

---

# Calcolo delle Variazioni e segmentazione di immagini

*In sintesi, credo che il Calcolo delle Variazioni sia un settore molto vasto e variegato [...]; esso costituisce un'ottima "palestra" per capire quali sono le radici etiche e culturali del metodo scientifico.*

**Ennio De Giorgi**

**Michele Carriero**

*Dipartimento di Matematica e Fisica "E. De Giorgi" - Università del Salento*

**Antonio Leaci**

*Dipartimento di Matematica e Fisica "E. De Giorgi" - Università del Salento*

**Franco Tomarelli**

*Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano*

---

**I**n questa presentazione esponiamo alcuni problemi con discontinuità libere relativi alla segmentazione d'immagini, introducendo in particolare lo studio, dal punto di vista analitico e numerico, dei funzionali di Mumford & Shah e di Blake & Zisserman.

Il Calcolo delle Variazioni è l'ambito in cui problemi di minimo o di massimo e nozioni di equilibrio energetico trovano un linguaggio preciso e formalizzazioni per mezzo di principi variazionali.

La segmentazione di immagini è un problema rilevante sia nella elaborazione di immagini digitali che nella comprensione della visione biologica.

Qui presentiamo una breve rassegna di risulta-

ti recenti che sono collegati sia alla formulazione e alla sperimentazione di algoritmi per la segmentazione automatica di immagini digitali, sia alla comprensione della percezione visiva. Per un'ampia descrizione rinviamo al volume [1].

Una immagine digitale (che potremmo chiamare "discreta") proviene da un contesto continuo, attraverso un processo di campionamento spaziale e di quantizzazione della luminosità. In pratica l'immagine reale (analogica) è suddivisa in piccoli rettangoli (i *pixels*), a ciascuno dei quali è assegnato un numero (o tre numeri, per le immagini a colori) ottenuto utilizzando la media della luminosità nel rettangolo.

A partire dalla metà degli anni '80, nella elaborazione d'immagini sono stati utilizzati il Calcolo delle Variazioni e le Equazioni alle Derivate Parziali, settori della matematica già ben consolidati

## La misura di Hausdorff unidimensionale

La definizione formale è la seguente: per ogni sottoinsieme  $K$  di  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathcal{H}^1(K) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(K) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(K)$$

(possibilmente anche  $+\infty$ ) dove

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(K) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam} B_i ; K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \text{diam} B_i < \varepsilon \right\}$$

È possibile definire le misure di Hausdorff  $\mathcal{H}^s$   $s$ -dimensionali per ogni numero reale  $s$  con  $0 \leq s \leq 2$ , inserendo nella serie il termine  $c_s(\text{diam} B_i)^s$ . Queste misure intervengono nella teoria degli insiemi "frattali". Per  $s = 0$  si ottiene la misura che conta i punti, per  $s = 2$  si ottiene l'usuale misura di Lebesgue nel piano:  $\mathcal{H}^2(K) = \text{meas}(K)$ .

per lo studio del mondo fisico. In questo contesto sia l'immagine sia la sua elaborazione sono definite in ogni punto del dominio. Una volta formulato e risolto un problema di elaborazione d'immagini nel modello continuo, la soluzione è solitamente approssimata con metodi numerici, che ci forniscono un'immagine "digitale".

La descrizione si rivolge anche ai non specialisti nel Calcolo delle Variazioni; per questo tralasciamo l'analisi in un contesto più generale e ci limitiamo a casi modello: talvolta, al fine di semplificare l'esposizione, i risultati sono espressi con ipotesi che non sono minimali.

Esistono molti modi diversi per definire gli obiettivi della segmentazione e non vi è alcuna nozione universalmente accettata: questa esposizione è limitata ad alcuni modelli di decomposizione di una immagine, in cui è assegnata una funzione che descrive l'intensità del segnale associata a ciascun punto (tipicamente l'intensità della luce su uno schermo). In parole semplici, la segmentazione di una immagine consiste nella scomposizione dell'immagine per evidenziarne le linee di maggiore discontinuità dell'intensità luminosa.

La segmentazione può essere ottenuta mediante diverse tecniche (cfr. [1], [2]). Noi descriviamo alcuni approcci basati su un principio variazionale: la minimizzazione di una opportuna energia. Evidenziamo che le funzioni che descrivono l'intensità della luce in segmentazioni ammissibili possono presentare discontinuità.

Questi modelli di segmentazione sono utili nella descrizione della visione, e sono in grado di fornire anche utili indicazioni su questioni rilevanti per la fisiologia della visione. Per esempio, questi modelli possono aiutare nella comprensione di come l'enorme quantità di dati contenuti in una singola immagine possa essere ridotta e rapidamente trasformata, preservandone la geometria essenziale che è fondamentale per l'interpretazione dell'immagine stessa.

Le formalizzazioni variazionali dei modelli per la segmentazione forniscono una più profonda comprensione dell'analisi di una immagine, producono questioni matematiche interessanti (alcune ancora aperte) la cui soluzione, con le stime globali che ne derivano, contribuisce ad una migliore interpretazione della percezione visiva.

Questi modelli si inquadrano nell'ampia classe dei problemi con discontinuità libere, introdotta da Ennio De Giorgi ([3]). In questo ambito, strumenti moderni di teoria geometrica della misura, recenti sviluppi sulle superficie minime e sulla regolarità delle estremali in Calcolo delle Variazioni, consentono lo studio di problemi di minimo per funzionali in cui sono presenti sia termini di massa sia termini di superficie (di linea, nel caso bidimensionale): in tale contesto sono ammissibili funzioni discontinue (in senso matematico), e talvolta le loro discontinuità sono proprio le caratteristiche principali della soluzione.

Qui delineiamo le principali proprietà di due

modelli variazionali noti in letteratura come modello di Mumford & Shah (cfr. [4]) e modello di Blake & Zisserman (cfr. [5]). Questi approcci bilanciano simultaneamente la regolarizzazione del segnale e la lunghezza della segmentazione; spesso questi modelli sono più accurati nel rilevare le discontinuità, rispetto ad altre tecniche di filtraggio.

Limitiamo la nostra discussione a immagini bidimensionali monocromatiche. Per le immagini a colori rimandiamo all'analisi di segnali a valori vettoriali ([6]).

