

---

# Macro / micro / retro *lensing* gravitazionale

*Of course there is not hope in observing this phenomenon directly. First, we shall scarcely ever approach closely enough to such a central line. Second, the angle beta will defy the resolving power of our instruments.*

Albert Einstein, 1936  
(dalla lettera all'Editore di Science)

**Francesco De Paolis, Mosè Giordano,  
Gabriele Ingrosso, Luigi Manni,  
Achille Nucita, Francesco Strafella**

Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi",  
Università del Salento

---

**D**opo esattamente un secolo dalla formulazione della Teoria della Relatività Generale, una delle sue conseguenze più affascinanti e importanti è il fenomeno della lente gravitazionale che ormai è diventato un potente metodo di indagine in astrofisica e cosmologia. Esso è infatti utilizzato con regolarità per studiare la distribuzione delle stelle nella Via Lattea, per indagare sia la materia oscura che l'energia oscura su grandissima scala e per scoprire pianeti extrasolari. Grazie agli sviluppi tecnologici, un'ulteriore utilizzo del metodo dovrebbe permettere in breve tempo di misurare i parametri fondamentali (massa, momento angolare e carica elettrica) del buco nero di grande massa al centro della nostra galassia.

## Introduzione

Nel 1911, mentre era ancora impegnato nello sviluppo della Teoria della Relatività Generale (che sarà poi pubblicata nel 1916), Einstein effettuò il primo calcolo della deflessione della luce da parte del Sole [1]. Egli calcolò correttamente che un corpo massivo potesse agire da lente gravitazionale deviando la direzione di propagazione dei raggi luminosi radenti alla superficie dell'astro, ma il risultato numerico ottenuto per l'angolo di deflessione (si veda il riquadro *L'approssimazione Newtoniana*), basato sulla fisica Newtoniana, era sbagliato di un fattore due. Il 14 dicembre 1913 scrisse ad Hale, uno degli astronomi più famosi dell'epoca, chiedendogli se fosse possibile misurare un angolo di deflessione pari a 0.87 secondi d'arco. La risposta di Hale fu negativa ma Einstein non si diede per vinto e quando nel 1915 rifecce il calcolo trovò il valore corretto  $\phi = 2r_s/b$  (dove  $r_s = 2GM/c^2$  è il raggio di Schwarzschild e  $b$  è il parametro di impatto dei raggi di luce provenienti dalla sorgente), che corrisponde ad un

## L'approssimazione Newtoniana

Il *lensing gravitazionale* è la deflessione della traiettoria dei raggi luminosi in presenza di un campo gravitazionale: in un certo senso i fotoni sono attratti dal campo gravitazionale del corpo che agisce dunque da lente. La prima discussione qualitativa di questo fenomeno risale al 1704 ad opera dello stesso Newton [8] ed il primo calcolo dell'angolo di deflessione, usando naturalmente la gravitazione Newtoniana, fu pubblicato nel 1804 da Soldner. Allo stesso risultato giunse anche Einstein nel 1911 [1].

Facendo riferimento alla Figura 1 il calcolo procede nel seguente modo. Sia  $M$  la massa di una stella (ad esempio del Sole). La componente sull'asse  $x$  della forza che agisce sulla particella con massa  $m$  nel punto  $(b, y)$ , dove  $b$  è il parametro di impatto, è

$$F_x = -GmM \frac{b}{(b^2 + y^2)^{3/2}} \quad (1)$$

dove abbiamo indicato con  $G$  la costante gravitazionale. Poiché  $mdv_x/dt = F_x$  abbiamo

$$\frac{dv_x}{dt} = -GM \frac{b}{(b^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2)$$

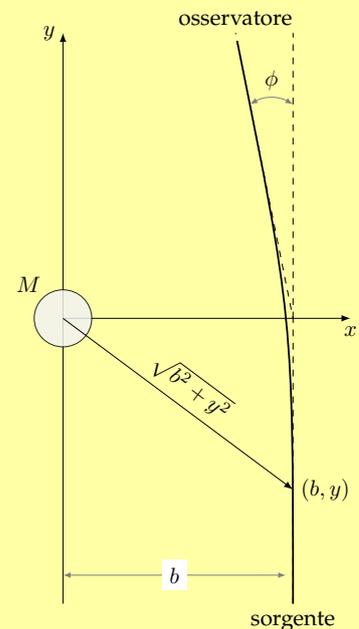
ed integrando sul tempo  $t$  otteniamo il valore finale della velocità  $v_x$

$$v_x = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{GMb}{(b^2 + y^2)^{3/2}} dt = -\frac{2GMb}{v_y} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(b^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{2GM}{cb} \quad (3)$$

dove nell'ultima espressione abbiamo posto  $v_y = c$ . Questo risultato è indipendente dalla massa  $m$  della particella deflessa e quindi applicabile anche al fotone che ha massa a riposo nulla. Nel caso del Sole abbiamo  $b = R \simeq 7 \times 10^5$  km ed  $M = M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33}$  g e la deflessione angolare risulta essere

$$\phi \simeq \frac{|v_x|}{c} \simeq \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{r_s}{R} \simeq 0.87'' \quad (4)$$

dove abbiamo indicato con  $r_s$  il raggio di Schwarzschild. Il valore che si ottiene in Relatività Generale usando l'approssimazione di campo gravitazionale debole è esattamente il doppio [9].



**Figura 1:** Schema per il calcolo della deflessione della luce: la traiettoria dei fotoni con parametro di impatto  $b$  è deviata dal campo gravitazionale del Sole.

angolo di deflessione di  $1.75''$  nel caso del Sole (si veda il riquadro *L'approssimazione relativistica in campo debole*). Questo risultato fu clamorosamente confermato durante l'eclisse di Sole del 1919 [2].

Nel 1924 Chwolson [3] studiò il caso particolare in cui sorgente, lente ed osservatore sono perfettamente allineati e notò la possibilità di osservare un anello luminoso quando una sorgente stellare lontana è soggetta all'effetto lente di una stella di grande massa. Nel 1936, dietro sollecitazione di un ingegnere ceco, Rudi Mandl, Einstein pubblicò un articolo su *Science* in cui descriveva l'effetto di lente gravitazionale prodotto da una stella su un'altra, nonché la formazione di un anello luminoso, oggi denominato *anello di Einstein*, lo sdoppiamento di immagini, la loro posizione e amplificazione [6]. Tuttavia, Einstein lo considerava un effetto oltremodo curioso e di nessuna utilità pratica, concludendo che non vi era speranza di osservare direttamente questo fenomeno (si veda la citazione accanto al titolo).

Su questo punto Einstein aveva torto: sottovalutava il progresso tecnologico e non aveva previsto le motivazioni che oggi ci inducono a sfruttare ampiamente le lenti gravitazionali. In effetti, il fisico svizzero Zwicky, dopo aver letto l'articolo di Einstein e dietro suggerimento di un collega che era stato anch'egli interpellato dal tenace Ing. Mandl, comprese immediatamente che le galassie dovevano esser in realtà delle lenti gravitazionali molto più potenti delle singole stelle e potevano generare immagini con una separazione angolare sufficientemente grande da essere osservabili. In due lettere pubblicate nel 1937 Zwicky [4] fece notare che l'osservazione di *lensing* da galassie, oltre a fornire una ulteriore verifica della Relatività Generale, a causa dell'effetto di amplificazione gravitazionale della luce, avrebbe potuto consentire di osservare oggetti altrimenti invisibili e permettere di determinare in modo più diretto ed accurato la massa dinamica della galassia che funge da lente. Egli dichiarò anche che la probabilità di individuare galassie che si comportano da lenti gravitazionali poteva diventare una certezza, mentre la probabilità di individuare un evento di *microlensing* gravitazionale, termine introdotto da Paczyński nel 1986 [5] era praticamente nulla.

Tutto ciò è di una incredibile attualità e mo-

### Potere risolutivo

Il potere risolutivo di un telescopio è la capacità di separare due oggetti vicini. Uno strumento ideale, detto *diffraction limite*, può separare due sorgenti se si trovano ad una distanza angolare maggiore di  $\delta\theta = 1.22\lambda/D$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda della luce e  $D$  il diametro del telescopio. Il telescopio spaziale Hubble (HST) ha un potere risolutivo di circa  $0.05''$

stra la grande preveggenza di questo eclettico scienziato. In effetti, fu solo nel 1979 che il primo esempio di lente gravitazionale fu osservato effettivamente nel cielo, il quasar doppio QSO 0957+561 a/b [7], seguito a breve dalla scoperta di decine di altre lenti gravitazionali, anelli di Einstein e archi gravitazionali in ammassi di galassie. Tutta questa fenomenologia gioca un ruolo rilevante oggigiorno per la comprensione dell'evoluzione delle strutture nell'universo e la determinazione dei parametri del cosiddetto modello cosmologico standard.

