

Capitolo I

TENSIONE E DEFORMAZIONE

La resistenza dei materiali è descritto attraverso le relazioni intercorrenti tra forze esterne, forze interne e deformazioni. Per poter ricavare tali relazioni bisogna, in ogni situazione, considerare il corpo in equilibrio. In condizioni di equilibrio sarà quindi possibile ricavare le relazioni tra i carichi esterni agenti su un corpo e le forze interne che si oppongono a tale azione.

Le proprietà meccaniche sono le caratteristiche dei materiali che definiscono la risposta alle sollecitazioni applicate. Tale risposta è nota come deformazione, esistono tre tipi di deformazione in funzione delle quali si possono definire le seguenti proprietà:

proprietà elastiche che governano le deformazioni elastiche dove il materiale assume nuovamente la sua geometria iniziale dopo la rimozione dei carichi applicati; proprietà plastiche, che governano le deformazioni plastiche dove il materiale non assume nuovamente la sua geometria iniziale dopo la rimozione dei carichi applicati e proprietà a frattura che definiscono le leggi associate con la separazione del materiale in due o più parti durante e dopo l'applicazione di carichi.

La Metallurgia Meccanica utilizza i principi della meccanica e della metallurgia per comprendere, razionalizzare e prevedere la risposta dei metalli ai carichi applicati.

Il tema principale è legato al trinomio struttura-proprietà-prestazioni. Modificazioni in uno dei tre producono ingenti cambiamenti nelle altre due, tali cambiamenti sono indotti nei metalli dalla loro storia termomeccanica dalla produzione all'utilizzo.

I concetti di tensione, deformazione e frattura possono essere studiati ed analizzati seguendo due approcci: quello della meccanica del continuo, che assumendo che i materiali siano isotropi ed omogenei, attraverso parametri globali, determina lo stato tensionale e la risposta dei metalli alle sollecitazioni esterne; oppure un approccio microstrutturale, che descrive le modificazioni nelle proprietà meccaniche basandosi sulla conoscenza dei processi sollecitativi e deformativi su scala atomica.

Quando soggetti a sollecitazioni esterne, i metalli esibiscono in generale la seguente sequenza di risposte, funzione dell'entità delle forze applicate: una deformazione elastica in cui l'energia è recuperabile, i legami atomici non si rompono, il materiale obbedisce alla legge di Hook (lineare); oppure una deformazione plastica in cui l'energia non è recuperabile, i legami atomici si rompono, il legame tra tensione e deformazione è descritto dalla legge di Hollomon (non-lineare); per forze estremamente ingenti il materiale giunge a frattura.

Definizione della tensione monoassiale

La tensione è la misura della concentrazione locale della forza meccanica. Considerando un prisma soggetto a due forze (F) uguali ed opposte agenti su due facce di area A_0 , tale tensione è detta normale e può essere di trazione o compressione.



Figura 1.1: tensione monoassiale generata in un solido di sezione A_0 da una forza F .

Si definiscono la tensione vera monoassiale:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

e la tensione ingegneristica o nominale:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \quad (1.2)$$

che sono legate tra loro dalla seguente relazione:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} = \frac{F}{A} \frac{A}{A_0} = \sigma \frac{A}{A_0} \quad (1.3)$$

Definizione della tensione in tre dimensioni

Vogliamo definire la tensione in un punto O di un corpo sollecitato da forze esterne.

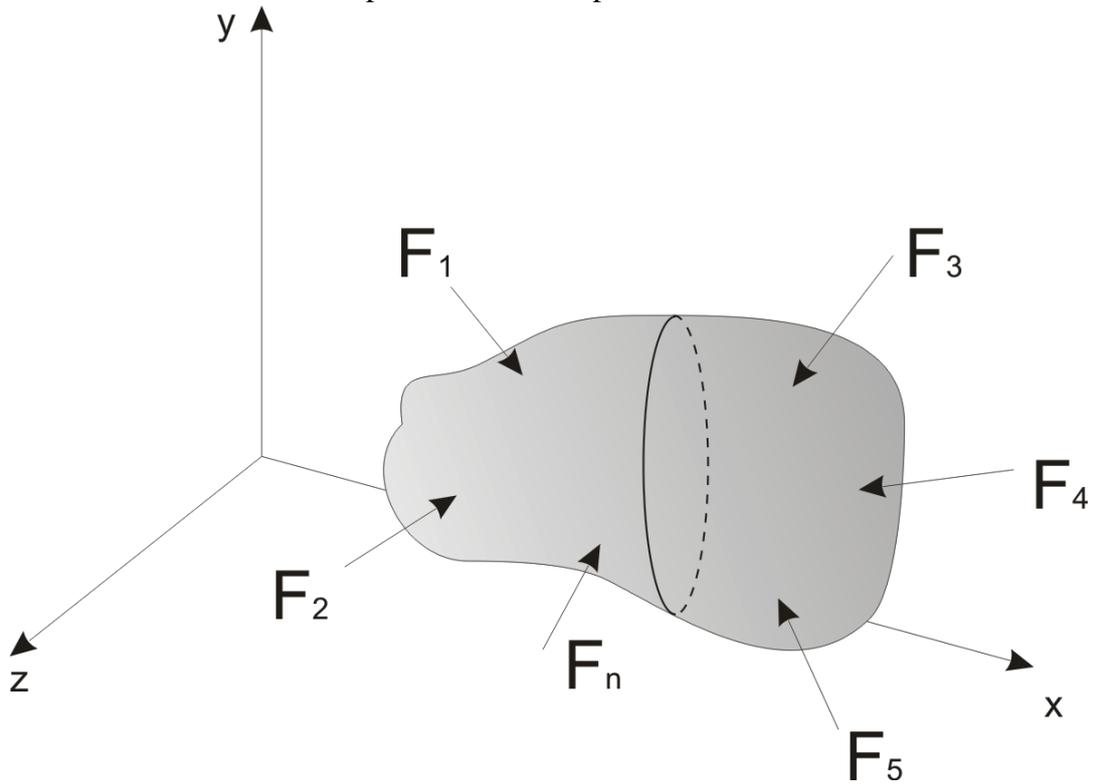


Figura 1.2: generico solido su cui agiscono una serie di forze dall'esterno.

Il primo passo e' di tagliare il corpo in due pezzi lungo un piano passante per il punto O.

Sia \mathbf{n} il vettore unitario normale alla superficie generata dal taglio

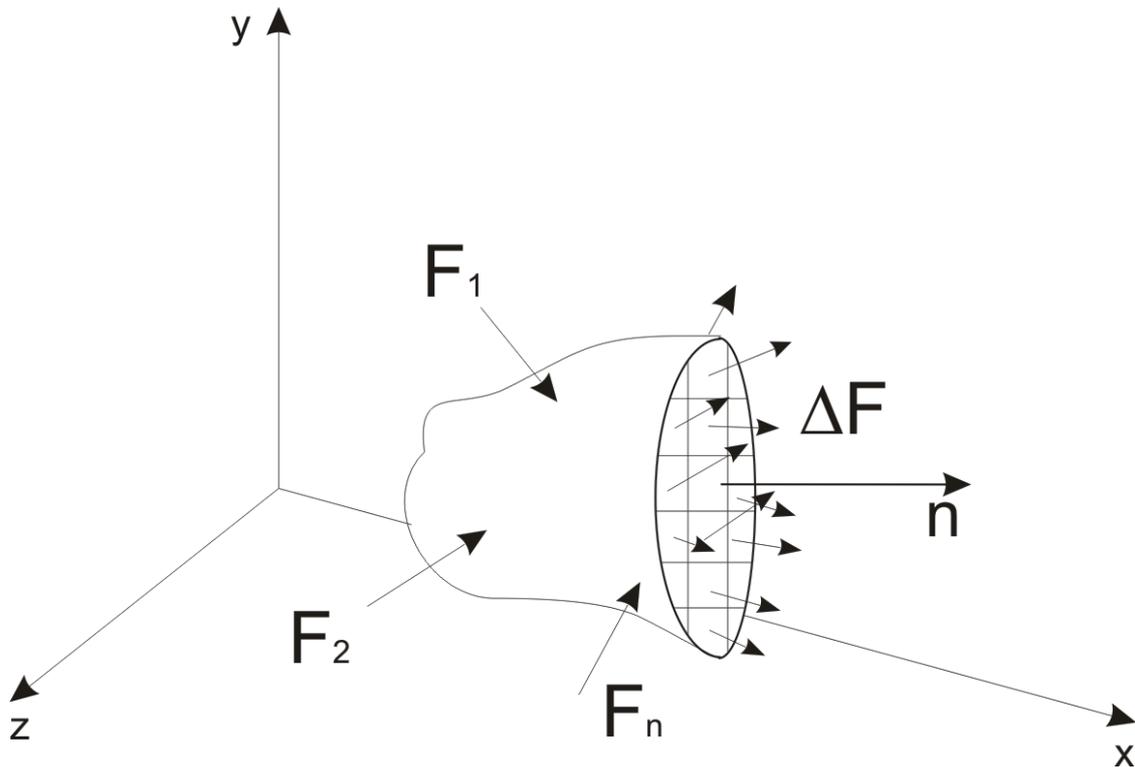


Figura 1.3: definizione del vettore n uscente dalla sezione tagliata del solido.

Le forze agenti sulla superficie tagliata sono le forze interne trasmesse dall'altro pezzo e sono necessarie per mantenere i due pezzi in equilibrio statico.

Per il piano di taglio definiamo un vettore di trazione t_n

$$t_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.4)$$

Dove ΔF sono le forze interne agenti su un area ΔA intorno al punto O .

In generale, l'applicazione di una serie di forze genera tensioni normali e tangenziali, queste saranno differenti considerando piani diversi del corpo. Per tale motivo e' di fondamentale importanza definire i sistemi di assi coordinati a cui si fa riferimento durante l'analisi. Le tensioni e le deformazioni sono caratterizzate da un valore numerico e da due direzioni, non sono vettori (i quali sono caratterizzati da una sola direzione) e per tale motivo sono detti tensori del secondo ordine.

Vediamo che t_n e' l'intensita' della forza agente su un piano la cui normale e' n nel punto O . Per descrivere tale situazione bisogna avere due indici per ogni componente di tensione, il primo indica il piano su cui la forza agisce e il secondo la direzione lungo quale la forza agisce.