## Il funzionale di Mumford & Shah

Dato un aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , consideriamo il seguente funzionale, introdotto in [4] da Mumford & Shah,

$$\begin{aligned} \mathcal{MS}(K, u) := & \iint_{\Omega \setminus K} (\|Du\|^2 + \mu|u - g|^2) dx_1 dx_2 \\ & + \alpha \text{length}(K \cap \Omega) \end{aligned} \quad (1)$$

dove  $K \subset \mathbb{R}^2$  è l'unione di una famiglia di curve (*a priori* incognite),  $x = (x_1, x_2)$  indica un punto in  $\Omega$ ,  $\text{length}(K \cap \Omega)$  indica la somma delle lunghezze di queste curve e  $u$  è una funzione scalare differenziabile in  $\Omega \setminus K$ ;  $\|Du\|$  denota la norma euclidea del gradiente  $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$  di  $u$ . Il dato  $g$  è una funzione limitata definita su  $\Omega$ . Chiariamo nel successivo riquadro il termine lunghezza (totale), richiamando la definizione della **misura di Hausdorff unidimensionale**  $\mathcal{H}^1$ : in questo modo il funzionale  $\mathcal{MS}$  ha senso per ogni insieme chiuso  $K \subset \bar{\Omega}$ .

Vogliamo minimizzare il funzionale  $\mathcal{MS}$  sulla classe di tutte le coppie ammissibili  $(K, u)$ , con  $K$  chiuso e  $u$  regolare su  $\Omega \setminus K$ . Nel seguito chiameremo **segmentazione ottimale** ogni  $K$  che corrisponde ad un minimo di  $\mathcal{MS}$  e **immagine segmentata** la funzione correlata  $u$ .

Il funzionale  $\mathcal{MS}$  è stato introdotto nell'ambito della computer vision in [4]. L'insieme  $\Omega$  rappresenta lo schermo, il dato  $g$  è un'immagine digitale. Più precisamente, in tale contesto,  $g$  è l'immagine in ingresso e  $g(x_1, x_2)$  descrive il livello di intensità della luce nel punto  $(x_1, x_2) \in \Omega$ . Nella minimizzazione del funzionale  $\mathcal{MS}$ , l'immagine in ingresso (input)  $g$  si trasforma in una

immagine in uscita (output)  $u$  regolare fuori dell'insieme incognito  $K$ : il funzionale  $\mathcal{MS}$  penalizza grandi insiemi  $K$  e, al di fuori della loro unione, si richiede che la funzione  $u$  sia regolare (*denoised*) e "vicina" al dato  $g$ . Il primo termine forza  $u$  ad essere il più regolare possibile in un aperto di  $\Omega$ , il secondo termine impone una penalizzazione (in norma  $L^2(\Omega)$ ) per la deviazione di  $u$  da  $g$ , il terzo termine impedisce che l'insieme singolare  $K$  sia troppo lungo.

La scelta dei due parametri  $\mu$  e  $\alpha$  corrisponde a fissare soglie di scala e di contrasto. Più precisamente la sensibilità al contrasto è di  $(4\alpha^2\mu)^{1/4}$ , la scala è di  $\mu^{-1/2}$ , il limite di pendenza è di  $(\alpha^2\mu/4)^{1/4}$  (valori di pendenza sopra questa soglia vengono recuperati in modo non corretto introducendo una discontinuità artificiale) la resistenza al rumore è  $\alpha\mu$  ([5]).

La difficoltà principale per minimizzare il funzionale  $\mathcal{MS}$  è dovuta alla presenza dell'insieme incognito  $K$ . Se l'insieme chiuso  $K$  fosse assegnato, allora la funzione  $u$  per la quale  $\mathcal{MS}$  raggiunge il suo minimo, sarebbe l'unica soluzione  $u(K)$  del seguente problema di Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu(u - g) = 0 & \text{in } \Omega \setminus K \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \cup K \end{cases} \quad (2)$$

dove  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  è l'operatore di Laplace di  $u$ ,  $\partial\Omega$  è la frontiera di  $\Omega$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}$  è la derivata normale di  $u$ . Pertanto potremmo porre  $\mathcal{MS}(K) = \mathcal{MS}(K, u(K))$ , sicché il funzionale dipenderebbe dal solo insieme chiuso  $K$ .

D'altra parte, possiamo supporre  $\text{meas}(K) = 0$ , altrimenti  $\mathcal{MS}(K, u) = +\infty$ . In questo caso la funzione  $u$  è definita quasi ovunque in  $\Omega$  e  $K$  contiene l'insieme di discontinuità  $K(u)$  di  $u$ , quindi  $u$  è l'unica variabile significativa e  $\mathcal{MS}(u) = \mathcal{MS}(K(u), u)$ : in questo approccio l'insieme  $K(u)$  non è necessariamente chiuso.

Questa seconda strategia, proposta da De Giorgi ([3]) è molto generale, e ha portato a molti risultati ([7], [8]), le cui dimostrazioni sono alquanto tecniche e la loro descrizione va oltre gli scopi di questa esposizione. Tuttavia, per una migliore comprensione, alcune definizioni e nozioni basilari sono richiamate nell'ultima sezione nell'ambito dei problemi con discontinuità

## La $\Gamma$ -convergenza

Per chiarire la convergenza di tipo variazionale di  $\mathcal{MS}_\varepsilon$  ricordiamo la nozione di  $\Gamma$ -convergenza introdotta da Ennio De Giorgi (cfr. [11]): dato uno spazio metrico  $V$  e i funzionali

$$F_\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \varepsilon > 0$$

diciamo che  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge a un funzionale  $F$  definito su  $V$  se, per ogni  $v \in V$ :

$$\forall(v_\varepsilon) : v_\varepsilon \rightarrow v \implies F(v) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon)$$

$$\exists(v_\varepsilon) : v_\varepsilon \rightarrow v \text{ tale che } F(v) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon)$$

La principale proprietà della  $\Gamma$ -convergenza è la seguente:

se  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge a  $F$ ,  $v_\varepsilon$  sono minimizzanti di  $F_\varepsilon$  e  $v_\varepsilon \rightarrow v$  allora, sotto ipotesi generali sui funzionali  $F_\varepsilon$ ,  $v$  è un punto di minimo di  $F$  e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(v_\varepsilon) = F(v)$ .

libere.

Va osservato che non ci si può aspettare l'unicità, considerata la dipendenza della segmentazione ottimale dai parametri  $\mu$  e  $\alpha$ . Quando il parametro  $\alpha$  è molto grande, allora la segmentazione ottimale  $K$  risulta essere vuota. D'altra parte, se  $\alpha$  è molto piccola c'è un ampio insieme singolare  $K$ , a meno che non siamo in un caso banale ( $g$  costante). Un argomento di continuità mostra che possiamo trovare un valore limite di  $\alpha$  che implica l'esistenza di una segmentazione ottimale  $K$  non vuota e allo stesso tempo mantiene anche l'insieme vuoto come segmentazione ottimale.

