero che non sia radice di qualche quadrato. "Stante questo", converrà dire che i numeri quadrati siano tanti quanti tutti i numeri.

“E pur per principio dicemmo tutti i numeri essere più dei propri quadrati, essendo la maggior parte non quadrati”.

Il grafico seguente illustra quanto descritto da Galilei



Salviati conclude “*Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le lor radici, né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate*” (Radice , 2014, pp. 44, 47).

Dunque, Galileo conclude che non è lecito, con il nostro intelletto finito, indagare l’infinito.

Invece il matematico Bernard Bolzano (1781-1848), di fronte all’infinito e in particolare al *paradosso del tutto e della parte* (come è usualmente detto il paradosso di cui si parla nel dialogo), aveva un atteggiamento profondamente diverso da quello di Galilei. Egli affermava che, nel caso finito, quando si numerano gli elementi di un insieme A, si arriva all’ultimo elemento n. In questo caso si dice che il numero delle cose di A è uguale a n. Passando all’insieme B e numerando i suoi elementi, se si trova che anche essi sono n, si dirà che A e B hanno lo stesso numero di cose. Questa conclusione non vale più se l’insieme degli elementi di A è infinito perché non si può mai arrivare all’ultimo elemento di A:esso, infatti, non può esistere.

Quindi Bolzano affermava che non era un paradosso stabilire una corrispondenza uno a uno tra l’insieme infinito B e una sua parte infinita A.

Nella seconda metà dell’Ottocento, il matematico Georg Cantor superò l’imbarazzo verso tale paradosso.

Cantor definì *equivalenti* (oggi *equipotenti*) due insiemi per i quali si può stabilire una corrispondenza uno a uno (biunivoca) tra gli elementi, cioè a un elemento del primo insieme corrisponde uno e un solo elemento del secondo, a elementi distinti corrispondono elementi distinti e ogni elemento del secondo insieme è corrispondente di un elemento del primo.

L'idea di corrispondenza biunivoca è un'idea molto semplice che traduce quello che fa un bimbo, che ancora non sa contare, quando assegna a ogni commensale un bicchiere.

Nel linguaggio comune, si dice che tra due insiemi vi è una corrispondenza biunivoca quando gli elementi di un insieme sono tanti quanti quelli dell'altro, cioè quando i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi.

Georg Cantor ebbe l'ardire di estendere la definizione di uguaglianza del numero cardinale di due insiemi anche al caso infinito. Questo ardire lo portò a non sorprendersi di fronte ad apparenti contraddizioni come quella che "una parte può essere equipotente al tutto".

Galilei trovava inspiegabile che il tutto, essendo maggiore della parte, potesse essere uguale alla parte.

Come si può facilmente osservare, molto è dovuto all'uso improprio dell'aggettivo *uguale*. Tale aggettivo dovrebbe essere usato solo per indicare oggetti identici; tuttavia, quando si dice che un oggetto è uguale a un altro, si sottintende la domanda: "uguale rispetto a che cosa?". Quindi Cantor intendeva che la parte può essere uguale, per numero, al tutto.

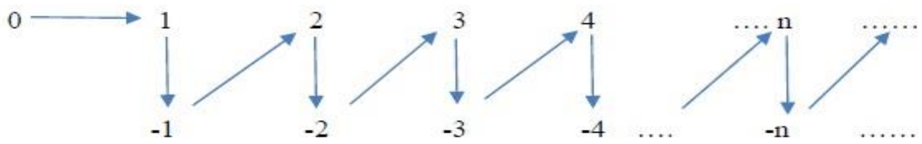
Quello che può creare diffidenza verso tale affermazione è anche il fatto che ciò non accade mai nel caso finito.

Il lavoro di Cantor fa sì che l'equipotenza di un insieme con una sua parte propria (contenuta ma non uguale) non è mai più cosa assurda ma una specificità degli insiemi infiniti.

Fu Richard Dedekind (1831 – 1916) in un suo famoso libretto "Essenza e significato dei numeri" a dare la seguente *definizione:* un insieme si dice infinito se è equipotente ad una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito.