In effetti ci sono diversi regimi nel *lensing* gravitazionale a seconda che le immagini della sorgente siano separabili da un telescopio o meno (vedi l'inserito *Potere risolutivo*). Nel caso in cui la lente gravitazionale sia costituita da un'intera galassia, le immagini che si formano sono tipicamente a distanza angolare maggiore di circa  $0.1 - 1''$  e quindi separabili. Questo fu il caso considerato da Zwicky e il *lensing* gravitazionale in questo regime è definito *macrolensing*.

Einstein invece considerava il caso di *lensing* stella-su-stella, quando la distanza angolare tra le due immagini è dell'ordine del  $\mu\text{arcsec}$  ( $1\mu\text{arcsec}$  è pari ad un milionesimo di secondo d'arco), chiaramente non separabili dai telescopi attualmente a disposizione degli astronomi. In questo caso si parla infatti di *microlensing* e quello che si dovrebbe osservare è piuttosto una variazione della brillantezza di una sorgente la cui luminosità dovrebbe, a causa del moto relativo della lente rispetto alla sorgente, dapprima aumentare, poi raggiungere un massimo e, infine, decrescere ritornando al valore di base. Mezzo secolo dopo la nota pessimistica di Einstein del 1936 i

## L'approssimazione relativistica in campo debole

Il modo più semplice per ricavare l'angolo di deflessione in approssimazione relativistica (in campo debole) è quello di partire dalla metrica di Schwarzschild <sup>a</sup>.

Questa descrive lo spazio-tempo attorno ad un oggetto massivo a simmetria sferica, solo nelle due coordinate  $(t, r)$ :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (5)$$

mentre la metrica di Minkowski è  $ds^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2$ . Un raggio di luce segue il percorso definito da  $ds = 0$ . Quindi si ha  $c = dr'/dt'$  mentre dalla (5) si ottiene  $v = dr/dt = c(1 - r_s/r)$ . Al primo ordine post-Newtoniano l'effetto della curvatura dello spazio-tempo sul cammino di un raggio di luce può essere espresso in termini di un indice di rifrazione effettivo  $n$  dato da

$$n = \frac{c}{v} = \frac{dr'}{dt'} \frac{dt}{dr} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{r_s}{r} \simeq 1 - \frac{2}{c^2} \Phi \quad (6)$$

dove  $\Phi = -GM/r$ . Quando i raggi di luce passano attraverso un campo gravitazionale, l'angolo di deflessione è l'integrale sul percorso del gradiente dell'indice di rifrazione effettivo perpendicolare al percorso, cioè

$$\phi = - \int \nabla_{\perp} n dl = \frac{2}{c^2} \int \nabla_{\perp} \Phi dl \quad (7)$$

Poiché in genere  $\phi$  è un angolo molto piccolo possiamo semplificare l'integrale integrando non sul cammino del raggio deflesso ma considerando il cammino rettilineo con lo stesso parametro di impatto. Si ha dunque

$$\Phi = -\frac{GM}{(b^2 + y^2)^{1/2}} \quad \rightarrow \quad \nabla_{\perp} \Phi(b, y) = \frac{GMb}{(b^2 + y^2)^{3/2}} \quad (8)$$

L'angolo di deflessione è dunque

$$\phi = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMb}{(b^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{2}{c^2} \frac{2GM}{b} = \frac{4GM}{bc^2} = 2 \frac{r_s}{b} \quad (9)$$

Nel campo gravitazionale del Sole si ottiene  $\phi \simeq 1.75''$ , in perfetto accordo con le osservazioni.

<sup>a</sup>Per una trattazione più rigorosa si veda l'articolo di Corianò et al. in questo stesso numero di *Ithaca*.

tempi erano però diventati maturi per la *microlensing* gravitazionale. A rilanciare l'argomento fu l'articolo del 1986 di Paczyński nel quale si proponeva di monitorare contemporaneamente decine di milioni di stelle nella Grande Nube di Magellano (LMC) alla ricerca di variazioni peculiari della curva di luce delle stelle. L'idea alla base di questa proposta era di verificare l'ipotesi che la materia oscura necessaria per rendere conto della piatezza della curva di rotazione della Via Lattea potesse essere composta in maggior parte da oggetti compatti come nane bianche, nane brune, pianeti orfani (o *free-floating planets*),

etc. Fu coniato anche il termine MACHOs (da Massive Astrophysical Compact Halo Objects) per queste microlenti gravitazionali ed i primi due eventi di *microlensing* furono scoperti nel 1993 dalle collaborazioni EROS e MACHO verso le Grandi Nubi di Magellano (LMC).

Oggi vi sono diverse collaborazioni che scrutano non solo le Nubi di Magellano ma anche il Bulge della Via Lattea e la galassia di Andromeda. Il *microlensing* è quindi diventata una tecnica standard non solo per dedurre la distribuzione di stelle e MACHOs nella nostra galassia ed in quelle vicine ma anche per scoprire pianeti extrasola-

ri. Attualmente ne sono stati scoperti 34 con questa tecnica (si veda <http://www.exoplanet.eu/>) che, sebbene dispendiosa in termini di tempo d'osservazione richiesto e conseguente notevole mole di dati da analizzare, è in realtà talmente potente da rendere possibile addirittura la scoperta di pianeti nelle galassie vicine [10]. Si noti che la scala del *microlensing* per individuare pianeti di massa terrestre è quella del *nanolensing*, vale a dire l'angolo di deflessione generato da un pianeta terrestre orbitante attorno ad una stella lente è dell'ordine del milionesimo di arcosecondo. È ormai risaputo che pianeti di questo tipo siano stati già individuati studiando in dettaglio la curva di luce di eventi di *microlensing* verso il Bulge della Galassia.

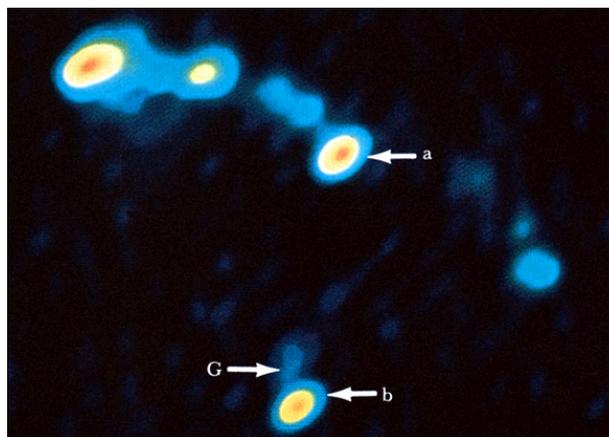
Le scale del *lensing* gravitazionale considerate fino ad ora implicano, ovviamente, angoli di deflessione molto piccoli, e riguardano sempre sistemi in cui l'approssimazione di campo gravitazionale debole si applica praticamente in maniera perfetta. Vi è comunque un caso molto interessante in cui l'approssimazione suddetta non è valida e gli angoli di deflessione sono tutt'altro che piccoli: quando i raggi di luce passano non molto lontano dall'orizzonte degli eventi di un buco nero (BH, dall'inglese *black hole*). L'idea è contenuta nell'ultimo articolo scientifico scritto (in collaborazione con D. Holz) da una delle personalità più influenti nel campo della Relatività Generale, J. A. Wheeler [11]. Si veda per questo l'ultima sezione dell'articolo.

## Macrolensing

I quasar sono gli oggetti celesti più brillanti che conosciamo e per la loro estrema luminosità risultano visibili a miliardi di parsec di distanza<sup>1</sup>. Dopo l'identificazione del primo quasar nel 1963, questi oggetti rimasero a lungo un mistero ma oggi sappiamo che la loro intensa emissione è generata dall'accrescimento di materia su un buco nero di grande massa, ovvero di massa dell'ordine di grandezza del miliardo di masse solari.

Osservato al telescopio, un quasar appare come un oggetto puntiforme estremamente brillante, molto simile ad una stella. Da qui infatti il nome di *oggetto quasi stellare* abbreviato in quasar.

<sup>1</sup>Un parsec equivale ad una distanza di circa tre anni luce.