### Proprietà dei minimi di $\mathcal{MS}$

Il seguente teorema di esistenza è stato dimostrato in [8], [9].

**Teorema (Esistenza di soluzioni).** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto. Poniamo*

$$\begin{cases} \mu > 0, \alpha > 0, \Omega \text{ limitato,} \\ g \text{ limitata e misurabile in } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

*Allora esiste almeno una coppia tra i sottoinsiemi chiusi  $K$  di  $\mathbb{R}^2$  e  $u \in C^1(\Omega \setminus K)$ , che minimizza il funzionale  $\mathcal{MS}$  con energia finita. Inoltre  $\sup |u| \leq \sup |g|$  e l'insieme  $K \cap \Omega$  è l'unione (al più numerabile) di archi regolari.*

La dimostrazione del teorema, come già detto, è piuttosto lunga e tecnica ed è stata ottenuta con

i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni. Una versione debole del problema di minimo posto, precisamente la minimizzazione del funzionale  $\mathcal{F}$  che dipende solo da  $u$  (per la definizione di  $\mathcal{F}$  rinviamo all'ultima sezione), è risolta dimostrando semicontinuità inferiore e compattezza nello spazio funzionale delle immagini con energia finita ([10]). Successivamente, provando la maggiore regolarità dei minimi deboli (concetto opportunamente affinato al fine di essere "essenziale") otteniamo una soluzione del problema iniziale ([8], [9]).

Per descrivere le proprietà di una segmentazione ottimale  $K$  usiamo la seguente notazione: per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$  e per ogni numero reale  $r > 0$  indichiamo con  $B_r(x)$  il disco di centro  $x$  e raggio  $r$ , ovvero

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\| < r\}$$

Se  $(K, u)$  è una coppia minimizzante per  $\mathcal{MS}$ , allora possiamo aggiungere a  $K$  ogni insieme chiuso con lunghezza nulla ottenendo una nuova coppia ottimale  $(K', u)$ . Per questo motivo è utile introdurre la nozione di **coppia minimizzate essenziale** che ha la proprietà seguente:  $\mathcal{H}^1(K \cap B_r(x)) > 0$  per ogni  $x \in K$  e  $B_r(x) \subset \Omega$ .

Le quattro proposizioni che seguono, relative a una coppia essenziale minimizzante  $(K, u)$ , possono essere dimostrate con l'ipotesi (3) ([2]). Per semplicità consideriamo  $|g(x_1, x_2)| \leq 1$ . Con il termine *densità media* intendiamo il rapporto

tra la misura della parte di insieme singolare all'interno di un disco e il raggio del disco.

**Limitazione dall'alto per la densità media**

Per ogni  $x \in \Omega$ , per ogni  $0 < r \leq 1$ , con  $B_r(x) \subset \Omega$ , risulta

$$\mathcal{H}^1(K \cap B_r(x)) \leq \left(2 + \frac{\mu}{\alpha}\right) \pi r$$

**Limitazione dal basso per la densità media.**

Esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x \in K$ , per ogni  $0 < r \leq 1$  con  $B_r(x) \subset \Omega$  risulta

$$\mathcal{H}^1(K \cap B_r(x)) \geq \delta r$$

**Proprietà di concentrazione uniforme.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta(\varepsilon) > 0$  tale che per ogni  $x \in K$ , per ogni  $R \leq 1$  con  $B_R(x) \subset \Omega$ , esiste  $B_r(y) \subset B_R(x)$  con  $r \geq \delta(\varepsilon)R$  e

$$\mathcal{H}^1(K \cap B_r(y)) \geq (2 - \varepsilon)r$$

Le precedenti proprietà esprimono il fatto che un algoritmo idoneo può eliminare le parti di  $K$  che sono essenzialmente isolate, dal momento che la teoria garantisce che con questa eliminazione la segmentazione migliora, nel senso (variazionale) che il valore del funzionale  $\mathcal{MS}$  diminuisce.

**Contenuto di Minkowski della segmentazione.** Per ogni aperto  $\Omega' \subset\subset \Omega$  vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\{x \in \Omega'; d(x, K \cap \Omega') < r\}|}{2r} = \mathcal{H}^1(K \cap \Omega')$$

La precedente uguaglianza esprime la relazione tra la misura di Hausdorff e il **contenuto di Minkowski** di  $K$ . Questa è una informazione utile per le applicazioni; permette, ad esempio, di utilizzare lo schema di approssimazione introdotto in [12] che produce gli algoritmi sviluppati successivamente.

**Approssimazione variazionale di  $\mathcal{MS}$**

Minimizzare  $\mathcal{MS}$  è abbastanza difficile a causa della difficoltà dovuta alla presenza dell'insieme di discontinuità libera  $K$ . Dal momento che  $K$  è incognito, è stato necessario sviluppare nuovi metodi per trovare soluzioni numeriche.

Il primo approccio alla minimizzazione numerica di  $\mathcal{MS}$  fu proposto e attuato da Blake & Zisserman nel libro [5]: "the Graduated

Non-Convexity algorithm", che corrisponde ad un rilassamento della parte non-convessa del funzionale.

Qui descriviamo un altro metodo, proposto in [12] e implementato numericamente in [13] e in [14].

L'idea principale di questo metodo consiste nell'introdurre una funzione ausiliaria  $z$ , che assume valori prossimi a 1 lontano da  $K$  e valori prossimi a 0 vicino a  $K$ . Consideriamo, allora, i seguenti funzionali dipendenti da una coppia di funzioni (funzionali più gestibili, dal punto di vista numerico, di quanto lo sia  $\mathcal{MS}$ ): con  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{MS}_\varepsilon(z, u) = & \iint_{\Omega} (z^2 \|Du\|^2 + \mu|u - g|^2) dx_1 dx_2 \\ & + \alpha \iint_{\Omega} \left( \varepsilon \|Dz\|^2 + \frac{(z - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{4}$$

L'ultimo addendo forza  $z$  a essere quasi ovunque uguale a 1, mentre il secondo integrale approssima la lunghezza di  $K$  nella minimizzazione di  $\mathcal{MS}_\varepsilon$ , per  $\varepsilon$  che tende a 0.

Presi  $V = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $F_\varepsilon(z, u) = \mathcal{MS}_\varepsilon(z, u)$  e

$$F(z, u) = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{se } z = 1 \text{ q.o. in } \Omega \\ +\infty & \text{altrove} \end{cases}$$

dove  $\mathcal{F}$  è una versione debole del funzionale  $\mathcal{MS}$  (vedi ultima sezione), sussiste il seguente risultato [12].