Considerando un sistema cartesiano fisso con l'oggetto e con origine nel punto O , con vettori unitari e_x, e_y, e_z , possiamo esprimere il vettore di trazione come:

$$t_n = t_{nx}e_x + t_{ny}e_y + t_{nz}e_z \quad (1.5)$$

Noi conosciamo lo stato tensionale nel corpo se per ogni piano passante per quel punto riusciamo a calcolare il vettore di trazione. Se conosciamo il vettore di trazione su tre piani mutualmente

perpendicolari passanti per il punto O, possiamo sempre calcolare il vettore di trazione relativo a qualunque altro piano passante per O.

Selezioniamo $\mathbf{n} = e_x, e_y, e_z$.

Questo definisce tre forze di trazione $\mathbf{t}_{ex}, \mathbf{t}_{ey}, \mathbf{t}_{ez}$ agenti sui piani yz, xz, xy, ognuna di queste forze di trazione ha tre componenti:

$$t_{ex} = \sigma_{xx}e_x + \sigma_{xy}e_y + \sigma_{xz}e_z \tag{1.6}$$

$$t_{ey} = \sigma_{yx}e_x + \sigma_{yy}e_y + \sigma_{yz}e_z$$

$$t_{ez} = \sigma_{zx}e_x + \sigma_{zy}e_y + \sigma_{zz}e_z$$

In termini matriciali la tensione nel punto O e' data da:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Consideriamo i tre piani precedentemente definiti come le facce di un cubo infinitesimo che racchiude il punto O con gli assi x, y, z, perpendicolari alle tre facce del cubo. Definiamo anche le facce positive del cubo corrispondenti alle direzioni +x, +y, +z.

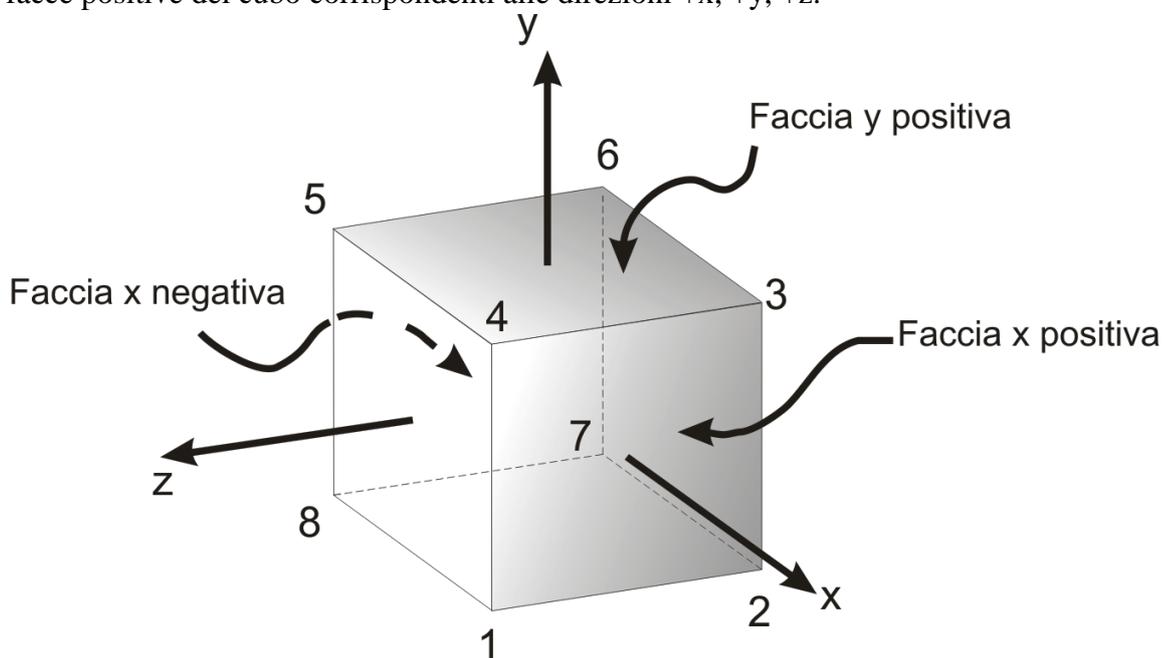


Figura 1.4: versi positivi e negativi del sistema di coordinate scelto rispetto all'elementino solido.

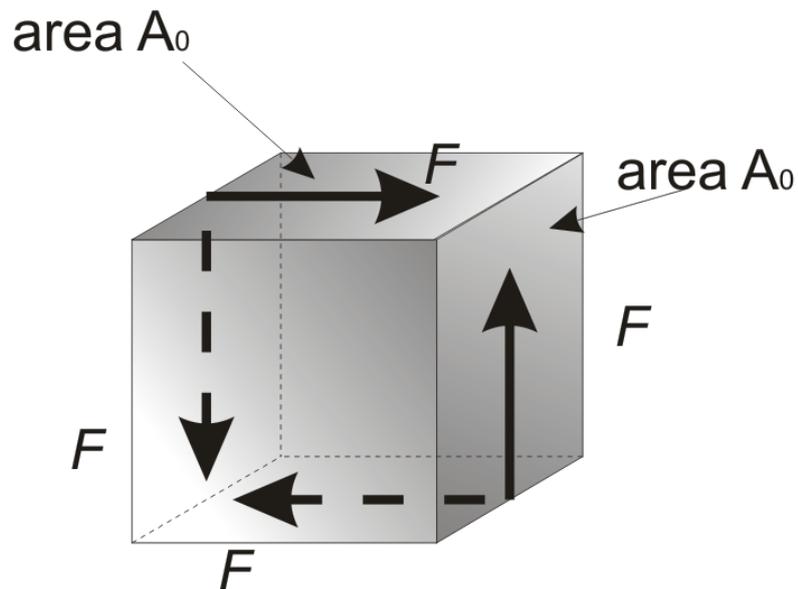
La trazione \mathbf{t}_{ex} e' applicata sul piano yz. σ_{xx} e' la sua componente nella direzione x mentre σ_{xy} e σ_{xz} lo sono nelle direzioni y e z. La σ_{xx} e' detta componente della tensione normale, mentre σ_{xy} e σ_{xz} sono dette componenti della tensione di taglio. In generale una componente tensionale σ_{ij} denota la j-ma componente di tensione applicata ad un'area con normale positiva nell'i-mo asse.

Si puo' quindi calcolare la tensione \mathbf{t}_n agente su qualunque piano con normale \mathbf{n} conoscendo le componenti tensionali:

$$\begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

dove n_1, n_2, n_3 sono i coseni direttori del vettore unitario \mathbf{n} .

Supponiamo di applicare delle sollecitazioni parallele alle facce di un corpo in maniera tale da causare una sollecitazione di taglio.



$$\text{stress } \tau = \frac{F}{A_0}$$

Figure 1.5: tensione tangenziale generate da una forza F agente parallelamente alle facce di sezione A_0 .

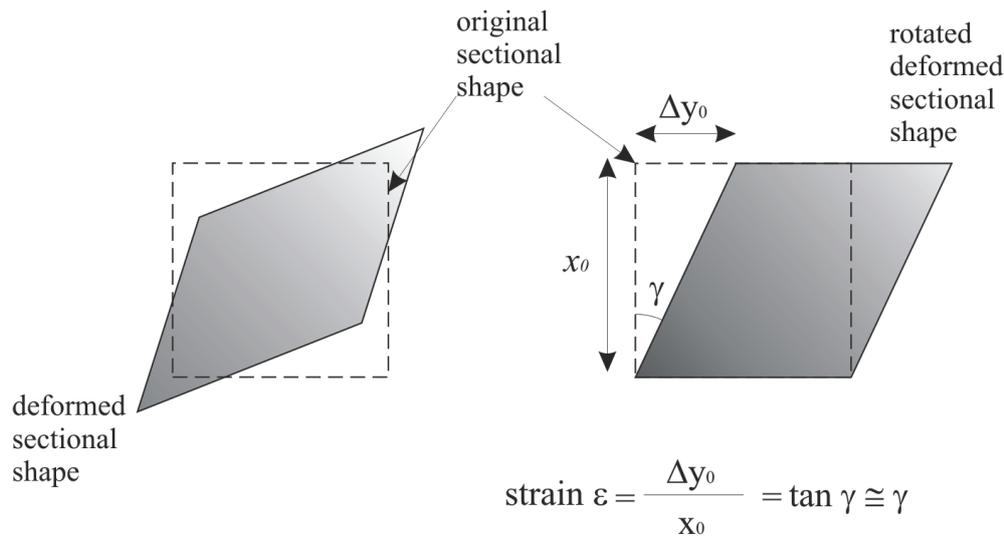


Figura 1.6: deformazione tangenziale.

Anche la sollecitazione di taglio come quella di trazione e' definita come forza per unita' di superficie:

$$\tau = \frac{F}{A_0} \quad (1.9)$$

Componenti principali di tensione

Considerando tutti i possibili sistemi di assi coordinati, vi sono tre piani mutualmente perpendicolari passanti per il punto O in cui le sollecitazioni di taglio agenti sulle facce del cubo sono nulle.

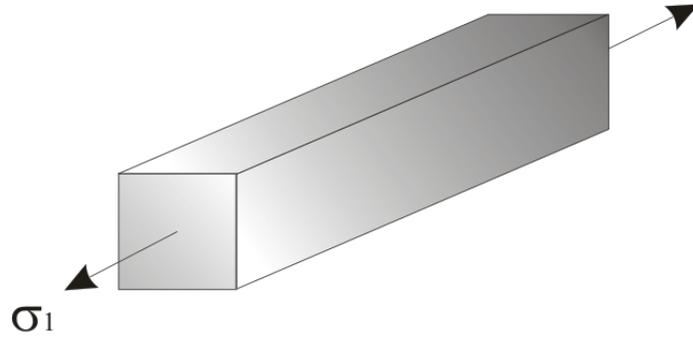
Indicando questi assi con 1, 2, 3, chiamiamo queste direzioni principali e le componenti di tensione normale agenti sui piani 23, 13 e 12 le componenti principali di tensione σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Utilizzando le direzioni principali, la tensione nel punto O puo' essere calcolata come:

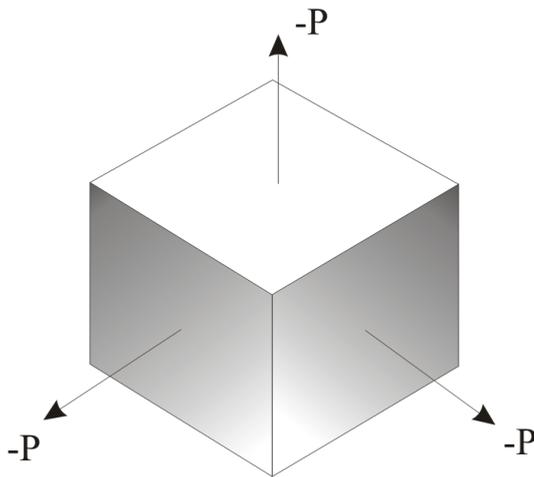
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Mostrando alcuni esempi si nota come sia matematicamente piu' semplice lavorare in un sistema di assi principali.