Con questa definizione, Dedekind capovolse il modo di pensare di sempre, cioè che l'infinito è il non finito.

Alla luce di tutto ciò, non sorprenderà il fatto che l'insieme dei numeri interi relativi sia equipotente all'insieme dei numeri naturali. Basta osservare che gli interi relativi si possono numerare (contare) seguendo le frecce.



Questa numerazione è in effetti una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri relativi.

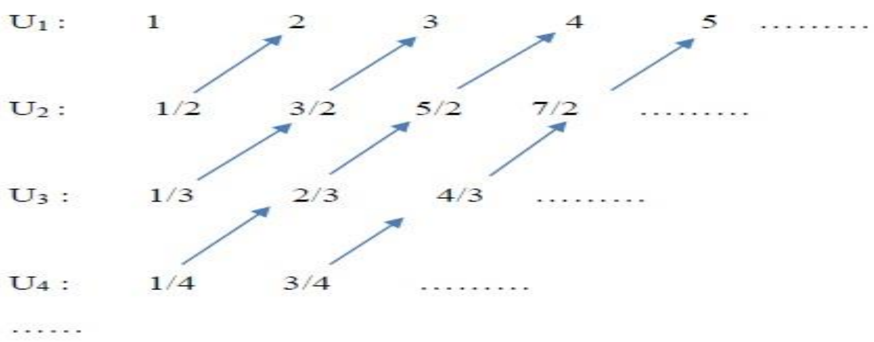
Un insieme equipotente all'insieme dei numeri naturali si dice che è *numerabile* oppure che ha la potenza del numerabile o ancora che ha lo stesso numero cardinale di elementi dell'insieme dei numeri naturali, anche se tale numero cardinale è infinito.

Quindi i numeri relativi costituiscono un insieme numerabile che è l'unione dell'insieme numerabile dei numeri negativi con l'insieme stesso dei numeri naturali(che è evidentemente numerabile).

Quello che succede per i numeri relativi non dovrebbe sorprendere, avendo compreso il paradosso del "tutto equipotente ad una sua parte". Ma se si considera l'unione di infiniti insiemi numerabili, precisamente di un'infinità numerabile di insiemi numerabili, sarà sorprendente scoprire che si ottiene ancora un insieme numerabile. È proprio quello che accade all'insieme delle frazioni.

Si indichi con U_1 l'insieme delle frazioni di denominatore 1, cioè i numeri naturali, con U_2 l'insieme delle fazioni di denominatore 2, …, con U_n l'insieme delle frazioni di denominatore n, …

In ognuno di questi insiemi si considerino frazioni ridotte ai minimi termini (per non avere ripetizioni) e, per semplicità, positive. L'insieme delle frazioni, che è l'unione degli insiemi U_1,U_2, …, U_n, … , è un insieme numerabile. Basta osservare che gli elementi di tale insieme si possono numerare (contare) seguendo le frecce, andando sempre più in giù nelle righe e sempre più a destra nelle colonne.



Sembra diaver dato vitaad un disordine, ma tale disordine è un ordine che permette di contare le frazioni e di concludere che anche i numeri frazionari sono numerabili, cioè che le frazioni sono tante quanti i numeri naturali.[1]

Questi esempi sorprendenti potrebbero indurre a pensare che tutti gli insiemi infiniti siano numerabili. Ma ciò non è vero. Questo fatto fu espresso in una lettera che Cantor scrisse a Dedekind il 12 dicembre del 1873. Si può affermare che questa è la data di nascita del concetto di *infinito attuale transfinito*, sempre accrescibile e quindi non assoluto.

Cantor dimostrò che i punti di una retta non si possono numerare, come non si possono numerare quelli di un qualsiasi segmento anche di lunghezza molto piccola. In questo caso si dice che l'insieme dei punti della retta o del segmento ha la potenza del continuo.