**Teorema.** Poniamo (3). Allora i funzionali  $\mathcal{MS}_\varepsilon$   $\Gamma$ -convergono a  $F$  per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Eseguendo variazioni regolari e con supporto compatto in un intorno di una coppia minimizzante  $(z, u)$  del funzionale  $\mathcal{MS}_\varepsilon$  troviamo le equazioni di Eulero in  $\Omega$

$$\begin{cases} z^2 \Delta u + 2z Dz \cdot Du = \mu(u - g) \\ \Delta z = \frac{z - 1}{4\varepsilon^2} + \frac{z}{\varepsilon\alpha} \|Du\|^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0, \quad \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Questo sistema ora può essere risolto numericamente con schemi alle differenze finite (vedi [13], [14]).

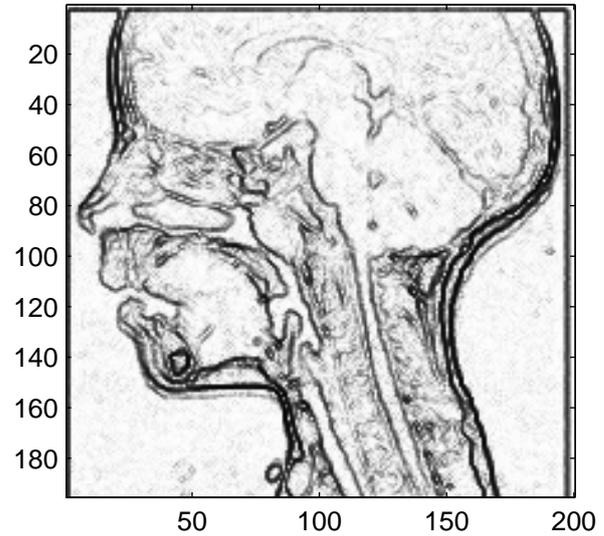
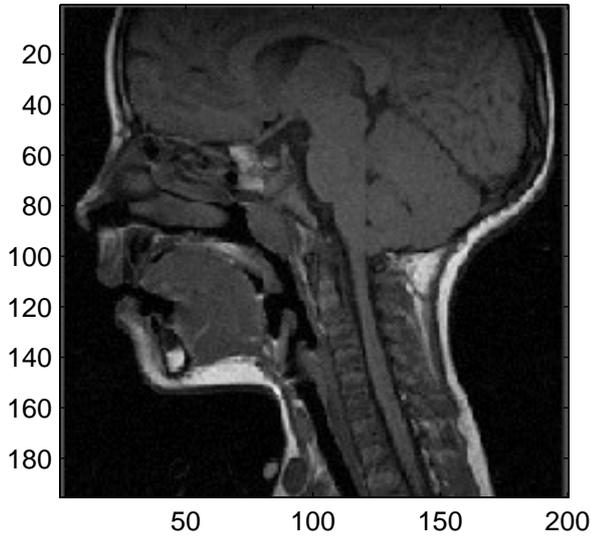


Figura 1: Segmentazione di una immagine ottenuta utilizzando il funzionale  $\mathcal{MS}$

### Equazioni di Eulero per $\mathcal{MS}$ , regolarità dell'insieme singolare ottimale e una congettura di E. De Giorgi

Oltre a (2), ulteriori condizioni di Eulero sono state ottenute per i minimi di  $\mathcal{MS}$  ([4], [15]).

**Curvatura di  $K$  e salto del gradiente al quadrato.** Sia  $(K, u)$  un minimo di  $\mathcal{MS}$  in  $\Omega$ ,  $g \in C^1(\Omega)$  e  $B \subset \Omega$  un disco aperto tale che  $K \cap B$  è il grafico di una funzione  $C^2$  e sia  $B_+$  (risp.  $B_-$ ) l'epigrafico (risp. sottografico) aperto connesso di tale funzione in  $B$ . Posto  $u \in C^1(\overline{B_+}) \cap C^1(\overline{B_-})$ , risulta

$$\llbracket \|Du\|^2 + \mu|u-g|^2 \rrbracket = \alpha \text{curv}(K) \quad \text{su } K \cap B$$

dove  $\llbracket \cdot \rrbracket$  denota la differenza delle tracce su  $B_+$  e  $B_-$ , e  $\text{curv}$  è la curvatura valutata orientando la curva con la normale che punta verso  $B_+$ .

Il seguente enunciato relativo a una **Congettura di Mumford & Shah ([4])** sulla regolarità dell'insieme singolare ottimale per  $\mathcal{MS}$  non è stato ancora completamente dimostrato:

Sia  $(K, u)$  una coppia essenziale minimizzante  $\mathcal{MS}$ , allora  $K$  è localmente in  $\Omega$  l'unione di un numero finito di archi  $C^{1,1}$ .

Ulteriori proprietà geometriche dei punti terminali di una segmentazione ottimale sono state studiate ([4], [15]): le condizioni ottenute avevano suggerito la seguente congettura (per ora parzialmente dimostrata, vedi [16])

#### Congettura (De Giorgi [3])

L'unica minimizzante locale non costante della parte principale del funzionale  $\mathcal{MS}$  è la coppia  $(K, u)$ , con

$K = \{(x_1, 0); x_1 \leq 0\}$  e la funzione  $u$ , espressa in coordinate polari, data da

$$u(\rho, \theta) = \sqrt{\frac{2\alpha\rho}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad \rho \geq 0, -\pi < \theta < \pi \quad (5)$$

(a meno del segno, di moti rigidi in  $\mathbb{R}^2$  e di costanti additive).

### Il funzionale di Blake & Zisserman

Lo studio di funzionali da minimizzare dipendenti da una energia di massa del secondo ordine e una discontinuità (incognita) di superficie (di linea, nel caso bidimensionale) ha attirato l'interesse in relazione a problemi di teoria della frattura, partizioni ottimali, piastre elasto-plastiche ([17]) e nella segmentazione di immagini.

Consideriamo ora il funzionale dipendente dalle derivate del secondo ordine ([5], [18])

$$\begin{aligned} \mathcal{BZ}(K_0, K_1, u) := & \iint_{\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)} (\|D^2u\|^2 + \mu|u-g|^2) dx_1 dx_2 \\ & + \alpha \text{length}(K_0 \cap \Omega) \\ & + \beta \text{length}((K_1 \setminus K_0) \cap \Omega) \end{aligned} \quad (6)$$

dove  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è un aperto limitato e  $\|D^2u\|$  denota la norma euclidea della matrice Hessiana  $D^2u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2}$  di  $u$ . I numeri reali positivi  $\alpha, \beta, \mu$  e la funzione limitata  $g$  sono assegnati, mentre  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^2$  sono insiemi chiusi e  $u$  è

una funzione tale che  $u \in C^2(\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)) \cap C^0(\Omega \setminus K_0)$ .