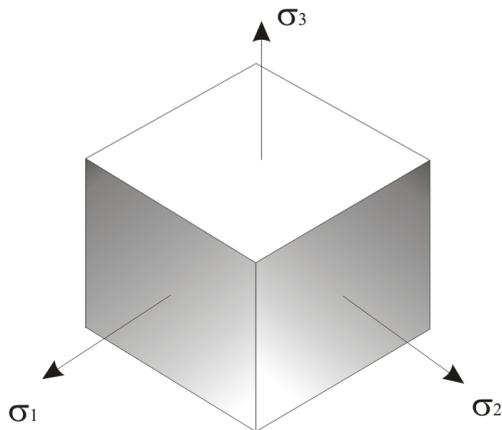
TENSIONE UNIASSIALE



PRESSIONE IDROSTATICA



TENSIONE TRIASSIALE



TENSIONE BIASSIALE

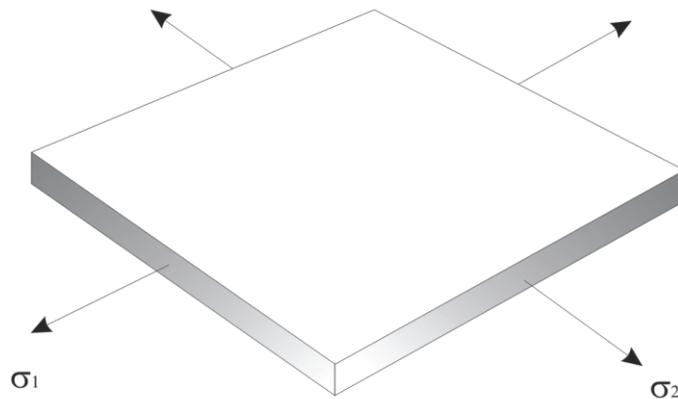


Figura 1.7: generici stati di sollecitazione generati da differenti applicazioni dei carichi.

La finalita' e' calcolare le direzioni e le tensioni principali. Calcoliamo le componenti tensionali da un sistema di coordinate ad un altro per un problema di tensione piana.

Immaginiamo che il piano xy sia proprio di una lamina sottile, lo stato tensionale in un dato punto puo' essere approssimato alla dipendenza esclusiva delle quattro componenti σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yx} e σ_{yy} .

Le uniche componenti diverse da zero sono nel piano xy, indichiamo tale situazione come sollecitazione piana (una delle tre tensioni principali e' nulla).

Consideriamo un elemento del corpo sollecitato in stato tensionale piano,

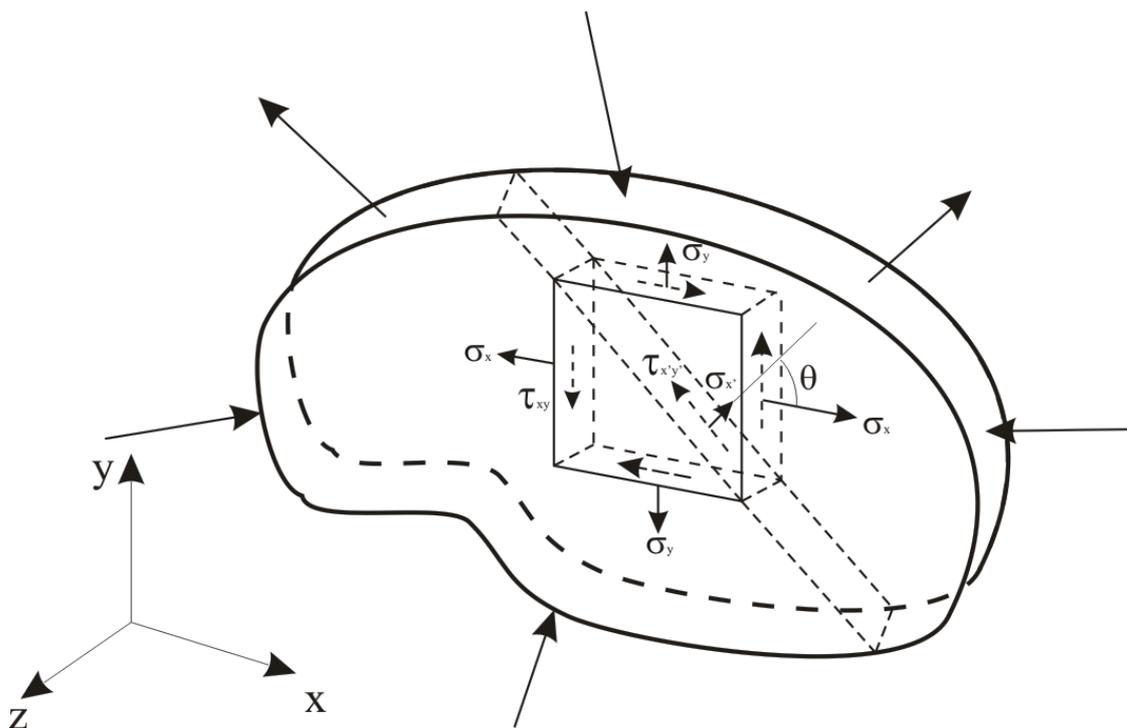


Figura 1.8: tensioni agenti in un solido in stato di sollecitazione piano.

e un sistema di coordinate x', y' tale che l'asse x' sia inclinato di un angolo θ rispetto all'asse x .

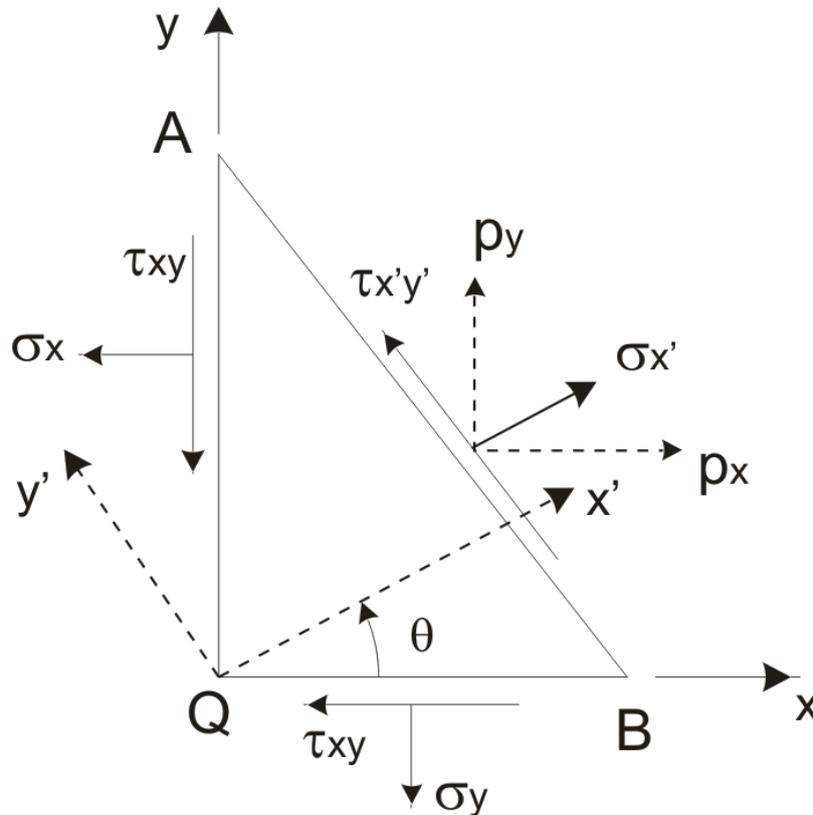


Figura 1.9: cambio di coordinate rispetto ad un generico angolo θ .

Scrivendo le equazioni di equilibrio per il triangolo QAB si dimostra:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ \sigma_{y'y'} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta\end{aligned}\tag{1.11}$$

Ponendo:

$$\tau_{x'y'} = 0$$

si ottiene l'angolo θ principale:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\tag{1.12}$$

mentre le tensioni principali sono date da:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.13)$$

Ordinando le tensioni principali come $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, si può calcolare la tensione tangenziale massima come:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.14)$$

La tensione tangenziale massima agisce sempre su un piano inclinato di 45 gradi rispetto a quello su cui agiscono σ_1 e σ_3 .

Componenti idrostatica e deviatorica

Consideriamo la matrice delle tensioni nella sua forma generale (1.7), e' conveniente considerarla come divisa in due parti di cui una detta idrostatica o sferica e l'altra detta deviatorica.