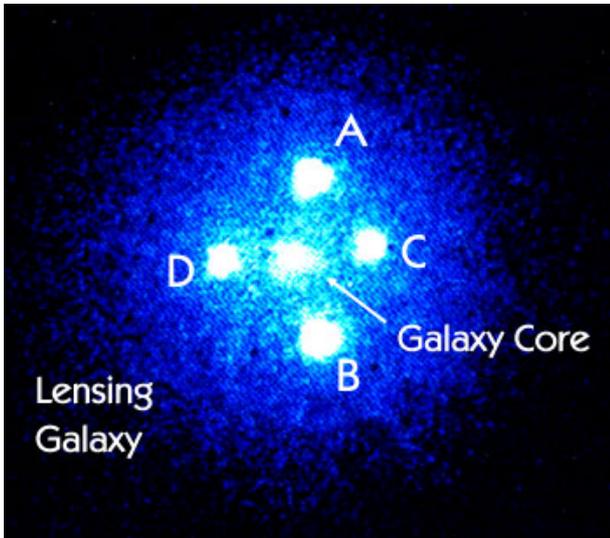


**Figura 2:** Le due immagini a e b del QSO 0957+561. La galassia che fa da lente gravitazionale è indicata con G.

Fu proprio legato ad un quasar (QSO 0957+561) il primo evento di lente gravitazionale osservato nel 1979 che, sebbene previsto teoricamente, colse ugualmente di sorpresa gli astronomi. L'esistenza di due oggetti (indicati con a e b nella Figura 2) separati da circa 6" e caratterizzati da uno spettro identico permise di concludere presto che essi erano l'immagine sdoppiata dello stesso quasar.

Zwicky aveva perfettamente ragione e le galassie funzionavano benissimo come lenti gravitazionali. Qualche tempo dopo si identificò anche la galassia che faceva da lente gravitazionale e si stabilì che la sua massa dinamica, responsabile della deflessione della luce proveniente dal quasar e della formazione delle immagini, era almeno dieci volte maggiore della massa visibile. Questo quasar doppio è anche stato il primo caso in cui è stato misurato il ritardo d'arrivo dei fotoni tra le due immagini (circa 420 giorni) dovuto al fatto che i fotoni che formano le due immagini fanno dei percorsi differenti passando attorno alla galassia-lente e ciò ha permesso di ottenere una stima indipendente della massa dinamica della galassia. Si possono vedere anche quattro immagini dello stesso quasar come nel caso della cosiddetta *Croce di Einstein* (Figura 3). Altre volte, quando lente e sorgente sono allineate si può osservare l'anello di Einstein più o meno completo, come nel caso dell'oggetto MG1654-1346 in Figura 4.

La Sloan Digital Sky Survey (SDSS) ha effettuato una ricognizione di oltre un quarto del cielo in cerca di immagini multiple di quasar e galassie

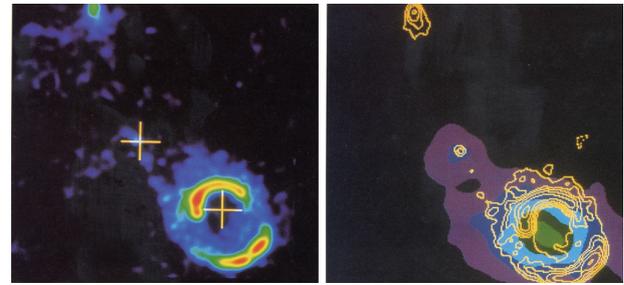


**Figura 3:** Le quattro immagini del QSO 2237+0305 detto anche Croce di Einstein.

sotto l'effetto del *lensing* gravitazionale, trovandone moltissimi esempi. Oltre alle immagini multiple, effetto del cosiddetto *strong lensing*, la SDSS ha anche trovato una moltitudine di archi, archetti e galassie deformate dall'effetto di lente gravitazionale (questo effetto va sotto il nome di *weak lensing*) della materia interposta tra osservatore e sorgenti lontane (Figura 5).

La caratteristica principale del *weak lensing*, o *lensing* debole, è la deformazione della forma delle galassie di fondo la cui luce passa attraverso una certa distribuzione di massa, ad esempio un ammasso di galassie, che si comporta da lente gravitazionale. In effetti, il *lensing* gravitazionale produce due effetti sull'immagine di una sorgente: la *convergenza* e la *deformazione*. Il primo amplifica la brillantezza della sorgente mentre il secondo è responsabile della deformazione tangenziale dell'immagine. Mentre l'effetto di convergenza è di difficile utilizzo in pratica, dato che la luminosità intrinseca della sorgente non è in genere nota, l'effetto di deformazione delle immagini e il loro orientamento è utilizzabile con il sostegno di considerazioni statistiche che ci dicono come sono distribuite (e orientate) le forme delle galassie sorgenti.

Sia il *lensing* forte che quello debole ci consentono di ottenere informazioni importantissime per la struttura a grande scala dell'Universo e la Cosmologia. L'analisi della frequenza delle immagini multiple ed il ritardo temporale tra le immagini, dovuto al fatto che la luce segue dei



**Figura 4:** Un anello di Einstein quasi perfetto della sorgente MG1654-1346 rilevato con osservazioni ottiche (a sinistra) e con osservazioni radio (immagine di destra).

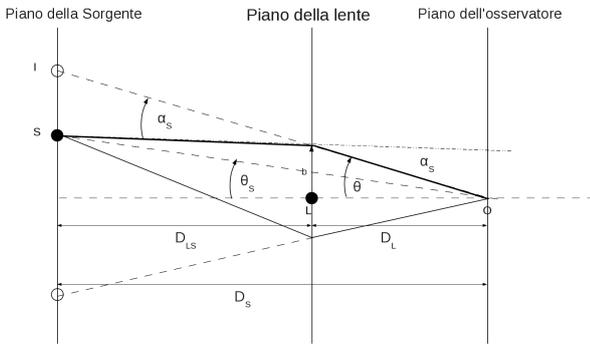


**Figura 5:** Un'immagine ripresa dalla SDSS.

percorsi diversi, consente, tra l'altro, di stimare la costante di Hubble  $H_0$ . Il ritardo temporale è infatti dato dalla differenza delle distanze percorse dalla luce proveniente dalle immagini ed è per questo inversamente proporzionale alla costante di Hubble, come fu compreso per primo da Refsdal nel 1964. Inoltre, il *lensing* debole è un mezzo potentissimo per studiare sia la materia oscura che l'energia oscura su grandissima scala ed è per fare una panoramica di tutto il cielo che sarà lanciato nei prossimi anni il satellite Euclid dell'ESA (Agenzia Spaziale Europea). L'obiettivo principale di questa missione è appunto quello di utilizzare l'effetto di *lensing* debole per ottenere la distribuzione della materia oscura attraverso la distorsione delle immagini delle galassie di fondo (generata dalle inhomogeneità di massa lungo la linea di vista) e misurare il contributo dell'energia oscura determinando il redshift di decine di milioni di galassie.

## Microlensing

Come abbiamo già accennato, nella Teoria della Relatività Generale i campi gravitazionali sono responsabili della curvatura dello spazio-tempo



**Figura 6:** Schema per il calcolo dell'equazione della lente.

e i raggi di luce seguono delle *geodetiche nulle* (le curve di minima distanza in uno spazio-tempo curvo). Segue quindi che quando un raggio di luce proveniente da una sorgente lontana interagisce con il campo gravitazionale di un corpo dotato di massa, esso devia la sua traiettoria di un angolo  $2r_s/b$ , come presentato nel riquadro *L'approssimazione relativistica in campo debole*, dove  $r_s$  è il raggio di Schwarzschild del corpo dotato di massa che funge da lente gravitazionale e  $b$  il parametro di impatto caratteristico dell'interazione.

È istruttivo confrontare una lente gravitazionale con il caso ideale di una lente sottile propria dell'ottica geometrica e comprendere la fenomenologia alla base di un evento di micro-lente che coinvolge oggetti di taglia stellare. Nella Figura 6 riportiamo un singolo raggio di luce che, interagendo con la lente  $L$ , devia dalla sua traiettoria originaria dell'angolo  $\alpha_S = 2r_s/b$  previsto dalla teoria. Nel piano della sorgente si formano quindi due immagini, le sorgenti virtuali rappresentate mediante cerchi nella figura, le cui posizioni angolari rispetto al riferimento utilizzato sono note una volta che sia risolta l'*equazione della lente* (si veda il riquadro corrispondente), una trasformazione conforme che lega la posizione  $\theta_S$  della sorgente a quella dell'immagine  $\theta$  in maniera univoca e prevedibile.