Gli insiemi chiusi  $K_0, K_1$  e la funzione  $u$  sono le incognite da trovare come minimi di (6) tra tutte le possibili terne ammissibili.

Il funzionale  $\mathcal{BZ}$  stima il grado di corrispondenza tra l'immagine  $g$  e una sua immagine segmentata  $u$ ;  $K_0 \cup K_1$  è la relativa segmentazione. Tale funzionale è stato introdotto da Blake & Zisserman (cfr. [5]) come una forma di energia da minimizzare per realizzare una segmentazione ottimale di un'immagine monocromatica.

La dipendenza dalle derivate seconde  $D^2u$  (invece che dalle derivate prime  $Du$ , come nel funzionale di Mumford-Shah) consente di rilevare anche l'insieme delle pieghe. Inoltre questo funzionale evita l'inconveniente dell'effetto rampa causato dalla sovra-segmentazione dei salti (che è la comparsa di una o più discontinuità spurie nell'immagine di output  $u$ , manifestate invece dal funzionale  $\mathcal{MS}$ , quando il dato  $g$  ha una pendenza abbastanza ripida).

Le discontinuità di  $u$  e di  $Du$  si evidenziano rispettivamente con gli insiemi  $K_0, K_1$  che sono "a priori" incogniti; per questo il problema di minimo associato risulta essere essenzialmente non-convesso, e per alcuni dati  $g$  può dar luogo a non unicità dei minimi. Un'altra difficoltà nell'analisi matematica del funzionale  $\mathcal{BZ}$  è il fatto che (6) non controlla le derivate prime, e inoltre il troncamento delle funzioni in competizione non riduce l'energia, mentre nel caso del funzionale  $\mathcal{MS}$  il troncamento riduce l'energia.

### Proprietà dei minimi di $\mathcal{BZ}$

In [18] è stato dimostrato il seguente risultato.

**Teorema (Esistenza di soluzioni).** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto. Poniamo*

$$\begin{cases} \mu > 0, 0 < \beta \leq \alpha \leq 2\beta, \Omega \text{ limitato,} \\ g \text{ limitata e misurabile in } \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Allora esiste almeno una terna tra i sottoinsiemi di Borel  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^2$  con  $K_0 \cup K_1$  chiuso e  $u \in C^2(\Omega \setminus (K_0 \cup K_1))$ ,  $u$  continua in senso approssimato su  $\Omega \setminus K_0$ , che minimizza il funzionale  $\mathcal{BZ}$  con energia finita. Inoltre gli insiemi  $K_0 \cap \Omega$  e  $K_1 \cap \Omega$  sono unione (al più numerabile) di archi regolari. La dimostrazione è stata ottenuta con i metodi di-

retti del Calcolo delle Variazioni. Una versione debole del problema posto, cioè la minimizzazione del funzionale  $\mathcal{G}$  che dipende solo da  $u$  (la definizione di  $\mathcal{G}$  è rinviata all'ultima sezione) è risolta, provando semicontinuità inferiore e compattezza nello spazio funzionale di immagini con energia finita ([19]). Una soluzione al problema di partenza è ottenuta successivamente ([18]), provando la maggiore regolarità dei minimi deboli (concetto opportunamente affinato al fine di essere "essenziale").

Le quattro proposizioni che seguono, relative a una terna essenziale minimizzante, sono state dimostrate (cfr. [20]) con l'ipotesi (7). Per semplicità assumiamo  $|g(x_1, x_2)| \leq 1$ .

**Limitazione dall'alto per la densità media.** *Per ogni  $x \in \Omega$ , per ogni  $0 < r \leq 1$  con  $B_r(x) \subset \Omega$ , risulta*

$$\mathcal{H}^1((K_0 \cup K_1) \cap B_r(x)) \leq \left(4 + \frac{\mu}{\beta}\right) \pi r$$

**Limitazione dal basso per la densità media.** *Esistono  $\varepsilon_1 > 0, \varrho_1 > 0$  tali che per ogni  $x \in K_0 \cup K_1$ , per ogni  $0 < r \leq \varrho_1$  con  $B_r(x) \subset \Omega$ , risulta*

$$\mathcal{H}^1((K_0 \cup K_1) \cap B_r(x)) \geq \varepsilon_1 r$$

### Proprietà dell'eliminazione

*Siano  $\varepsilon_1 > 0, \varrho_1 > 0$  come nel precedente enunciato e  $0 < r \leq \varrho_1$ . Se  $x \in \Omega$  e*

$$\mathcal{H}^1((K_0 \cup K_1) \cap B_r(x)) < \frac{\varepsilon_1}{2} r$$

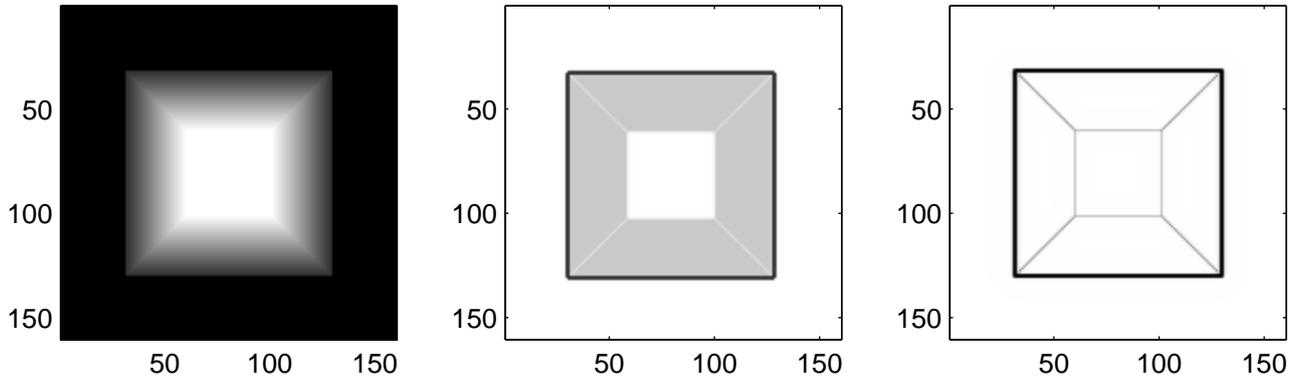
*allora*

$$(K_0 \cup K_1) \cap B_{r/2}(x) = \emptyset$$

Questa proprietà è un'informazione utile per l'analisi numerica del problema, nel senso che un idoneo algoritmo può eliminare tali parti isolate di  $K_0 \cup K_1$  ai fini di una segmentazione ottimale.