La componente idrostatica e' definita come:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1.15)$$

In funzione di tale equazione definiamo lo stato di sollecitazione idrostatico come:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Lo stato di sollecitazione deviatorica e' definito in funzione della sua matrice tensoriale come differenza rispetto a quella idrostatica:

Riferendoci alle tensioni principali le componenti della tensione deviatorica possono essere scritte come:

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{3} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \frac{(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz})}{3} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \frac{(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{3} \end{bmatrix}$$

e schematizzate come:

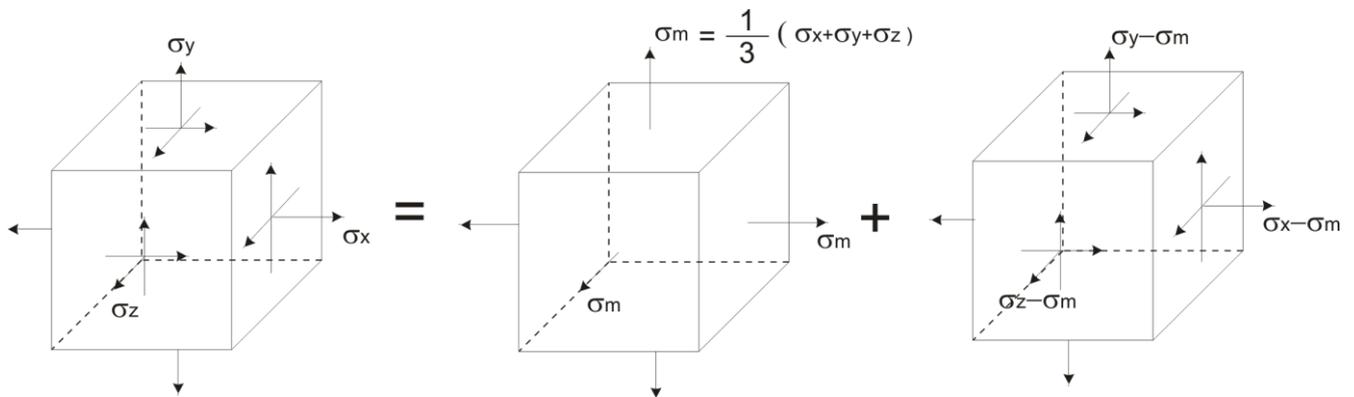


Figura 1.10: tensioni principali (sinistra), componenti idrostatiche (centro), componenti deviatoriche (destra).

In generale, la componente idrostatica e' responsabile di un cambio di volume nel materiale mentre la componente deviatorica e' responsabile delle distorsioni.

Deformazione monoassiale

L'esperienza mostra che non appena una forza viene applicata a un materiale solido ne consegue una variazione della sua geometria iniziale quindi subisce una deformazione.

Consideriamo una barra di lunghezza L_0 , applichiamo una forza tale da fare allungare la barra di una quantita' $DL=L-L_0$.

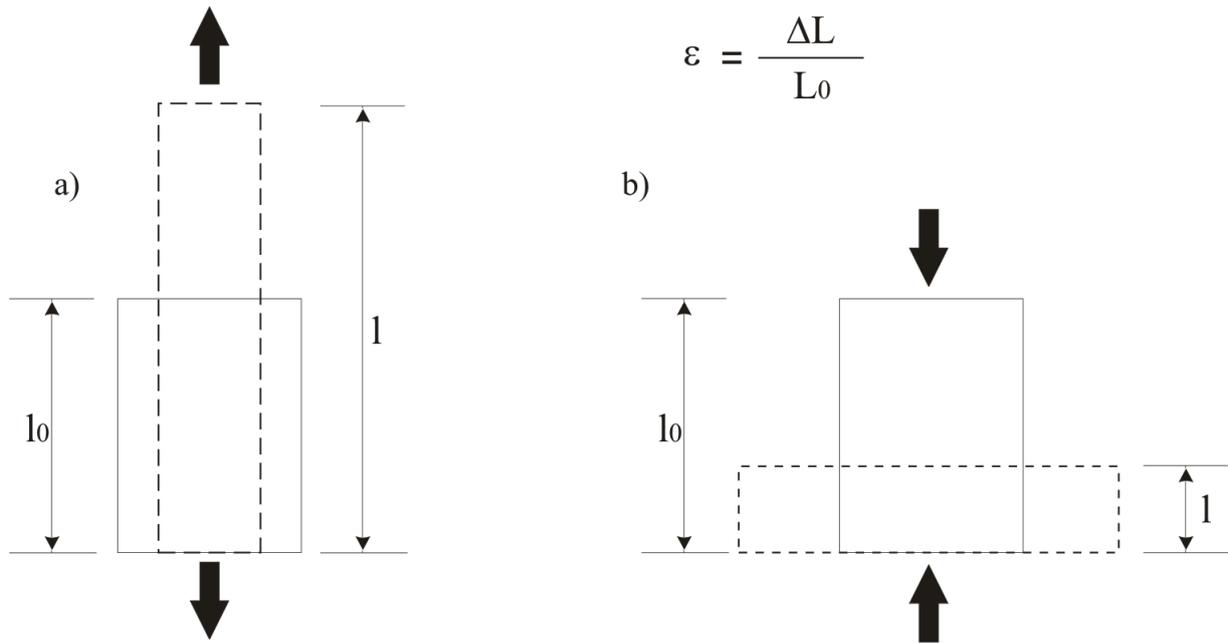


Figura 1.11: deformazione generata da una forza agente in un'unica direzione.

Definiamo la deformazione nominale o ingegneristica come:

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.19)$$

Definiamo anche la deformazione tangenziale vera o ingegneristica come:

$$\gamma = \frac{a}{b} \quad (1.20)$$

visualizzabile nella seguente figura 1.12.

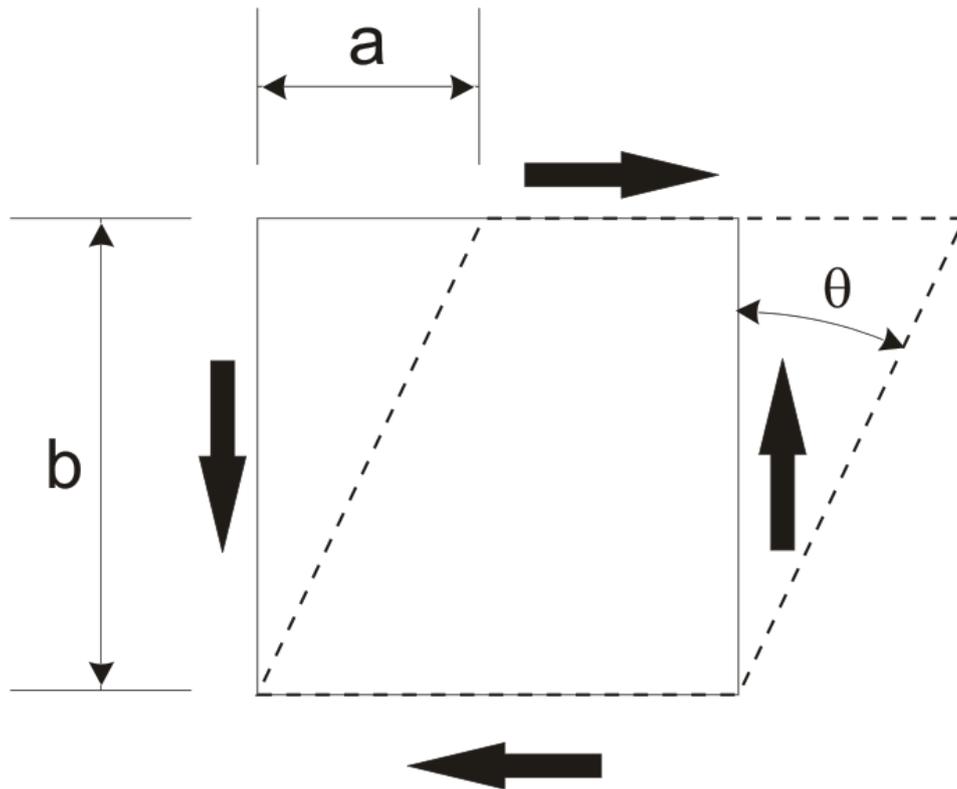


Figura 1.12: deformazione tangenziale.

Tali definizioni sono valide solo per deformazioni piccolissime, per tale analisi è quindi necessario introdurre il concetto di deformazione vera:

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L} \quad (1.21)$$

per una qualunque deformazione da L_0 a L :

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L d\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} \quad (1.22)$$

che intergrata diventa:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad (1.23)$$

che per piccole deformazioni diventa:

$$\varepsilon = \ln\left(1 + \frac{L}{L_0}\right) \cong \frac{\Delta L}{L_0} = e \quad (1.24)$$

Deformazioni in due dimensioni

Consideriamo un quadrato di dimensioni infinitesime Δx - Δy nel piano xy .

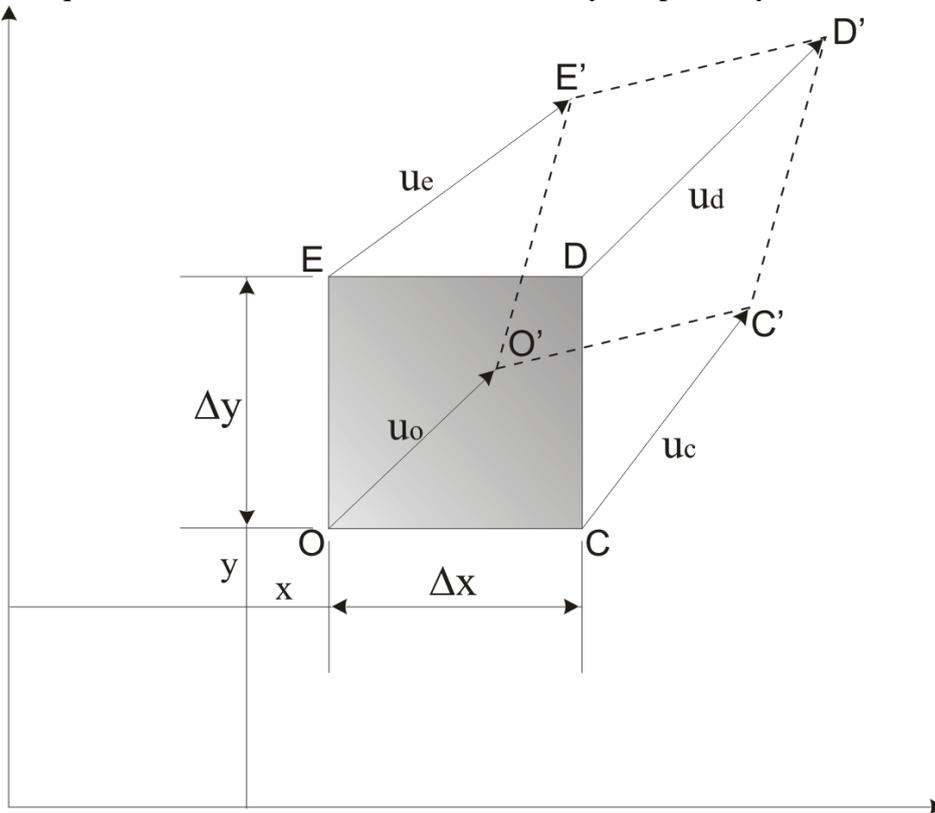


Figura 1.13: distorsione generate in un solido in stato di deformazione piano.