L'equazione della lente può essere riscritta nella forma  $\theta^2 - \theta_S\theta - \theta_E^2 = 0$ , se si introduce il *raggio angolare di Einstein*  $\theta_E$  che rappresenta la scala caratteristica del fenomeno. Per ogni data posizione  $\theta_S$  della sorgente, le posizioni angolari delle immagini possono essere facilmente calcolate. In Figura 7, riportiamo le immagini che sarebbero viste da un osservatore nelle diverse configurazioni possibili. All'estrema sinistra, la

## Equazione della lente

Facciamo riferimento alla Figura 6. L'angolo di deflessione è, come descritto nel riquadro *L'approssimazione relativistica in campo debole*,  $\alpha(b) = 2GM/(c^2b)$  e si ha inoltre  $\alpha = \theta_S + \theta$ . Le posizioni angolari della sorgente e della sua immagine sono legate dalla cosiddetta equazione della lente:

$$\theta_S = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c^2 \theta} \quad (10)$$

Nel caso di perfetto allineamento, quando  $\theta_S = 0$ , si trova il raggio angolare di Einstein che è il raggio angolare di un anello dato da

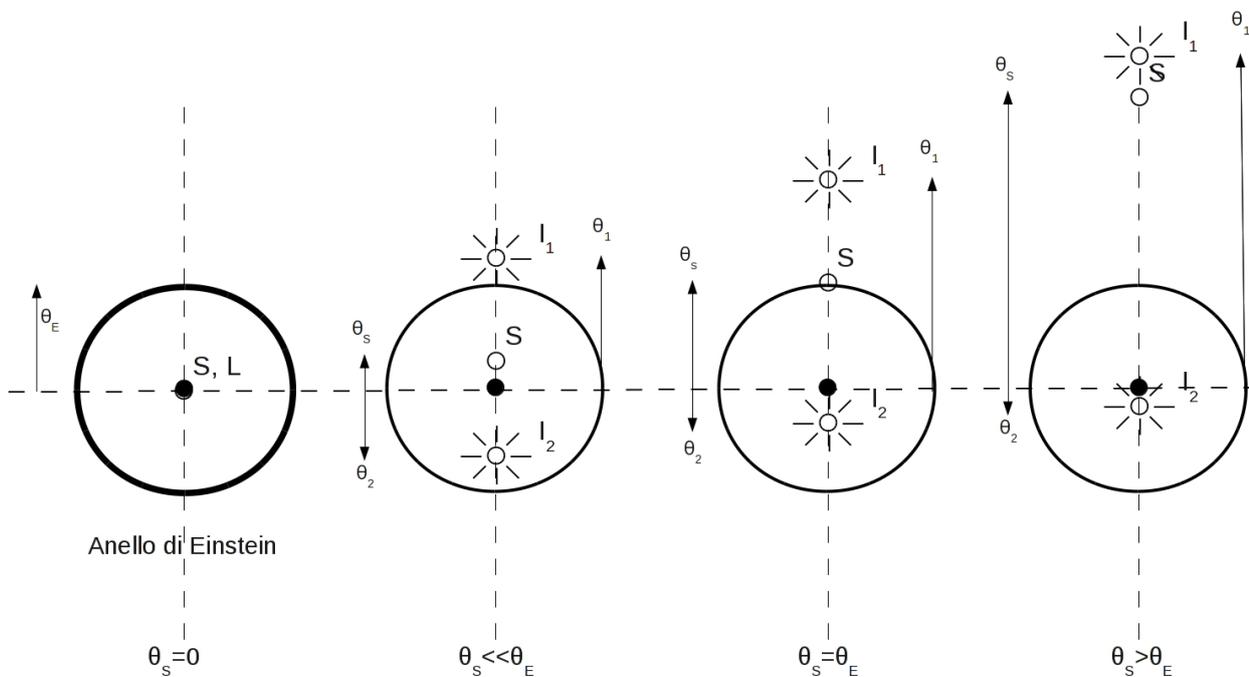
$$\theta_E = \left( \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \right)^{1/2} \quad (11)$$

mentre il raggio di Einstein è

$$R_E = \theta_E D_L = \left( \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \right)^{1/2} \quad (12)$$

Risolvendo l'equazione della lente si ottiene la distanza angolare delle immagini di una sorgente vista sotto un angolo  $\theta_S$ . La Figura 7 mostra in particolare la formazione delle immagini della sorgente nel caso di perfetto allineamento ( $\theta_S = 0$ ), quando  $\theta_S \ll \theta_E$ , se  $\theta_S = \theta_E$  e nel caso in cui  $\theta_S \gg \theta_E$ .

sorgente  $S$  è direttamente dietro alla lente  $L$  e la simmetria circolare del problema suggerisce che debba formarsi un anello luminoso centrato sulla lente e di raggio pari a  $\theta_E$ . In ogni altro caso, l'immagine della sorgente è duplicata nelle immagini  $I_1$  (primaria) e  $I_2$  (secondaria) con la particolarità che, al crescere del valore del parametro di impatto, l'immagine secondaria si avvicina alla lente mentre la primaria se ne allontana. Nel limite di grandi distanze  $\theta_S$ , ultimo pannello a destra, l'immagine  $I_1$  converge alla posizione della sorgente mentre la  $I_2$  si confonde con la lente diminuendo, come vedremo, la propria intensità luminosa. Per grandi valori del parametro d'impatto il fenomeno della lente gra-



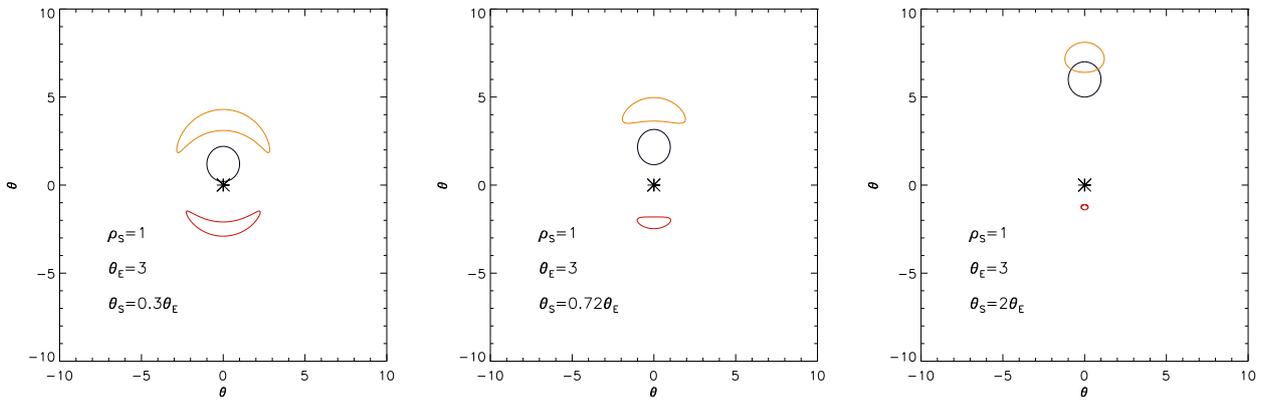
**Figura 7:** Posizioni angolari dell'immagine primaria ( $I_1$ ) e secondaria ( $I_2$ ) per quattro diversi valori del parametro di impatto  $\theta_S$ . Si è adottata l'ipotesi che la sorgente  $S$  sia puntiforme.

vitazionale cessa quindi di esistere e la stella si riosserverà nella sua posizione originaria.

Osservare le immagini multiple in un evento di microlente gravitazionale è però molto difficile anche con la strumentazione più moderna. Ad esempio, nel caso di quasi perfetto allineamento ( $\theta_S \ll \theta_E$ ), le due immagini si formano a  $\theta_1 \simeq \theta_E + \theta_S/2$  e  $\theta_2 \simeq -(\theta_E - \theta_S/2)$ , quindi la loro separazione angolare è  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \simeq 2\theta_E$ . Per una stella al centro della nostra Galassia distante circa 8000 parsec, che subisce l'effetto di lente ad opera di un oggetto della massa del Sole posto a metà strada lungo la direzione di vista, il raggio angolare di Einstein corrispondente è  $\simeq 0.001''$ : la distanza angolare tra le immagini è, quindi, molto al di sotto del potere risolutivo di HST. Come possiamo allora osservare un evento di micro-lente gravitazionale?