In considerazione di queste caratteristiche, possiamo affermare che la segmentazione ottimale  $(K_0, K_1, u)$  ridisegna uno schema omogeneo di linee essenziali dell'immagine iniziale  $g$ . In questo modo la segmentazione ottimale porta più chiaramente in luce il significato semantico insito in  $g$ .

**Contenuto di Minkowski della segmentazione.** *Per ogni insieme aperto  $\Omega' \subset\subset \Omega$  vale la*



**Figura 2:** Segmentazione di una immagine artificiale ottenuta utilizzando i funzionali  $\mathcal{MS}$  e  $\mathcal{BZ}$ . Nell'immagine centrale è evidenziato solo l'insieme di discontinuità  $K_0$ , con un effetto di "sovrasegmentazione". In quella a destra sono evidenziate le discontinuità  $K_0$  e anche le pieghe  $K_1$ .

seguinte uguaglianza

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\{x \in \Omega; d(x, (K_0 \cup K_1) \cap \Omega') < r\}|}{2r} = \mathcal{H}^1((K_0 \cup K_1) \cap \Omega')$$

Anche questa informazione è importante per il calcolo numerico dei minimi, al fine di approssimare, nel senso della  $\Gamma$ -convergenza, il funzionale  $\mathcal{BZ}$  con funzionali ellittici per i quali si possono trovare algoritmi numerici efficienti.

### Approssimazione variazionale di $\mathcal{BZ}$

In analogia a quanto sviluppato per l'approssimazione di  $\mathcal{MS}$ , consideriamo due funzioni ausiliarie  $s, \sigma$  e definiamo i funzionali ([21])

$$\begin{aligned} \mathcal{BZ}_\varepsilon(s, \sigma, u) = & \iint_{\Omega} ((\sigma^2 + \kappa_\varepsilon) \|D^2 u\|^2 \\ & + \xi_\varepsilon (s^2 + \zeta_\varepsilon) \|Du\|^2 + \mu |u - g|^2) dx_1 dx_2 \\ & + (\alpha - \beta) \iint_{\Omega} \left( \varepsilon \|Ds\|^2 + \frac{(s-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx_1 dx_2 \\ & + \beta \iint_{\Omega} \left( \varepsilon \|D\sigma\|^2 + \frac{(\sigma-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (8)$$

che approssimano  $\mathcal{BZ}$  nel senso della  $\Gamma$ -convergenza, per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , sotto opportune scelte degli infinitesimi  $\kappa_\varepsilon, \xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon$ .

La minimizzazione dei funzionali  $\mathcal{BZ}_\varepsilon$  è stata implementata numericamente in alcuni casi ([21]).

Le pieghe sono evidenziate meglio da  $\mathcal{BZ}$  rispetto a  $\mathcal{MS}$ , come mostrato in fig. 2.

### Equazioni di Eulero per $\mathcal{BZ}$ e una congettura sul candidato ottimale

**Condizioni necessarie su  $K_0$ .** Assumiamo (7),  $(K_0, K_1, u)$  sia un minimo locale di  $\mathcal{BZ}$ ,  $B \subset \Omega$  un disco aperto e, per semplicità,  $K_0 \cap B$  sia il diametro di  $B$  parallelo all'asse  $x_1$ ,  $(K_1 \setminus K_0) \cap B = \emptyset$  e  $u \in C^3(\overline{B_+}) \cap C^3(\overline{B_-})$ . Allora le condizioni sui due lati di  $K_0$  sono:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^\pm = 0, \quad \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right)^\pm = 0$$

su  $K_0 \cap B$ .

**Curvatura di  $K_0$  e salto dell'Hessiano al quadrato.** Sia  $(K_0, K_1, u)$  un minimo locale di  $\mathcal{BZ}$  in  $\Omega$ ,  $g \in C^1(\Omega)$  e  $B \subset \Omega$  un disco aperto, tale che  $K_0 \cap B$  è il grafico di una funzione  $C^3$  e  $B_+$  (resp.  $B_-$ ) l'epigrafico (resp. sottografico) aperto connesso di tale funzione in  $B$ . Assumiamo  $K_1 \cap B = \emptyset$  e  $u \in C^3(\overline{B_+}) \cap C^3(\overline{B_-})$ . Allora

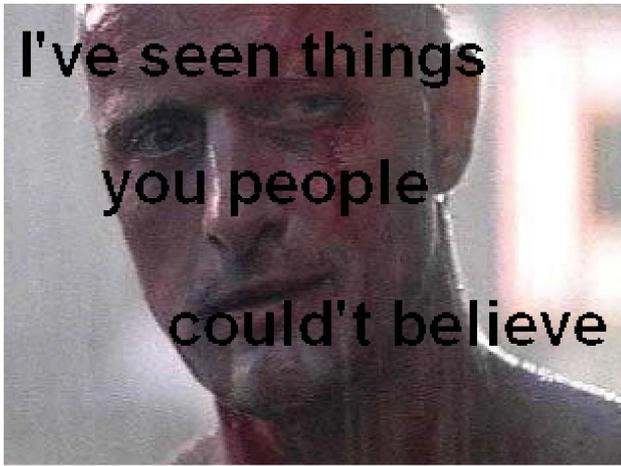
$$\left[ \|D^2 u\|^2 + \mu |u - g|^2 \right] = \alpha \text{curv}(K_0) \quad \text{su } K_0 \cap B$$

dove  $\text{curv}$  è la curvatura valutata orientando la curva con la normale che punta verso  $B_+$ .

Condizioni necessarie circa la curvatura di  $K_1$  sono anche provate in ([22]).

Una analisi fine del comportamento della segmentazione ottimale nei punti terminali dell'insieme singolare è stata fatta in [23], ottenendo condizioni integrali e geometriche nei **crack-tip** (cioè nei punti terminali interni di  $K_0$ ) e nei **crease-tip** (punti terminali interni di  $K_1$ ).

Dall'analisi della parte principale del funzionale



**Figura 3:** *Inpainting di una immagine ottenuta utilizzando il funzionale  $BZ$*

di Blake & Zissermann in  $\mathbb{R}^2$  è emerso ([22]) un candidato minimizzante locale in  $\mathbb{R}^2$ , che ha un insieme di salto non vuoto.