Assumiamo che la deformazione avvenga solo nel piano xy e lungo le direzioni x e y . Indichiamo questa situazione stato di deformazione piano.

Definiamo le componenti della deformazione in un punto O come le variazioni relative delle lunghezze Δx e Δy :

$$e_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O'C' - OC}{OC} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\Delta x + (\partial u / \partial x)\Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.25)$$

$$e_{yy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{O'E' - OE}{OE} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[\Delta y + (\partial v / \partial y)\Delta y] - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

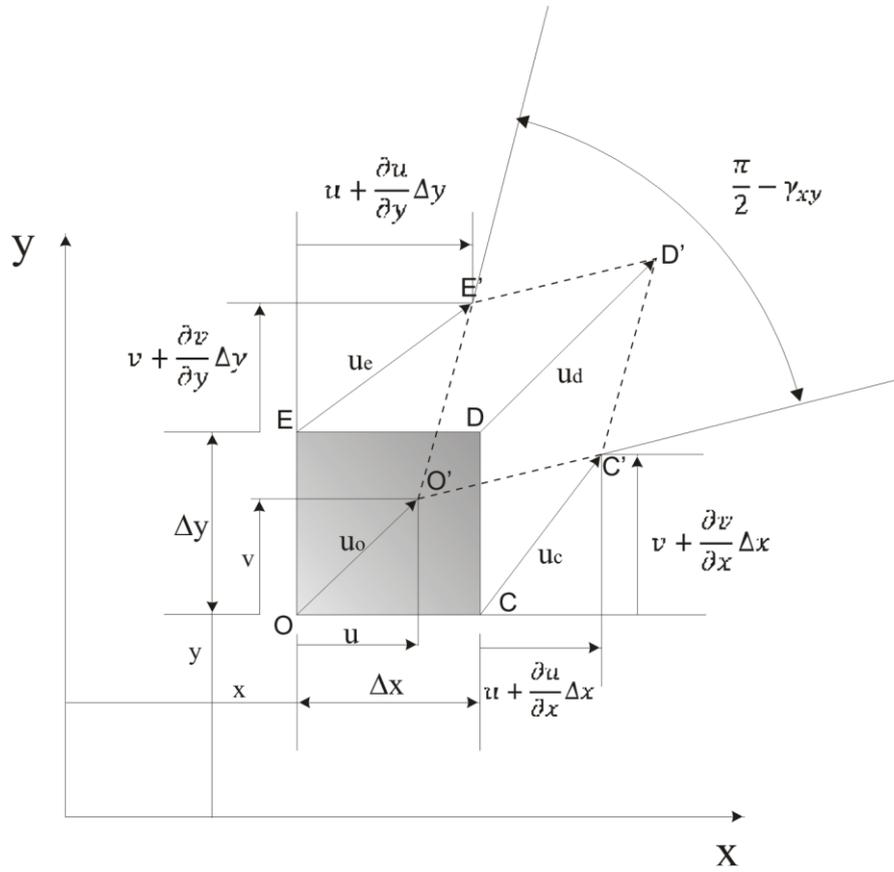


Figura 1.14: componenti de formative in un solido in stato di deformazione piano.

Similmente si puo' definire la componente di deformazione tangenziale:

$$\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - [C'O'E'] \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{2} - \frac{(\partial v / \partial x) \Delta x}{\Delta x} - \frac{(\partial u / \partial y) \Delta y}{\Delta y} \right] \right\} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.26)$$

che in tre dimensioni possiamo scrivere come:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

Similmente a quella delle tensioni possiamo definire la matrice delle deformazioni:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & \varepsilon_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & \varepsilon_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

che puo' essere scritta in termini delle deformazioni principali:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

che godono dell'importante proprieta' che:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_1 + e_2 + e_3 \quad (1.30)$$

in stato di deformazione piano una delle componenti principali e' nulla:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Deformazione elastica

La deformazione elastica e' caratterizzata dalle fondamentali proprieta' per cui l'energia e' recuperabile, i legami atomici non si rompono, il materiale torna ad assumere la sua geometria iniziale dopo l'applicazione del carico e il materiale obbedisce alla legge di Hook.

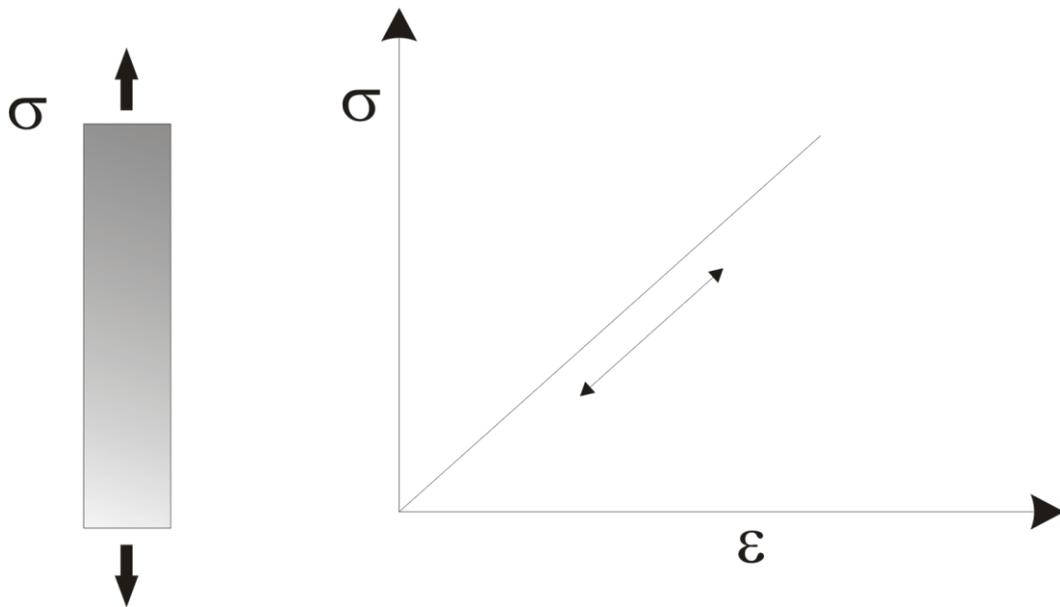


Figura 1.15: comportamento elastico.

La relazione lineare che regola la deformazione elastica e' valida solo per piccole deformazioni. Consideriamo una sollecitazione monoassiale nella direzione x.

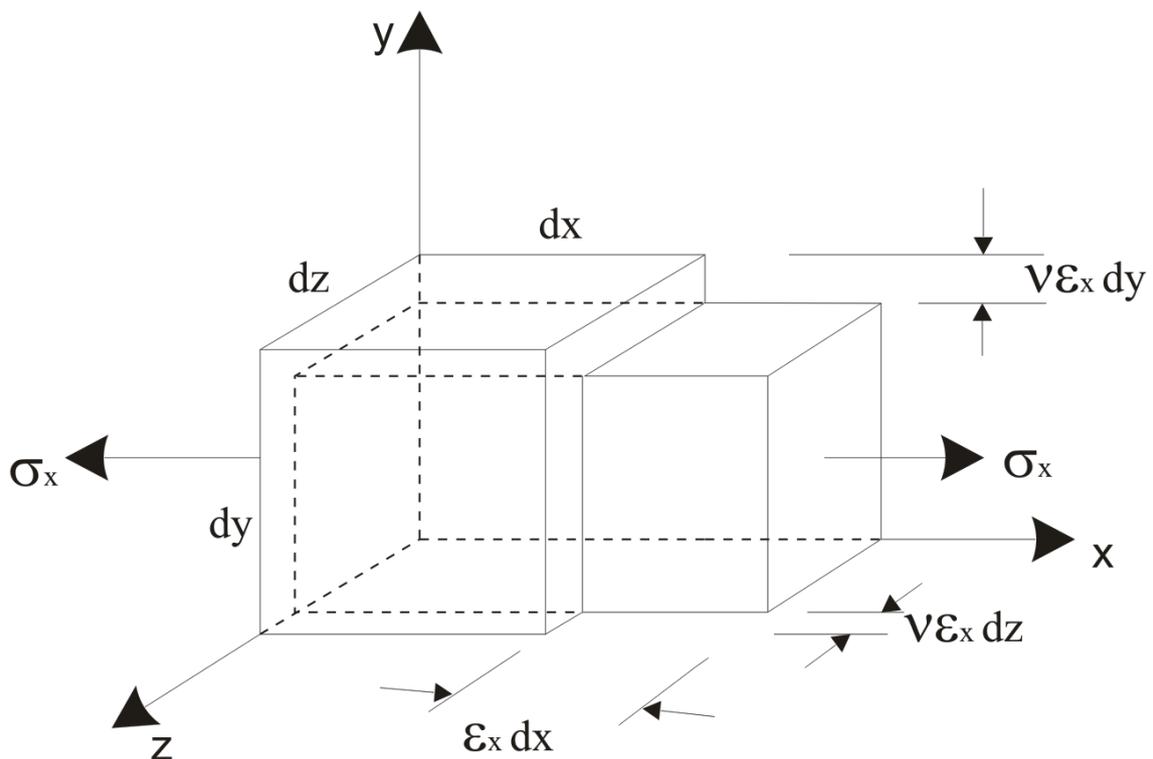


Figura 1.16: deformazioni in uno stato di sollecitazione monoassiale.

Si definisce Modulo di Young il rapporto tra la sollecitazione imposta e la deformazione indotta:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.32)$$

Notiamo che in caso di sollecitazione monoassiale:

$$\sigma = \sigma_{xx} \quad (1.33)$$

Mentre tutte le altre componenti sono nulle.

Ora mentre:

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} \quad (1.34)$$

le componenti ε_{zz} e ε_{yy} non sono nulle.