Le immagini multiple di una sorgente che subisce l'effetto di lente gravitazionale non appaiono in generale ugualmente brillanti e da esse riceviamo infatti flussi, o equivalentemente magnitudini, differenti. Queste differenze possono essere descritte in termini della *amplificazione* e del principio della conservazione dell'intensità specifica o brillantezza  $I$ . Questa quantità è definita come l'energia che attraversa una superficie  $dA$ , nell'intervallo di frequenze  $d\nu$ , nel tempo

$dt$  e nell'angolo solido  $d\omega$  attorno alla normale alla superficie. Infatti l'intensità specifica della radiazione si conserva in assenza di fenomeni come l'assorbimento, la diffusione interstellare o l'effetto di spostamento verso il rosso dovuto alla velocità relativa di allontanamento tra sorgente e osservatore. Questo è anche una conseguenza del teorema di Liouville che stabilisce che la densità di stati nello spazio delle fasi è conservata se le forze interagenti sono di tipo non collisionale. La gravità soddisfa a questo criterio giacché essa è debole, agisce su grandi distanze e lo spazio interstellare è, nella maggior parte dei casi, trasparente. Non deve quindi sorprendere che nella Teoria della Relatività Generale l'intensità specifica si conservi in presenza dell'effetto di lente gravitazionale. Le immagini di una sorgente non puntiforme che subisce l'effetto di lente possono essere amplificate o de-amplificate (si veda ad esempio la Figura 8). Se l'immagine è amplificata, essa sottende un angolo solido maggiore rispetto a quello sotteso dalla sorgente in assenza della lente. Poiché questa immagine possiede la stessa intensità specifica, potenza per steradiante, della sorgente, allora l'integrale sull'angolo solido è maggiore e l'osservatore misurerà un flusso più grande. Analogamente, se l'immagine è de-amplificata, il prodotto di un angolo solido

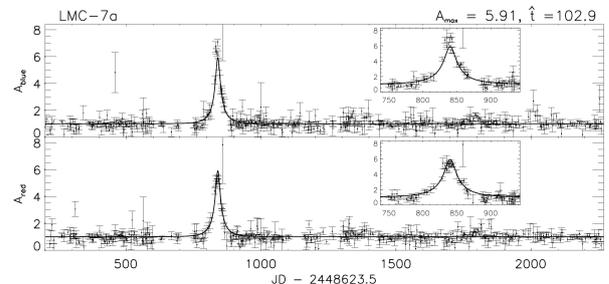


**Figura 8:** Come in Figura 7 ma con una trasformazione conforme del bordo di una sorgente estesa ad opera di una lente puntiforme. Ogni punto sul disco della sorgente di raggio  $\rho_S$ , in unità arbitrarie, si comporta come una sorgente puntiforme. Il cerchio nero rappresenta il disco della sorgente mentre gli archi rossi e gialli rappresentano le immagini, primarie e secondarie, deformate.

più piccolo per una intensità specifica invariata determina un flusso misurato minore di quello che si avrebbe nel caso della sorgente senza effetto di lente. Nell'approssimazione che considera le dimensioni finite della sorgente (di flusso  $F_S$ ), assumendo  $\theta_E \leq \theta_S$ , è possibile dimostrare che la amplificazione  $A$  di una immagine alla posizione angolare  $\theta$  è data da  $(1 - \theta_E^4/\theta^4)^{-1}$  in modo che il flusso osservato per l'immagine in questione sia  $F = AF_S$ . Man mano che il disco della sorgente si allontana dalla lente, i fattori di amplificazione, inizialmente grandi,  $A_1$  e  $A_2$  delle due immagini tendono a decrescere in magnitudine. In particolare, per  $\theta_S \gg \theta_E$ , la soluzione dell'equazione della lente dà per l'immagine  $I_1$  una posizione angolare  $\theta_1 \gg \theta_E$  ed una amplificazione  $A_1$  che si avvicina all'unità. Al contrario, l'amplificazione  $A_2$  della immagine  $I_2$  decresce verso lo zero.

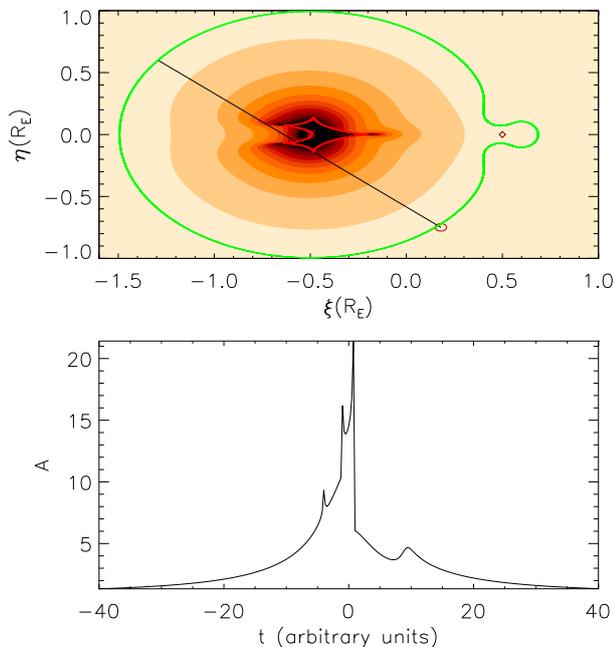
Come abbiamo già detto, le immagini multiple associate ad una micro-lente non sono, attualmente, risolvibili come immagini separate e, pertanto, l'osservatore vedrà una singola immagine costituita dalla sovrapposizione di quella primaria e secondaria. In questo caso, sommando le singole amplificazioni, si ottiene la forma classica del fattore di amplificazione, ovvero  $A = (u^2 + 2)/\sqrt{u^2(u^2 + 4)}$  dove  $u$  è il parametro di impatto adimensionale definito come  $u = \theta_S/\theta_E$ . Se la lente e la sorgente sono in moto relativo,  $u$  varia nel tempo e si ottiene la cosiddetta *curva di Paczyński*, la cui forma è evidenziata dal fit dei dati osservativi mostrati in Figura 9. In

generale, si definisce *caustica* il luogo geometrico dei punti del piano della lente in corrispondenza dei quali l'amplificazione diviene, in approssimazione di sorgente puntiforme, infinita. Nel caso di una lente singola la caustica corrisponde ad un punto coincidente con la posizione della lente, sicché il fattore di amplificazione diverge quando il parametro di impatto va a zero. Tuttavia, dato che le sorgenti reali non sono mai puntiformi, l'amplificazione che si osserva risulta sempre finita.



**Figura 9:** Una tipica curva di microlensing gravitazionale osservata in due bande fotometriche. La curva si riferisce ad un evento osservato dalla collaborazione MACHO [12] verso le Grandi Nubi di Magellano (LMC).

Osservando che circa il 50% delle stelle si trova in un sistema binario e che gli osservatori attuali stanno scoprendo migliaia di sistemi planetari, il *microlensing* può essere generalizzato considerando una lente doppia o, addirittura, multipla. In questo caso l'equazione della lente assume una forma più complicata rispetto al caso puntiforme ma può, in ogni caso, essere risolta con metodi



**Figura 10:** Mappa di amplificazione per un sistema binario caratterizzato da due oggetti separati da una distanza (proiettata nel piano del cielo)  $b = 1R_E$  e rapporto di massa  $q = 0.01$ . Il corpo di massa maggiore è rappresentato da un asterisco. Le curve chiuse verde e rossa rappresentano, rispettivamente, la curva critica e caustica che derivano dalla soluzione dell'equazione della lente. La linea nera rappresenta il percorso fatto da una sorgente di raggio  $\rho = 0.03R_E$ : per questa traiettoria si ha la tipica curva di luce (a più picchi) riportata nel pannello inferiore.

numerici in modo da ottenere una mappa di amplificazione in cui le curve caustiche assumono forme che dipendono dalla geometria esatta della lente. Nella Figura 10 presentiamo i risultati della una simulazione di una mappa di amplificazione per una lente costituita da un sistema binario con un rapporto di massa  $q = M_1/M_2 \simeq 0.01$ . Questo avviene nel caso in cui la componente primaria del sistema abbia massa solare, la secondaria è un pianeta gioviano. Nel pannello inferiore della figura è riportata la curva di luce per una traiettoria generica, linea nera, della sorgente. Per la scelta dei parametri che abbiamo fatto, la curva di luce risulta differente dalla tipica curva di Paczyński. Tuttavia per un sistema planetario, in cui tipicamente  $q \ll 1$ , la curva di luce associata all'evento si discosta poco dalla Kaczynski e il suo studio consente, a posteriori, di determinare i parametri del sistema lente.

Da quanto appena descritto, si comprende be-

### Profondità ottica

La profondità ottica del fenomeno di microlensing è data da  $\tau = \pi R_E^2 n_l D_s$  dove  $n_l$  è la densità numerica delle lenti lungo la direzione di vista della sorgente a distanza  $D_s$ . Un semplice calcolo della profondità ottica del lensing su una stella nel centro della Via Lattea implica che occorre osservare una stella per circa 10 milioni di anni perché essa subisca l'effetto di lente da un'altra stella. O, equivalentemente, bisogna osservare 10 milioni di stelle per un anno per avere la speranza di rivelare un singolo evento!

ne che il microlensing è un fenomeno raro. Infatti, affinché si possa avere una amplificazione sostanziale della luce, l'allineamento tra sorgente e lente deve essere pressoché perfetto, condizione che è raggiunta in un certo istante, ma ben presto persa<sup>2</sup> a causa del moto relativo tra le parti. D'altra parte, come anticipato, la probabilità dell'occorrenza di un evento è davvero estremamente piccola dal momento che la profondità ottica (vedi il riquadro apposito) del fenomeno di microlensing è estremamente bassa. Ne segue che un osservatore dovrebbe essere davvero molto fortunato per vedere un evento di questo tipo, ed i dubbi di Einstein esposti nella lettera del 1936 potrebbero essere, tutto sommato, condivisi.