Tale candidato è  $(K_0, K_1, W)$  con

$$K_0 = \{(x_1, 0); x_1 \leq 0\}, \quad K_1 = \emptyset \quad (9)$$

e la funzione  $W$ , espressa in coordinate polari in  $\mathbb{R}^2$  con  $\theta \in (-\pi, \pi)$ , è:

$$W = \sqrt{\frac{\alpha\rho^3}{193\pi}} \left( \sqrt{21} \left( \sin \frac{\theta}{2} - \frac{5}{3} \sin \left( \frac{3}{2}\theta \right) \right) + \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{7}{3} \cos \left( \frac{3}{2}\theta \right) \right) \right) \quad (10)$$

Il seguente elenco di proprietà mostra esplicitamente che  $W$  soddisfa tutte le condizioni necessarie provate e un principio variazionale di equi-partizione dell'energia di massa e di linea:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 W = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2 \setminus K_0 \\ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right)^\pm = 0, \quad \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x_2^3} + 2 \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right)^\pm = 0 \\ \text{e } W^\pm = \pm \frac{8}{3} \sqrt{\frac{21\alpha\rho^3}{193\pi}} \quad \text{su } K_0 \\ \int_{B_\rho(\mathbf{0})} \|D^2 W\|^2 dx_1 dx_2 = \alpha\rho \\ \qquad \qquad \qquad = \alpha \mathcal{H}^1(K_0 \cap B_\rho(\mathbf{0})) \end{array} \right.$$

**Congettura** ([22]) *La terna  $(K_0, K_1, W)$ , definita in (9) (10) è un minimo locale della parte principale del funzionale di Blake-Zissermann in  $\mathbb{R}^2$ , e non esistono altri minimi locali non banali (a meno del segno, di moti rigidi in  $\mathbb{R}^2$  e dell'aggiunta di funzioni*

*affini).*

## Cenno al problema dell'inpainting

Il problema dell'inpainting consiste nel cercare di ricostruire una parte deteriorata oppure mancante di un'immagine, in maniera visivamente accettabile. Anche per questo problema è stata utilizzata una opportuna versione del funzionale  $MS$  ([24]) e del funzionale  $BZ$  ([25]). Nell'esempio in Figura 3 è stato rimosso il testo sovrascritto (l'immagine è a colori ed è stata trattata usando la versione di  $BZ$  per le funzioni vettoriali). Per brevità non ci soffermiamo ulteriormente su questo problema.

## Problemi con discontinuità libere

I problemi di minimo per i funzionali  $MS$  e  $BZ$  si inquadrano in una più ampia classe di problemi del Calcolo delle Variazioni, quella dei **Problemi con discontinuità libere**, in cui tra le incognite figurano, oltre che funzioni, anche insiemi che non sono necessariamente frontiere.

L'approccio generale introdotto da E. De Giorgi in [3] per risolvere i problemi con discontinuità libere è una nuova applicazione dei Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni. L'idea iniziale è la **formulazione debole del problema di minimo** in una classe opportuna di funzioni, denominata  $SBV(\Omega)$ , i cui elementi ammettono discontinuità solo lungo insiemi di dimensione uno. I passi successivi, più delicati, consistono nel dimostrarla

re la regolarità degli insiemi ottimali con discontinuità libere, per recuperare una soluzione del problema di minimo originario.

Riportiamo qui la definizione dello spazio  $BV$  di **funzioni con variazione limitata**, le cui derivate distribuzionali sono misure con variazione limitata, e alcune proprietà :

$v \in BV(\Omega)$  se e solo se  $v \in L^1(\Omega)$  (i.e.  $v$  è sommabile secondo Lebesgue) e la sua variazione totale

$$\|Dv\|_{\mathcal{M}(\Omega)} := \sup \left\{ \iint_{\Omega} v \operatorname{div} \phi \, dx_1 dx_2, \phi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\phi\| \leq 1 \right\}$$

è finita. Per ogni funzione con variazione limitata  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x \in \Omega$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , poniamo  $z = \operatorname{ap} \lim_{y \rightarrow x} v(y)$  ( $z$  è il **limite approssimato** di  $v$  in  $x$ ) se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{B_\rho(0)} v(x+y) \, dy_1 dy_2 = z$$

Per  $v \in S^1$ , denotiamo con  $v^+ = \operatorname{tr}^+(x, v, \nu)$  (e  $v^- = \operatorname{tr}^+(x, v, -\nu)$ ) se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{B_\rho(0) \cap \{y \cdot \nu > 0\}} v(x+y) \, dy_1 dy_2 = v^+$$

L'insieme  $S_v = \{x \in \Omega : \nexists \operatorname{ap} \lim_{y \rightarrow x} v(y)\}$  è detto l'insieme singolare di  $v$ ;  $Dv$  denota il gradiente distribuzionale di  $v$  e  $\nabla v$  il **gradiente approssimato** di  $v$  (cioè la parte assolutamente continua di  $Dv$ ). Quando ha significato, poniamo  $\nabla^2 v = \nabla(\nabla v)$ . Ricordiamo inoltre le definizioni di alcune classi di funzioni aventi derivate che sono misure speciali nel senso di De Giorgi, e alcune proprietà :

$$SBV(\Omega) := \left\{ v \in BV(\Omega) : \|Dv\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \iint_{\Omega} \|\nabla v\| \, dy_1 dy_2 + \int_{S_v} |v^+ - v^-| \, d\mathcal{H}^1 \right\}$$

Per una generica funzione  $BV$  la variazione totale avrebbe un terzo addendo, detto parte cantoriana, che è escluso nel caso delle funzioni  $SBV$ .

$$GSBV(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; -k \vee v \wedge k \in SBV_{loc}(\Omega) \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$GSBV^2(\Omega) := \{v \in GSBV(\Omega), \nabla v \in (GSBV(\Omega))^2\}$$

Le classi di funzioni  $GSBV(\Omega)$ ,  $GSBV^2(\Omega)$  non sono spazi vettoriali, e non sono sottoinsiemi di distribuzioni in  $\Omega$ , tuttavia variazioni regolari di una funzione di  $GSBV^2(\Omega)$  appartengono alla stessa classe. Se  $v \in SBV(\Omega)$  o  $GSBV(\Omega)$ , allora  $S_v$  è l'unione (al più numerabile) di archi regolari e  $\nabla v$  esiste quasi ovunque in  $\Omega$ .