Infatti si definisce Rapporto di Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad (1.35)$$

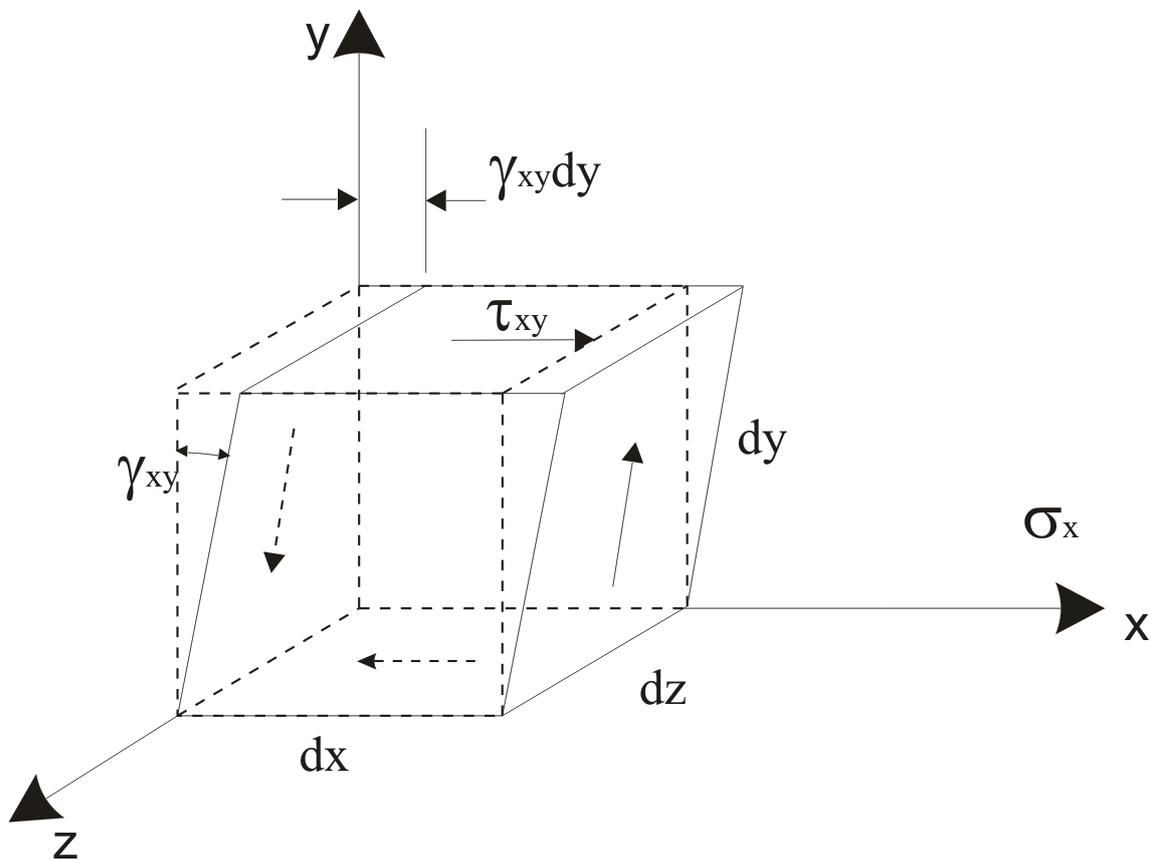


Figura 1.17: componenti della deformazione tangenziale.

Nella tabella seguente si riporta il rapporto di Poisson per alcuni dei metalli più comuni:

Metallo	ν
Ag	0.38
Al	0.34
Au	0.42
Cu	0.34
Fe- α	0.29
Ir	0.26
Ni	0.31
W	0.29

Si definisce il modulo a taglio come:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau \quad (1.36)$$

Che si dimostra essere:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.37)$$

Nel caso generale, considerando che tutte le nove componenti tensionali agiscono contemporaneamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Criteri di snervamento

Un criterio di snervamento indica per quale combinazione delle componenti tensionali si ha transizione da un comportamento elastico ad un comportamento plastico.

In una dimensione, lo snervamento avviene nel momento in cui la tensione applicata eguaglia la tensione di snervamento Y :

$$\sigma = Y \quad (1.39)$$

Ora consideriamo uno stato di sollecitazione multiassiale,

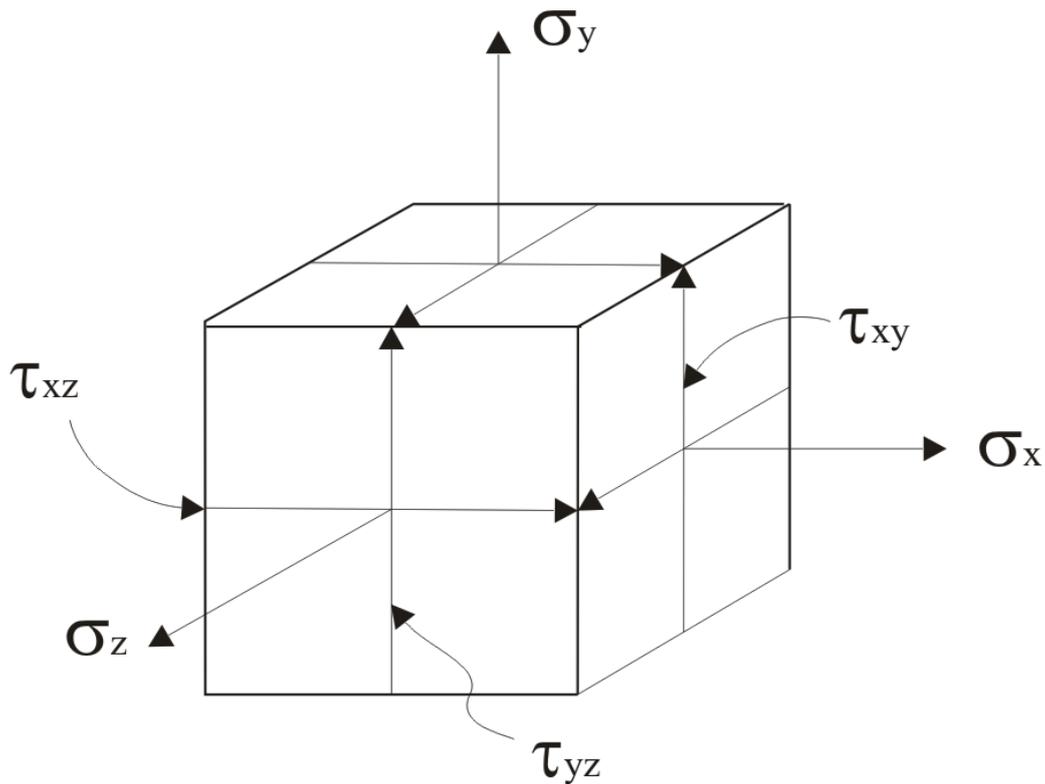


Figura 1.18: generiche component tensionali.

Criterio di Tresca

Lo snervamento avviene quando la tensione tangenziale massima eguaglia la tensione di snervamento a taglio:

$$\tau_{\max} = k \tag{1.40}$$

ricordando che

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \tag{1.41}$$

La tensione di snervamento a taglio, k , e' il livello delle tensione tangenziale, τ , che fa avvenire una transizione tra un comportamento elastico ed uno plastico nella deformazione γ .

La tensione di snervamento a taglio non e' indipendente da quella in trazione.

Applicando il criterio di Tresca per la trazione monoassiale:

$$\sigma_1 \neq 0 \tag{1.42}$$

e:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{1.43}$$

quindi si puo' scrivere:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} = \frac{\sigma_1}{2} = k \quad (1.44)$$

per cui per il criterio di Tresca:

$$k = \frac{Y}{2} \quad (1.45)$$

In generale lo snervamento avviene quando:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = k = \frac{Y}{2} \quad (1.46)$$

in caso di sollecitazione piana:

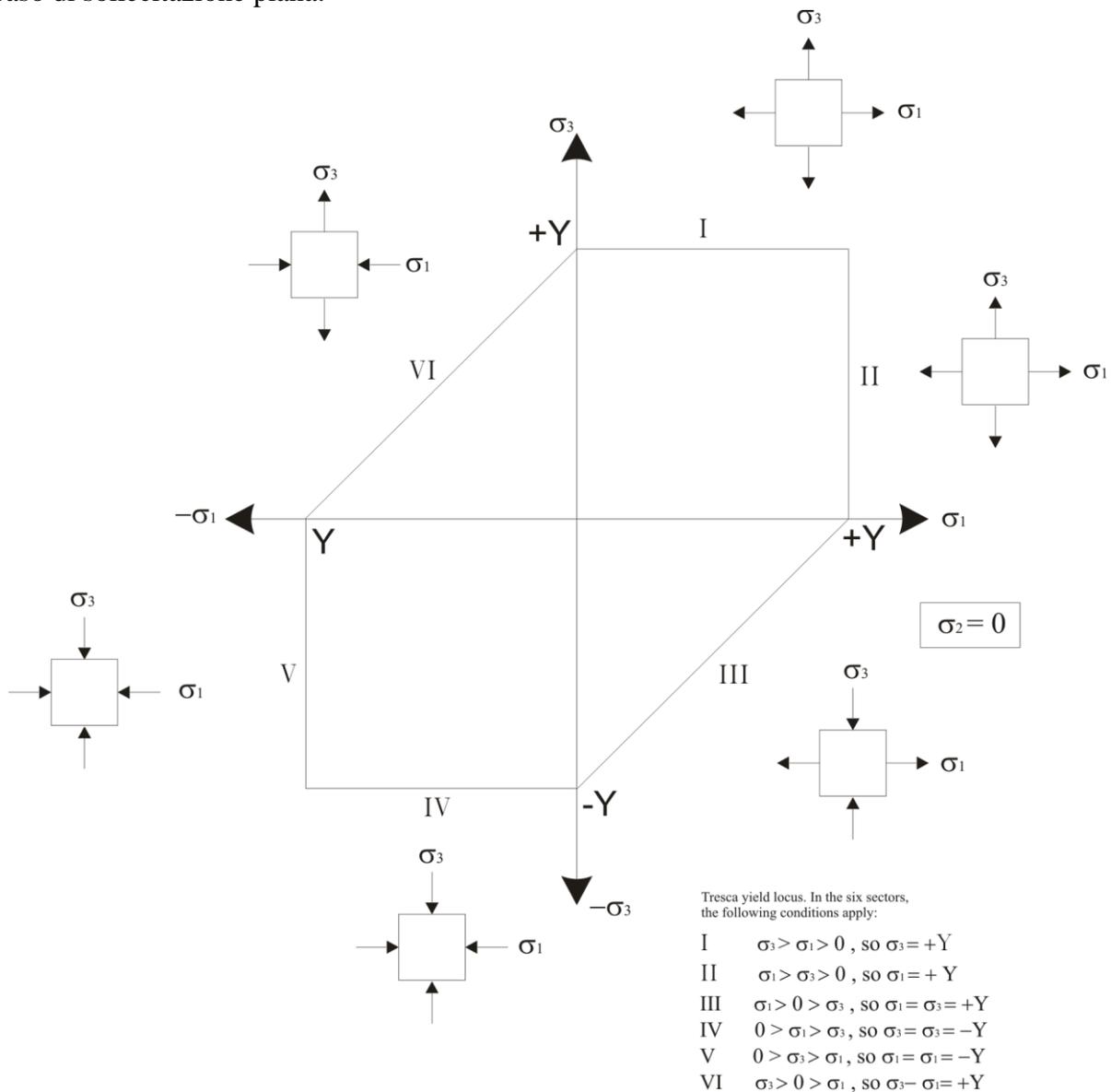


Figura 1.19: area sollecitativa second il criterio di Tresca.