Poiché ogni insieme continuo contiene sottoinsiemi che sono numerabili (per esempio, tagliando via via a metà un segmento, si ottengono i punti: $1/2$, $1/2^2$,$1/2^3$, … ,$1/2^n$,… che sono un insieme numerabile) si può affermare che la potenza del continuo è superiore a quella del numerabile.

Il 12 dicembre del 1873, data della lettera a Dedekind, Cantor non era ancora trentenne, ma molti anni dopo riuscì a dare di questo risultato una dimostrazione molto semplice che però qui si omette per brevità.

Tuttavia, come diceva lo stesso Cantor, tale dimostrazione è significativa perché si lascia estendere ad un teorema generale il quale afferma che: *si possono costruire*

[1]Cantor dimostrò la numerabilità dell'unione di un'infinità numerabile di insiemi numerabili, usando l'ingegnoso procedimento noto come *primo procedimento diagonale di Cantor* (Israel, MillànGasca, 2016, pp. 173-174), da noi esposto in modo sintetico.

insiemi di potenza sempre più grande senza giungere a un insieme di potenza massima, a un assoluto che matematicamente è impensabile.

Il metodo per costruire insiemi transfiniti di potenza crescente all'infinito consiste nel passare da un insieme all'insieme delle sue parti, cioè all'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Infatti, Cantor dimostrò che la cardinalità (il numero degli elementi) di un insieme è minore della cardinalità del suo insieme delle parti, anche per gli insiemi infiniti. Quindi, se si denota con il simbolo |A| la cardinalità di A e con |P(A)| la cardinalità dell'insieme delle parti di A, si ha

$$|A| < |P(A)| < |P(P(A))| < \ldots.$$

Ovviamente si tiene presente che il segno "<" ha senso anche nel caso infinito per i motivi ampiamente esposti sopra.

Cantor scriveva al suo collega svedese Gustav Eneström: "*Dopo Kant ha acquistato cittadinanza tra i filosofi la falsa idea che il limite ideale del finito sia l'assoluto, mentre in verità tale limite può venir pensato solo come un transfinito [...] e precisamente come il minimo di tutti i transfiniti [...]*" (Radice, 2014, p. 60).

In effetti, fino a Cantor, l'idea dominante era che l'infinito attuale, nel caso esistesse, fosse unico perché si identificava il limite del finito con l'assoluto, oltre il quale non si può andare.

Ci si ferma qui perché andare oltre sarebbe sempre più complicato. La nostra speranza è quella di aver aperto uno spiraglio nel mondo dell'infinito, mondo affascinante ma pieno, come si è visto, di insidie e paradossi.

Con questo mondo la Matematica si è cimentata più di ogni altra scienza affrontando problemi che conducono nella sfera della Filosofia.

Il grande matematico David Hilbert, nel suo lavoro sull'infinito, scriveva:

"*La chiarificazione della natura dell'infinito non riguarda esclusivamente l'ambito degli interessi scientifici specializzati ma è necessaria per la dignità stessa dell'intelletto umano*" e, al cospetto dei risultati ottenuti da Georg Cantor sui vari livelli dell'infinito e sulle difficoltà che si presentarono (oltre alle critiche),esclamò con una frase che è diventata celebre: "*Nessuno potrà scacciarci dal Paradiso che Cantor ha* *creato per noi''*(http://matematica.unibocconi.it/articoli/5-l%E2%80%99infinito-paradiso, verificato in data 25/10/2020).

BIBLIOGRAFIA

Di Martino P., Zan R. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le Indicazioni Nazionali*. Giunti Scuola: Milano.

Israel G., Millàn Gasca A. (2016). *Pensare in matematica*. Zanichelli: Bologna.

Radice L. L. (1981). *L'infinito*. Editori Riuniti: Roma.

SITOGRAFIA

https://scuolevaltiberina.wordpress.com/2014/02/16/quale-matematicainsegnare/#more-1868

http://www.indicazioninazionali.it/wpcontent/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

http://matematica.unibocconi.it/articoli/5-l%E2%80%99infinito-paradiso