Per fortuna, dagli anni '30 ad oggi la tecnologia ha fatto dei passi enormi mettendo a disposizione degli scienziati strumenti dapprima inimmaginabili. Con una CCD quasi commerciale e l'uso di un telescopio dedicato si possono osservare campi con milioni di stelle. Per ciascuna stella osservata, in maniera quasi automatica, si può estrarre la curva di luce e ricercare le caratteristiche tipiche di un evento di microlensing, ovvero una variazione della luminosità apparente della stella simmetrica rispetto al massimo centrale e l'acromaticità. In Figura 9, si riporta a titolo di esempio uno degli eventi di microlensing osservati negli anni passati verso le Grandi Nubi di Magellano.

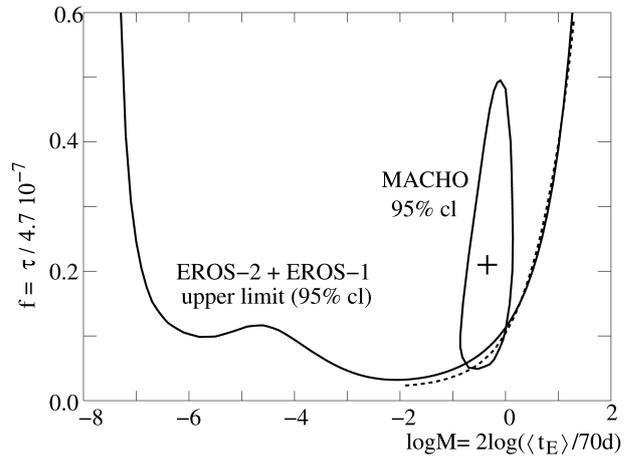
<sup>2</sup>Un evento di microlensing avviene in un tempo scala  $t_E \simeq R_E/V_{rel}$ , essendo  $V_{rel}$  la velocità relativa tra lente e sorgente rispetto alla linea di vista.

Come si accennava nell'Introduzione, c'è voluto quindi più di mezzo secolo, ma alla fine il lavoro teorico di Einstein sul *microlensing* gravitazionale si è trasformato in un campo di ricerca osservativa di grande successo smentendo clamorosamente le sue previsioni. Oggi si osservano e si studiano circa duemila eventi di *microlensing* all'anno, la maggior parte dei quali verso il nucleo della Via Lattea, ottenendo preziose informazioni sulla struttura della Galassia, la materia oscura barionica in forma di MACHOs, stelle variabili e binarie e sui pianeti extrasolari. In particolare, oltre dieci anni di osservazioni condotte verso le LMC e SMC da parte delle collaborazioni MACHO e EROS hanno consentito di ottenere il grafico mostrato in Figura 11. I risultati dei due esperimenti sono marginalmente compatibili e da essi si può estrapolare che  $\simeq 10\%$  della materia oscura galattica è in forma di MACHOs con massa  $\simeq 0.5 M_{\odot}$  lasciando ancora aperta la domanda sulla natura del restante  $\simeq 90\%$ .

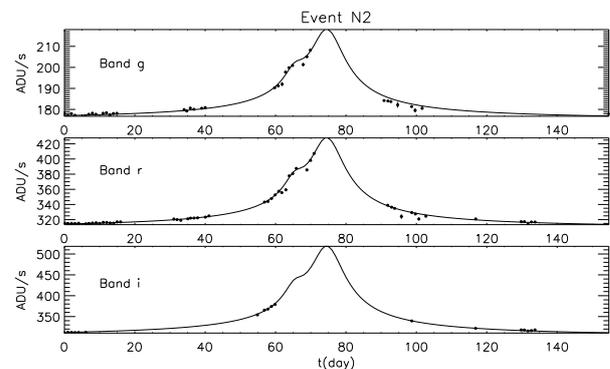
Inoltre, lo studio delle anomalie nelle curve di luce rispetto a quella prevista nel caso di lente singola, curva di Paczyński, consente di stimare i parametri, in particolare i rapporti di massa e le separazioni pianeta-stella, dei pianeti extrasolari eventualmente presenti attorno alla stella-lente. Questa tecnica, complementare alle altre usate per rivelare pianeti extrasolari, velocità radiali, transiti e direct-imaging, è ormai entrata nella fase di maturità ed è l'unica che consenta di studiare sistemi planetari a grandissima distanza dalla Terra con pianeti relativamente piccoli e nella zona abitabile della stella madre.

La tecnica del *microlensing* è così potente che ha permesso di scoprire quello che potrebbe essere il primo pianeta al di fuori della Via Lattea, nella galassia di Andromeda. Nel 2009 infatti, l'analisi dei dati dell'evento PA99-N2 osservato nel 1999 dalla Collaborazione franco-inglese POINT-AGAPE [13] ha permesso di concludere che l'anomalia osservata rispetto alla curva di Paczyński è compatibile con la presenza di un pianeta di circa cinque masse di Giove orbitante attorno alla stella lente nella Galassia di Andromeda (si veda la Figura 12).

Inoltre, le osservazioni di *microlensing* gravitazionale possono permettere di studiare le proprietà delle atmosfere delle stelle sorgenti attraverso l'osservazione di un caratteristico segnale



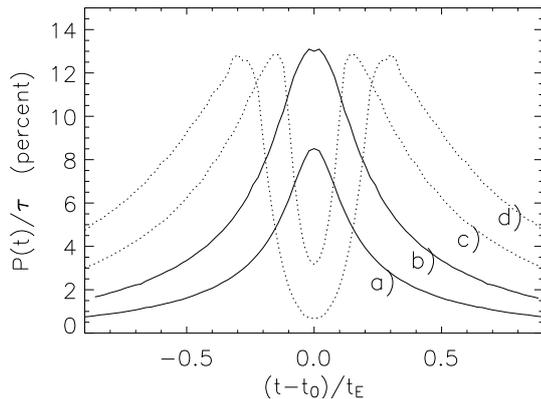
**Figura 11:** I risultati degli esperimenti MACHO e EROS. L'asse x mostra la massa del MACHO e l'asse y la frazione di materia oscura. La curva chiusa indica la misura di MACHO al livello di confidenza del 95% mentre quella aperta mostra la regione esclusa dalla collaborazione EROS. La figura è adattata da [14].



**Figura 12:** Curva di luce in tre bande dell'evento PA99-N2 osservato verso la Galassia di Andromeda.

di polarizzazione. Il fenomeno è causato dalle interazioni elastiche tra fotoni provenienti dalla stella sorgente ed elettroni, atomi e/o molecole, grani di polvere presenti, rispettivamente, nelle atmosfere delle stelle più calde, quelle di tipo A o B, di stelle di sequenza principale, F o G come il sole, e di stelle giganti rosse. Come è ben noto dallo studio delle onde elettromagnetiche, la luce presenta due stati di polarizzazione, definiamole destra e sinistra, tra di loro indipendenti. Il campo elettrico può oscillare lungo due arbitrarie direzioni perpendicolari. Nel caso delle stelle, quando, a causa della distanza, il disco stellare non è risolto cosicché le stelle appaiono puntiformi, l'intensità della luce con

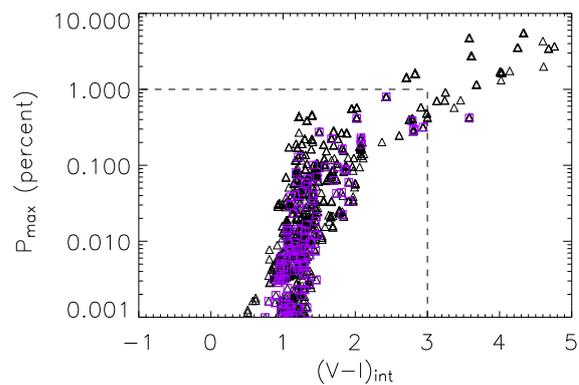
polarizzazione destra (*d*) e sinistra (*s*) è la stes-



**Figura 13:** Tipiche curve di polarizzazione per eventi del tipo *transit*, curve tratteggiate, e *bypass*, curve continue. Figura adattata da [16].

sa,  $P = (I_d - I_s)/(I_d + I_s) = 0$  e si dice che la luce non è polarizzata. Quando invece il disco stellare è risolto apparirà un segnale di polarizzazione, di intensità crescente dal centro al bordo del disco stellare. Il fenomeno è stato studiato per la prima volta da Chandrasekhar [15] per le stelle calde, che hanno un'atmosfera ionizzata contenente elettroni liberi, per le quali si è trovato che il massimo di polarizzazione atteso al bordo è pari al 12%. Per le stelle più fredde di sequenza principale e per le giganti rosse la polarizzazione massima attesa risulta invece minore (al massimo 1%).