Criterio di Von Mises

Definiamo una tensione equivalente:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.47)$$

che puo' essere scritta come:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.48)$$

in accordo con tale criterio, lo snervamento avviene quando la tensione equivalente eguaglia il carico di snervamento Y .

Nel caso di tensione monoassiale:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_1)^2} = \sigma_1 = Y \quad (1.49)$$

Valutiamo i due differenti criterio in alcuni casi particolari.

Tensione biassiale:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

$$\sigma_3 = 0$$

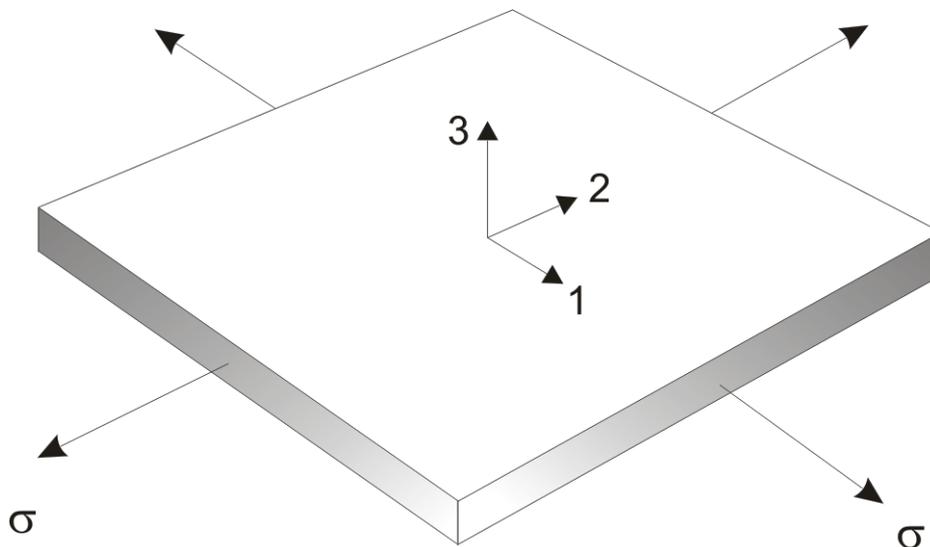


Figura 1.20: stato di sollecitazione piano.

Le tensioni principali sono:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = 0$$

(1.50)

Per Tresca:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma - 0}{2} = \frac{Y}{2}$$

Per von-Mises:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma - 0)^2 + (\sigma - 0)^2 + (0 - \sigma)^2} = \sigma$$

Taglio puro

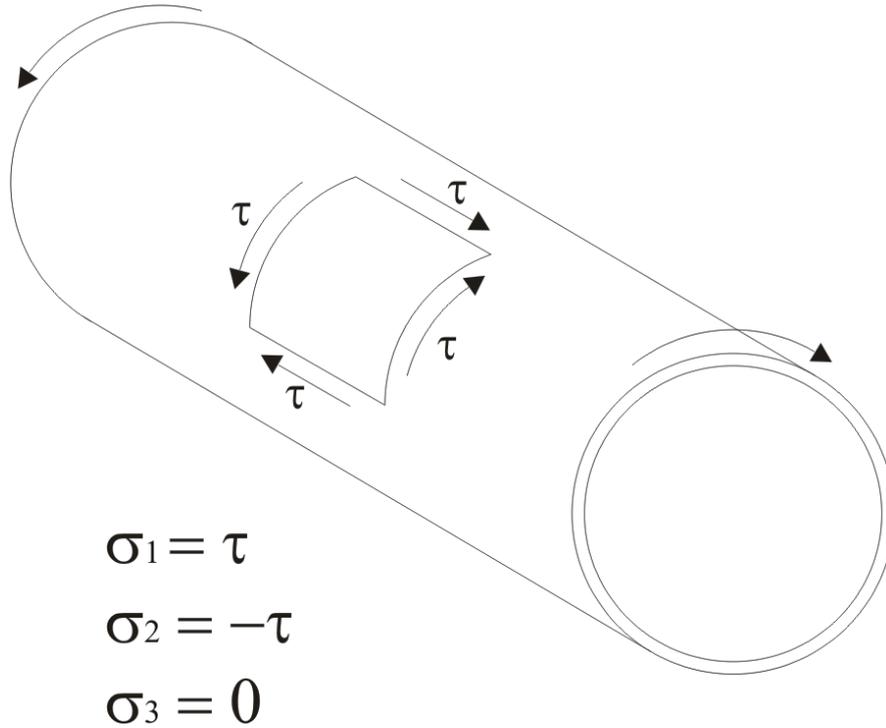


Figura 1.21: torsione in una barra.

Per Tresca:

$$\tau_{\max} = \frac{\tau - (-\tau)}{2} = \tau, \tau = \frac{Y}{2}$$

Per von-Mises:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\tau - (-\tau))^2 + (-\tau - 0)^2 + (0 - \tau)^2} = \sqrt{3}\tau$$

$$\sqrt{3}\tau = Y, \tau = k = \frac{Y}{\sqrt{3}}$$

Motiviamo ora le relazioni tensione-deformazione, e consideriamo di trazionare il materiale nella direzione 1, vi e' una contrazione nelle direzioni 2 e 3.

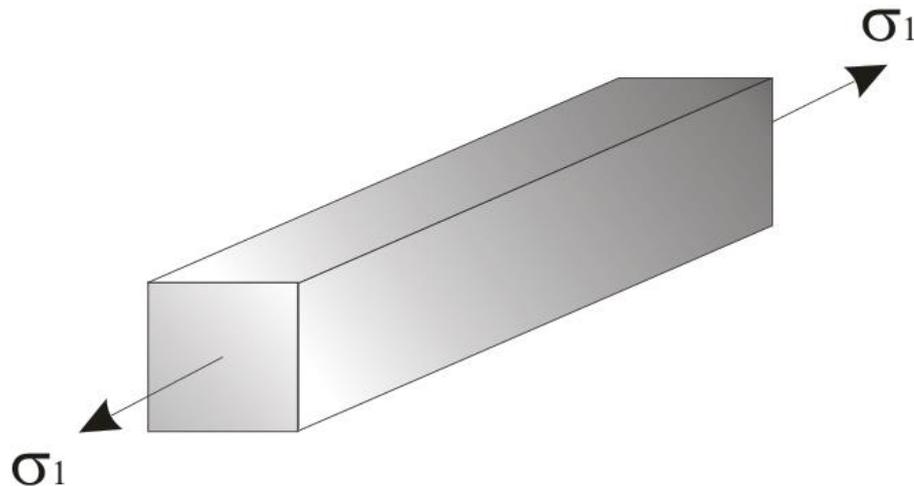


Figura 1.22: tensione monoassiale.

Per un materiale isotropo:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad (1.51)$$

Dal momento che i metalli si considerano incomprimibili, si ha per la conservazione del volume:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

dalla (1.51) ricaviamo che :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2}$$

calcoliamo le componenti deviatoriche della tensione:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + 0 + 0}{3} = \frac{2\sigma_1}{3}$$

$$\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m = 0 - \frac{\sigma_1 + 0 + 0}{3} = -\frac{\sigma_1}{3} \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m = 0 - \frac{\sigma_1 + 0 + 0}{3} = -\frac{\sigma_1}{3}$$

combinando le equazioni precedenti:

$$\frac{\varepsilon_2}{\sigma'_2} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma'_3} = \frac{-\frac{\varepsilon_1}{2}}{-\frac{\sigma_1}{3}} = \frac{\varepsilon_1}{\frac{2\sigma_1}{3}} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma'_1}$$

che puo' essere scritta come:

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma'_1} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma'_2} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma'_3} = \text{costante}$$

questa e' detta regola di flusso, e gioca lo stesso ruolo della legge di Hook nella deformazione plastica.

La sua forma differenziale e':

$$\frac{d\varepsilon_1}{\sigma_1'} = \frac{d\varepsilon_2}{\sigma_2'} = \frac{d\varepsilon_3}{\sigma_3'} = d\lambda$$

Con $d\lambda$ costante propria di ogni singolo materiale metallico.

Per la condizione di incomprimibilita':

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0$$

E' possibile ricostruire tutta la storia deformativa del materiale.

Riscriviamo l'equazione precedente come:

$$d\varepsilon_1 = d\lambda \sigma_1'$$

$$d\varepsilon_2 = d\lambda \sigma_2'$$

$$d\varepsilon_3 = d\lambda \sigma_3'$$

ogni variazione incrementale della deformazione e' proporzionale alla corrispondente componente deviatorica che ricordiamo legata alla tensione principale da:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)}{3}$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{3}$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)}{3}$$

Definiamo ora il lavoro di deformazione per unita' di volume come:

$$dw = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx}$$

che generalizzata in tre dimensioni diventa:

$$dw = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}$$

che e' valida in regime elastico e in regime plastico ed e' legata alla tensione di snervamento di von-Mises da:

$$dw = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx} = \bar{\sigma}_{VM} d\bar{\varepsilon}$$

a meno della deformazione effettiva:

$$d\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2)}$$

Tali equazioni risultano estremamente utili ed esemplificative nell'analisi degli stati tenso-deformativi durante i processi di deformazione plastica industriali.