### Formulazione debole del funzionale di Mumford & Shah ([10]).

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto; con l'ipotesi (3), definiamo il funzionale  $\mathcal{F} : SBV(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  ponendo

$$\mathcal{F}(u) := \iint_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \mu|u-g|^2) \, dx_1 dx_2 + \alpha \mathcal{H}^1(S_u)$$

La segmentazione ottimale per il modello di Mumford e Shah viene recuperata con la chiusura dell'insieme dei punti di discontinuità (salti) di una funzione che minimizza  $\mathcal{F}$  in  $SBV(\Omega)$ . Infatti, una funzione  $u$  minimizzante  $\mathcal{F}$  fornisce la segmentazione ottimale  $K = \overline{S_u}$  e  $\mathcal{F}(u) = \mathcal{MS}(K, u) = \min \mathcal{MS}$ . L'esistenza di una segmentazione ottimale è stata dimostrata in [8].

### Formulazione debole del funzionale di Blake & Zisserman ([19]).

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto; sotto l'ipotesi (7) definiamo il funzionale  $\mathcal{G} : GSBV^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  ponendo

$$\mathcal{G}(u) := \iint_{\Omega} (\|\nabla^2 u\|^2 + \mu|u-g|^2) \, dx_1 dx_2 + \alpha \mathcal{H}^1(S_u) + \beta \mathcal{H}^1(S_{\nabla u} \setminus S_u)$$

La segmentazione ottimale per il modello di Blake e Zisserman viene recuperata con la chiusura dell'insieme dei punti di discontinuità (salti) e dell'insieme dei punti di discontinuità del gradiente (pieghe) di una funzione che minimizza  $\mathcal{G}$  in  $GSBV^2(\Omega)$ . L'esistenza di una segmentazione ottimale è stata dimostrata in [18].



- [1] G. AUBERT, P. KORNPBOST: *Mathematical problems in image processing. Partial differential equations and the calculus of variations.*, II ed., Springer, New York (2006).
- [2] J. M. MOREL, S. SOLIMINI: *Variational Models in Image Segmentation*, Birkhäuser, Basel (1994).
- [3] E. DE GIORGI: *Free discontinuity problems in Calculus of Variations*, in: J. L. Lions, R. Dautray (Eds.), "Frontiers in Pure and Applied Mathematics", North-Holland, Amsterdam (1991).
- [4] D. MUMFORD, J. SHAH: "Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems", *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989) 577-685.
- [5] A. BLAKE, A. ZISSERMAN: *Visual Reconstruction*, The MIT Press, Cambridge (1987).
- [6] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: *Local minimizers for a free gradient discontinuity problem in image segmentation.*, in G. Dal Maso & F. Tomarelli (Eds.), "Variational Methods for Discontinuous Structures", Birkhäuser, Basel (2002).
- [7] E. DE GIORGI, L. AMBROSIO: "Un nuovo tipo di funzionale del Calcolo delle Variazioni", *Atti Accad. Naz. Lincei, s.8* **82** (1988) 199-210.
- [8] E. DE GIORGI, M. CARRIERO, A. LEACI: "Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set", *Arch. Rational Mech. Anal.* **108** (1989) 195-218.
- [9] G. DAL MASO, J. M. MOREL, S. SOLIMINI: "A variational method in image segmentation: existence and approximation results", *Acta Mat.* **168** (1992) 89-151.
- [10] L. AMBROSIO: "A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation", *Boll. Un. Mat. It.* **3-B** (1989) 857-881.
- [11] G. DAL MASO: *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*, Birkhäuser, Basel (1993).
- [12] L. AMBROSIO, V. M. TORTORELLI: "Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence", *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1991) 999-1036.
- [13] R. MARCH: "Visual reconstruction with discontinuities using variational methods", *Image and vision computing* **10** (1992) 30-38.
- [14] M. CARRIERO, A. FARINA AND I. SGURA: *Image segmentation in the framework of free discontinuity problems*, in: D. Pallara (Ed.), "Calculus of Variations: Topics from the Mathematical Heritage of E. De Giorgi", Quad. Mat., Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta (2004).
- [15] M. CARRIERO, A. LEACI, D. PALLARA, E. PASCALI: "Euler Conditions for a Minimum Problem with Free Discontinuity Surfaces", *Preprint Dip. di Matematica di Lecce* **8** (1988) 1-20.
- [16] G. DAVID: *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, Birkhäuser, Basel (2005).
- [17] D. PERCIVALE, F. TOMARELLI: "From SBD to SBH: the elastic plastic plate", *Interfaces and Free Boundaries* **4** (2002) 1-29.
- [18] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: "Strong minimizers of Blake & Zisserman functional", *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, s.IV* **25** (1997) 257-285.
- [19] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: *A second order model in image segmentation: Blake & Zisserman functional*, in: R. Serapioni, F. Tomarelli (Eds.), "Variational Methods for Discontinuous Structures", Birkhäuser, Basel (1996).
- [20] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: *Density estimates and further properties of Blake & Zisserman functional*, in: R. Gilbert & Pardalos (Eds.), "From Convexity to Nonconvexity", Kluwer, Amsterdam (2001).
- [21] L. AMBROSIO, L. FAINA, R. MARCH: "Variational approximation of a second order free discontinuity problem in computer vision", *SIAM J. Math. Anal.* **32** (2001) 1171-1197.
- [22] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: "Necessary conditions for extremals of Blake & Zisserman functional", *C. R. Acad. Sci. Paris s.I* **334** (2002) 343-348.
- [23] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: "Euler equations for Blake & Zisserman functional", *Calc.Var. Partial Differential Equations* **32** (2008) 81-110.
- [24] T. F. CHAN AND J. SHEN: "Variational image inpainting", *Comm. Pure Appl. Math.* **LVIII** (2005) 579-619.
- [25] M. CARRIERO, A. LEACI, F. TOMARELLI: "Image inpainting via variational approximation of a Dirichlet problem with free discontinuity", *Advances in Calculus of Variations* (2013) to appear.



**Michele Carriero:** Laurea in matematica presso l'Università di Lecce. È Professore Ordinario di Analisi Matematica presso l'Università del Salento. Si occupa di Calcolo delle Variazioni ed Equazioni alle Derivate Parziali con applicazioni alla Teoria della Visione e alla Teoria dell'Elasticità.

**Antonio Leaci:** Laurea in matematica presso l'Università di Pisa e Diploma presso la Scuola Normale Superiore. È Professore Ordinario di Analisi Matematica presso l'Università del Salento. Si occupa di Calcolo delle Variazioni ed EDP con applicazioni alla Teoria della Visione e alla Teoria dell'Elasticità.

**Franco Tomarelli:** Laurea in matematica presso l'Università di Pisa e Diploma presso la Scuola Normale Superiore. È Professore Ordinario di Analisi Matematica presso il Politecnico di Milano. Si occupa di Calcolo delle Variazioni ed EDP con applicazioni alla Teoria della Visione e alla Meccanica dei Continui.