Il fenomeno del *microlensing* potrebbe permettere di osservare la polarizzazione per stelle talmente lontane per le quali il disco non sia risolto ed in particolare per stelle che si trovano nel nucleo della galassia, a 8 kpc di distanza da noi. Infatti, durante un evento di *microlensing*, differenti parti del disco stellare sono amplificate diversamente in quanto la lente gravitazionale scansiona il disco della sorgente dando luogo ad una polarizzazione totale  $P$  differente da zero. Inoltre, a causa del moto relativo tra la lente e la sorgente, la polarizzazione attesa dipenderà anche dal tempo. L'effetto è particolarmente rilevante negli eventi di *microlensing* che abbiano: a) grande amplificazione, b) raggio della stella sorgente confrontabile con il parametro d'impatto della lente, c) stella sorgente del tipo gigante rossa, con temperatura superficiale relativamente bassa,  $T \leq 3000$  K, attorno alle quali è possibile la formazione di grani di polvere. L'intensità del



**Figura 14:** Distribuzione della polarizzazione massima in funzione del colore della sorgente ( $V - I$ ). Le linee tratteggiate indicano la regione degli eventi osservati dalla Collaborazione OGLE.

segnale di polarizzazione atteso dipende dalla profondità ottica  $\tau$  dei grani, e può raggiungere valori dell'ordine di 0.1% – 1%. Questo livello di polarizzazione è oggi misurabile con l'uso dei grandi telescopi dell'ESO operanti in Cile (per dettagli si veda [16]). In Figura 13 mostriamo alcune tipiche curve di polarizzazione in funzione del tempo per eventi del tipo *bypass* e del tipo *transit*, per i quali la traiettoria della lente si avvicina o attraversa, rispettivamente, la regione in cui si formano i grani. Nella Figura 14 è mostrata la distribuzione della polarizzazione massima in funzione del colore per gli eventi generati a partire da un catalogo sintetico di stelle.

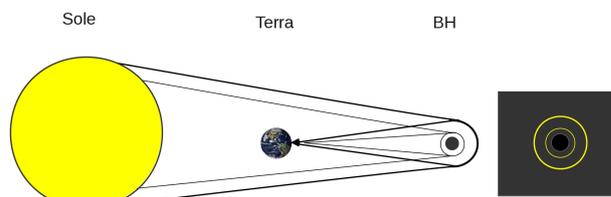
## Retrolensing: misurare le caratteristiche dei buchi neri

La domanda di base di chi è interessato a studiare i buchi neri (BHs) è innanzitutto quella di capire come si possa osservare qualcosa che non si può vedere direttamente, dato che la gravità in questi oggetti è così intensa che niente, neanche la luce, può uscirne. I buchi neri sono oggetti relativamente semplici dato che, come affermato dal cosiddetto *No Hair Theorem*, sono completamente descritti da soli tre parametri: massa, momento angolare e carica elettrica. In base ai diversi valori di momento angolare e carica elettrica che possono assumere, i buchi neri si possono classificare in

- *buco nero di Schwarzschild*: non rotante ed elettricamente neutro;
- *buco nero di Kerr*: rotante ed elettricamente neutro;
- *buco nero di Reissner-Nordström*: elettricamente carico e non rotante;
- *buco nero di Kerr-Newman*: rotante ed elettricamente carico.

Nonostante i BHs siano descritti da solo tre parametri, questi oggetti sono complicati da descrivere dal punto di vista matematico. Oggi sappiamo che i BHs si trovano nel centro della maggior parte delle galassie, attive e non, ed in molti sistemi binari che emettono nella banda dei raggi X. Inoltre, sono il motore dei *gamma-ray bursts* (GRBs) e giocano un ruolo essenziale nella comprensione dell'evoluzione stellare, della formazione ed evoluzione delle galassie, dei jets e, alla fine, della natura dello spazio e del tempo. Un obiettivo che gli astrofisici inseguono da lungo tempo è quello di osservare direttamente le immediate vicinanze di un buco nero con una risoluzione angolare almeno pari alla dimensione dell'orizzonte degli eventi. Questo tipo di osservazioni aprirebbe una nuova finestra nello studio dei campi gravitazionali intensi e, come vedremo alla fine di questo paragrafo, pensiamo di essere finalmente veramente vicini al raggiungimento di questo obiettivo.

Come fare a misurare massa, momento angolare e carica elettrica di un buco nero? Un'idea, peraltro densa di conseguenze interessanti, è contenuta nell'articolo [11] a cui si accennava nell'Introduzione. In questo lavoro Holz e Wheeler considerarono un fenomeno che era già noto potesse avvenire attorno ai BHs. Utilizzarono il Sole come sorgente di raggi luminosi ed un BH ad una certa distanza dal Sistema Solare. Come mostrato nella Figura 15, ci saranno alcuni fotoni che hanno il valore del parametro di impatto necessario per ruotare attorno al BH e ritornare verso la Terra. Altri fotoni, con un valore del parametro di impatto leggermente inferiore, possono addirittura fare due giri attorno al BH prima di dirigersi verso la Terra, e così via. Una serie di anelli concentrici dovrebbero apparire all'osservatore, nel caso in cui Sole, Terra e BH siano perfettamente allineati. I due autori di Ref. [11]

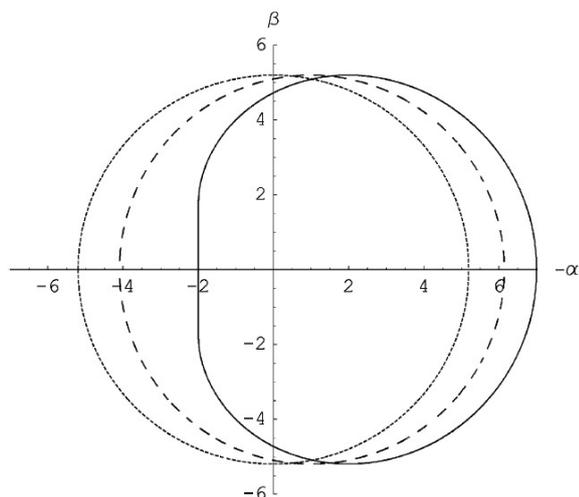


**Figura 15:** Retrolensing del Sole da parte di un buco nero visto dalla Terra. A destra la serie di anelli, per chiarezza ne sono mostrati solo due, attorno all'orizzonte del BH che un osservatore a Terra dovrebbe osservare.

suggerirono di effettuare una panoramica del cielo alla ricerca di anelli concentrici per scoprire BHs. Vi è un problema duplice perché l'idea possa funzionare: è improbabile che Sole, Terra e BH siano perfettamente allineati, ed in ogni caso la Terra si muove intorno al Sole così che l'allineamento può avvenire solo ad un certo istante, e, ancora più importante, la retro-immagine del Sole è così debole che, anche usando HST, solo un BH di massa maggiore di  $10 M_{\odot}$  entro 0.01 pc dalla Terra potrebbe essere osservato con la tecnica proposta.

Un approccio migliore per verificare l'idea di Holz e Wheeler è quello di considerare un sistema binario composto da una stella brillante, chiaramente maggiore è la brillantezza della sorgente maggiore è quella della retro-immagine, ed un BH massiccio. Alcuni di noi [17] proposero subito di considerare il *retrolensing* attorno al BH nel centro galattico. È noto infatti che al centro della nostra Galassia è ospitato un BH di massa ragguardevole, circa  $4.3 \times 10^6 M_{\odot}$ , individuato già oltre dieci anni fa dallo studio del movimento di alcune stelle brillanti che gli orbitano attorno. ed in particolare l'immagine di retro-lente della stella orbitante più vicina .