Consideriamo il caso della deformazione piana:

$$\varepsilon_2 = 0$$

per cui:

$$d\varepsilon_2 = d\lambda\sigma_2' = 0 \Rightarrow \sigma_2' = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{3} = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

utilizzando le espressioni precedenti per il calcolo del carico di snervamento:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{VM} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| \end{aligned}$$

quindi il criterio di von-Mises applicato a un caso di deformazione piana diventa:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| = Y \Rightarrow |\sigma_1 - \sigma_3| = \frac{\sqrt{3}}{2} Y$$

dalla condizione di incomprimibilit  otteniamo:

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow d\varepsilon_1 + 0 + d\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_1$$

per cui calcoliamo la deformazione effettiva che risulta essere:

$$d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_1^2 + 0 + (-d\varepsilon_1)^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_1| = \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_3|$$

e il lavoro di deformazione diviene:

$$dw = \bar{\sigma}_{VM} d\bar{\varepsilon} = Y \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_1| = Y \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_3|$$

Esempi

Consideriamo una lavorazione di trafilatura piana

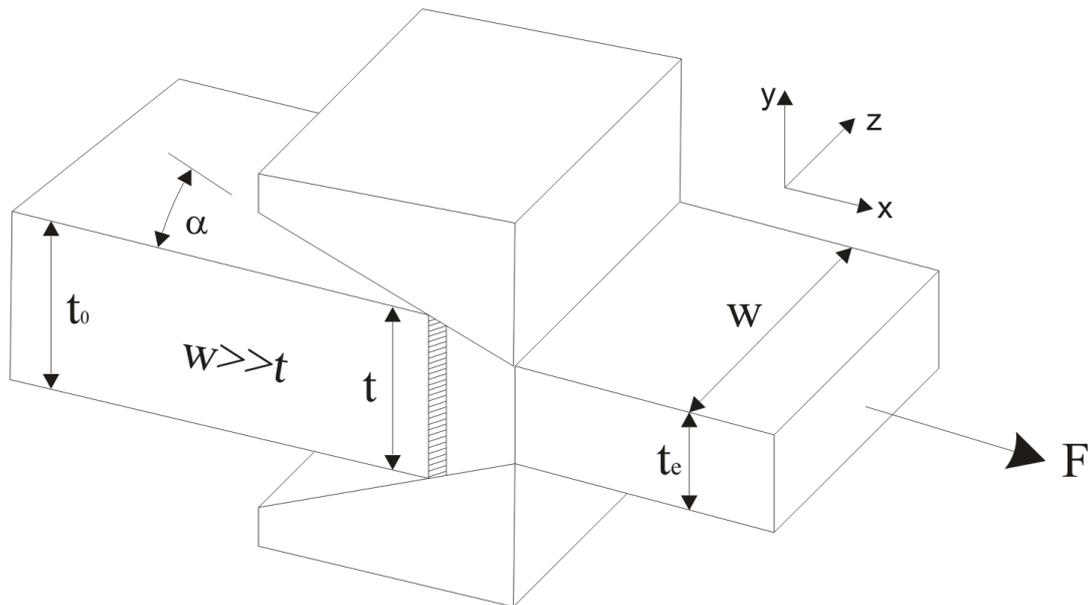


Figura 1.23: trafilatura piana.

Dal momento che:

$$w \gg t$$

si puo' considerare:

$$\varepsilon_z = 0$$

Tensione equivalente: $\bar{\sigma}_{VM} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_x - \sigma_y|$

Condizione di snervamento: $|\sigma_x - \sigma_y| = \frac{2}{\sqrt{3}} Y$

Incremento deformativo: $d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_y|$

Incremento del lavoro di deformazione: $dw = Y \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_y|$

Sia p la pressione di contatto all'interfaccia utensile-materiale, considerando l'angolo a molto piccolo, si puo' assumere l'asse y normale all'interfaccia di contatto (piccole riduzioni d'area):

Tensione equivalente: $\bar{\sigma}_{VM} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_x + p)$

Condizione di snervamento: $\sigma_x + p = \frac{2}{\sqrt{3}} Y$

Consideriamo ora una forgiatura in deformazione piana

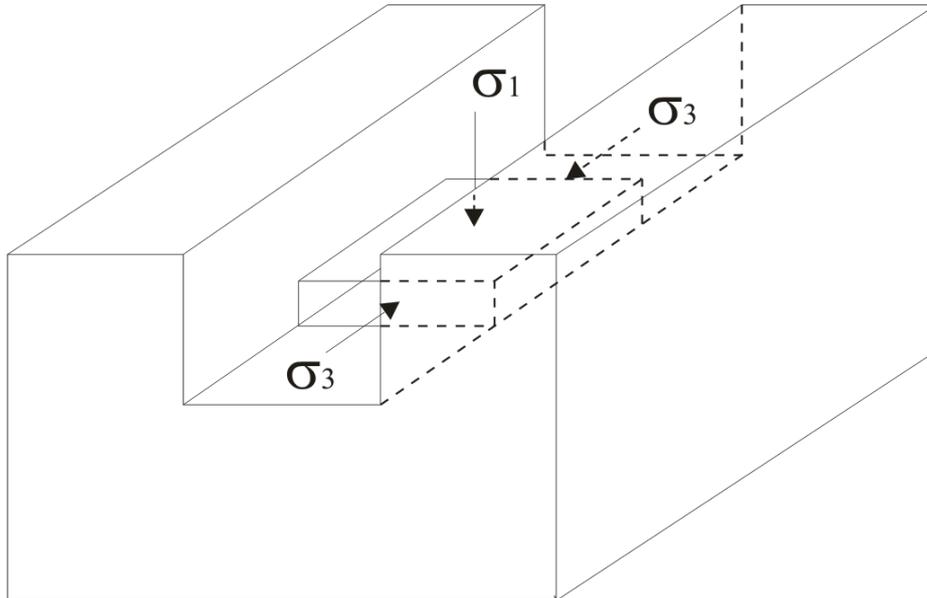


Figura 1.24: compressione piana.

Il materiale non può fluire nella direzione 2 e la σ_3 è nulla:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$$

Tensione equivalente: $\bar{\sigma}_{VM} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1|$

Condizione di snervamento: $|\sigma_1| = \frac{2}{\sqrt{3}} Y$

Incremento deformativo: $d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_1|$

Incremento del lavoro di deformazione: $dw = Y \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varepsilon_1|$

Espressioni semplificate in problemi assialsimmetrici.

Le strutture assialsimmetriche hanno simmetria rispetto all'asse z.

Le relazioni sforzo-deformazione non dipendono dall'angolo θ .

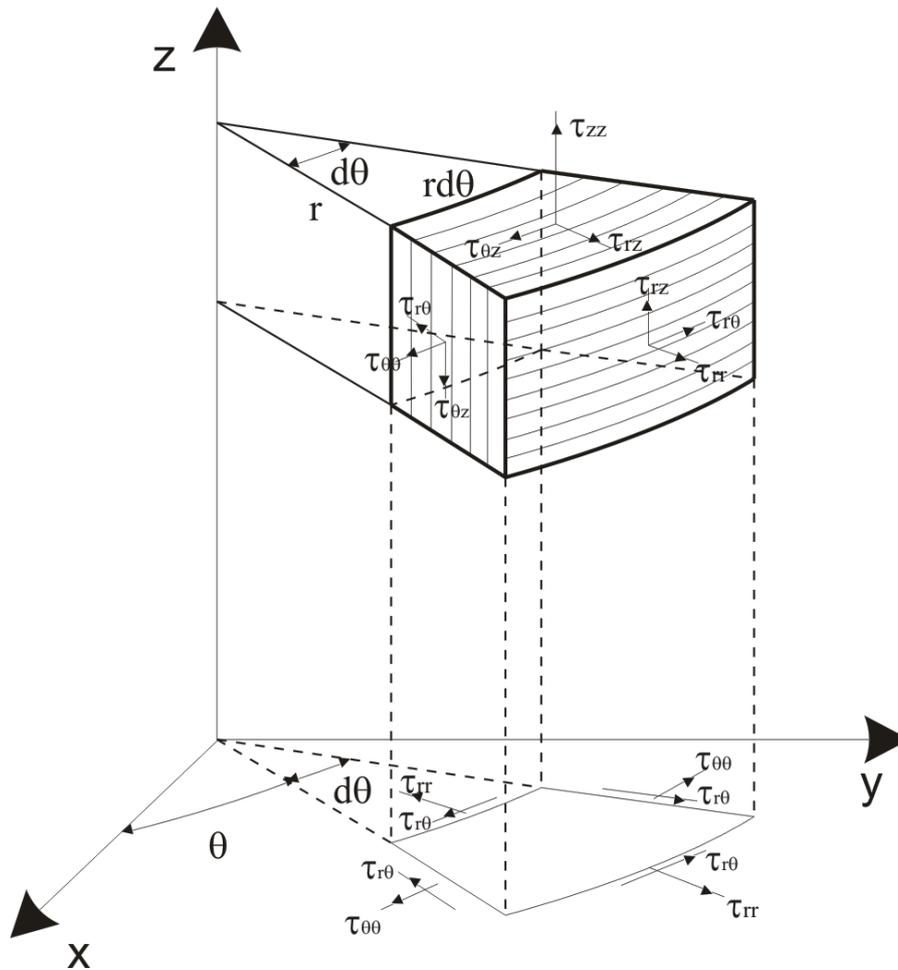


Figura 1.25: component tensionali in un sistema assialsimmetrico.

Tutti gli sforzi di taglio di figura sono quindi nulli.

Durante le deformazioni assialsimmetriche (lavorazioni di tubi, estrusione di barre.....) si considera:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta$$

In tali situazioni:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{VM} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{0 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = |\sigma_r - \sigma_z| \end{aligned}$$

E il criterio di snervamento:

$$|\sigma_r - \sigma_z| = Y$$

dalla condizione di incomprimibilit :

$$d\varepsilon_r + d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z = 0$$

si ottiene:

$$d\varepsilon_r = d\varepsilon_\theta = -\frac{d\varepsilon_z}{2}$$

e quindi possiamo scrivere:

$$d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_r^2 + d\varepsilon_\theta^2 + d\varepsilon_z^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{d\varepsilon_z}{2}\right)^2 + \left(-\frac{d\varepsilon_z}{2}\right)^2 + d\varepsilon_z^2\right)} = |d\varepsilon_z|$$

riassumendo:

Tensione: $\sigma_r = \sigma_\theta$

Deformazione: $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$

Tensione equivalente: $\bar{\sigma}_{VM} = |\sigma_r - \sigma_z|$

Condizione di snervamento: $|\sigma_r - \sigma_z| = Y$

Incremento di deformazione equivalente: $d\bar{\varepsilon} = |d\varepsilon_z|$

Incremento del lavoro di deformazione: $dw = Y|d\varepsilon_z|$