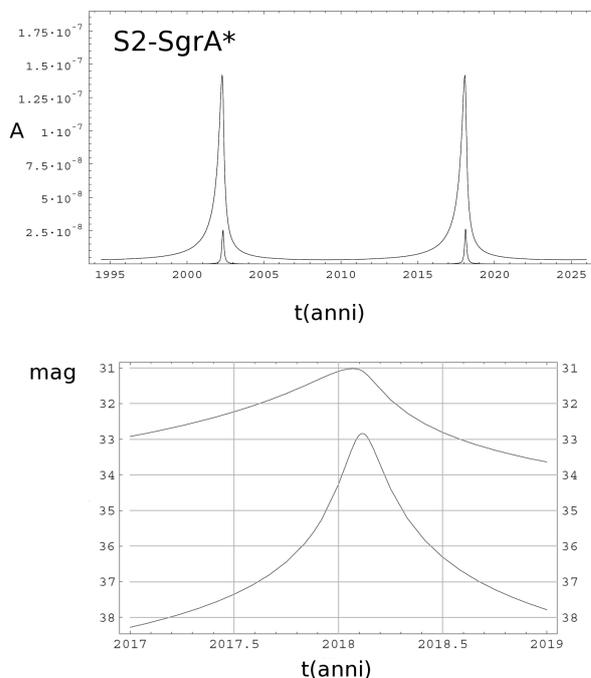
Un metodo per determinare massa e momento angolare di questo BH potrebbe essere quello di osservare il periastro o l'apoaastro di alcune delle stelle che gli orbitano attorno e misurarne lo spostamento nel tempo. Tuttavia è presente una complicazione in questo approccio dato che lo spostamento del periastro, e dell'apoaastro, delle orbite dipende non solo dai parametri del BH centrale ma anche, e soprattutto, da come le stelle presenti attorno al BH stesso sono distribuite, ed anche dalla distribuzione della materia oscura che verosimilmente costituisce una frazione



**Figura 16:** Forma delle immagini di retro-lensing di una sorgente da parte di un buco nero di Schwarzschild, cerchio punteggiato, di un buco nero rotante con parametro di spin  $a=0.5$ , curva tratteggiata, e di un buco nero massimamente rotante con  $a=1$ , curva continua. La linea di vista dell'osservatore è perpendicolare all'asse di rotazione del BH.

importante della massa della nostra Galassia. Si può comprendere la difficoltà della misura notando che la differenza tra lo spostamento del periastro per la stella S2 (la più vicina al BH al centro della nostra galassia) è di soli  $10 \mu\text{arcsec}$  per un BH di Schwarzschild o di Kerr con parametro di rotazione  $a = 1$ . Dunque, ammesso di riuscire a misurare lo spostamento del periastro delle stelle più vicine al BH centrale, non sarebbe verosimilmente possibile derivare quale sia il momento angolare del BH. Il nostro obiettivo potrebbe comunque essere raggiunto misurando lo spostamento del periastro di molte stelle che orbitano attorno al centro della Galassia cosa comunque tutt'altro che facile.

Un metodo alternativo per cercare di determinare i parametri del BH al centro galattico è quello di portare alle estreme conseguenze l'idea di Holz e Wheeler considerando l'effetto di *retro-lensing* causato dal BH su una stella brillante, ad esempio la stella S2, che gli orbita attorno. Sebbene il calcolo delle immagini di *retro-lensing* sia in generale complicato perché richiede di integrare le traiettorie seguite dalla luce, geodetiche nulle, con accuratezza elevatissima, è possibile fare il conto numericamente non solo nel caso di un BH di Schwarzschild ma anche nel caso di BH di Kerr



**Figura 17:** Pannello superiore: amplificazione in funzione del tempo per la prima (curva superiore) e seconda (curva inferiore) immagine di retro-lensing della stella S2 da parte del BH al centro galattico. Pannello inferiore: curva di luce della magnitudine in banda K delle due immagini di retro-lensing assunto un coefficiente di assorbimento interstellare standard verso il BH (Sgr A\*) al centro della Galassia. La curva superiore corrisponde alla immagine di retro-lensing piu' esterna e quella inferiore alla seconda immagine relativistica.

e di Reissner-Nordström. Quello che si ottiene, e che è stato discusso in diversi lavori, ad esempio in Ref. [18]), è che la forma dell'immagine di *retro-lensing* dipende dallo spin del BH, si veda la Figura 16<sup>3</sup> e quindi in linea di principio, un'osservazione sufficientemente precisa dell'immagine di *retro-lensing* di una stella potrebbe consentire di stimare inequivocabilmente i parametri del BH in Sgr A\*.

Possiamo veramente sperare di osservare queste immagini di *retro-lensing* verso Sgr A\*? Al contrario di quanto si potrebbe pensare non siamo poi così lontani da questo obiettivo. Il successore del telescopio HST, il James Webb Space Telescope (JWST), il cui lancio è previsto nel 2018, ha

<sup>3</sup>Si può dimostrare [19] che la forma dell'immagine dipende anche dalla carica elettrica del BH e diventa via via più piccola man mano che la carica elettrica aumenta.

la sensibilità per osservare l'immagine di *retrolensing* della stella S2 prodotta dal BH al centro galattico con un tempo di integrazione di una trentina di ore. In Figura 17 mostriamo i profili delle curve di amplificazione e magnitudine (in banda K) in funzione del tempo dell'immagine di *retrolensing* della stella S2 da parte del BH al centro galattico. Purtroppo, JWST non ha la risoluzione angolare necessaria per fornirci informazioni sulla forma dell'immagine di *retrolensing*. La risoluzione angolare giusta potrebbe essere ottenuta con i prossimi interferometri radio. Infatti, il diametro dell'immagine di *retrolensing* attorno al BH centrale dovrebbe essere di circa  $30 \mu\text{arcsec}$ . Nel 2008 Doeleman ed il suo gruppo, utilizzando interferometricamente diversi radiotelescopi con una linea di base di circa 4500 km, sono riusciti ad ottenere una risoluzione angolare di circa  $37 \mu\text{arcsec}$ , incredibilmente vicina a quella richiesta. I progressi in questo campo sono così rapidi che non è difficile pensare che in un futuro vicino lo scopo cercato possa essere finalmente raggiunto.



- [1] A. EINSTEIN: "On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light", *Annalen der Physik* **340** (1911) 898–908.
- [2] F.W. DYSON, A. EDDINGTON, C. DAVIDSON: "A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field from observations made at the total eclipse of May 29, 1919", *Phil Trans. Roy. Soc. A* **220** (1920) 291–333.
- [3] O. CHWOLSON: "Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne", *Astronomische Nachrichten* **221** (1924) 329–330.
- [4] F. ZWICKY: "Nebulae as Gravitational Lenses", *Physical Review* **51** (1937) 290–290.
- [5] B. PACZYNSKI: "Gravitational microlensing by the galactic halo", *Astrophysical Journal* **304** (1986) 1–5.
- [6] A. EINSTEIN: "Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field", *Science* **84** (1936) 506–507.
- [7] D. WALSH, R.F. CARSWELL, R.J. WEYMANN: "0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?", *Nature* **279** (1979) 381–384.

- [8] I. NEWTON: *Optics: a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflections and Colours of Light. Also Two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures..* Sam. Smith and Benj. Walford, London (1704).
- [9] A. EINSTEIN: "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *Ann. der Phys.* **49** (1916) 769–822.
- [10] G. INGROSSO, S. CALCHI NOVATI, F. DE PAOLIS, PH. JETZER, A. A. NUCITA, F. STRAFELLA: "Pixel lensing as a way to detect extrasolar planets in M31", *MNRAS* **399** (2009) 219–228.
- [11] D. E. HOLZ, J. A. WHEELER: "Retro-MACHOs:  $\pi$  in the Sky", *Astrophysical Journal* **57** (2002) 330–334.
- [12] C. ALCOCK ET AL.: "The Macho Project: microlensing results from 5.7 years of large magellanic cloud observations", *Astrophysical Journal* **542** (2000) 281–307.
- [13] J.H. AN ET AL.: "The Anomaly in the Candidate Microlensing Event PA-99-N2", *Astrophysical Journal* **601** (2004) 845–857.
- [14] P. TISSERAND ET AL.: "Limits on the Macho content of the galactic halo from the EROS-2 survey of the Magellanic Clouds", *Astronomy & Astrophysics* **469** (2007) 387–407.
- [15] S. CHANDRASEKHAR: *Radiative Transfer*. Clarendon Press, Oxford (1950).
- [16] G. INGROSSO, S. CALCHI NOVATI, F. DE PAOLIS, PH. JETZER, A.A. NUCITA, F. STRAFELLA: "Measuring polarization in microlensing events", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **446** (2015) 1090–1097.
- [17] F. DE PAOLIS, A. GERALICO, G. INGROSSO, A. A. NUCITA: "The black hole at the galactic center as a possible retro-lens for the S2 orbiting star", *Astron. Astrophys.* **409** (2003) 809–812.
- [18] F. DE PAOLIS, G. INGROSSO, A. A. NUCITA, A. QADIR, A. F. ZAKHAROV: "Estimating the parameters of the Sgr A\* black hole", *Gen. Rel. Gravit.* **43** (2011) 977–988.
- [19] A. F. ZAKHAROV, F. DE PAOLIS, G. INGROSSO, A.A. NUCITA: "Direct measurements of black hole charge with future astrometrical missions", *Astronomy & Astrophysics* **442** (2005) 795–799.



## Note biografiche

Gli autori sono componenti del gruppo di Astrofisica del Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" dell'Università del Salento e si occupano sia di analisi di grandi moli di dati che di problematiche legate all'astrofisica teorica.

