Energia e quantità di moto in relatività ristretta. Una derivazione elementare

Luca Peliti *Santa Marinella Research Insititute, Santa Marinella (Rm), Italia*

Il modo in cui i testi introduttivi derivano le espressioni della quantità di moto e dell'energia in relatività ristretta è spesso insoddisfacente. In alcuni si fa ricorso a considerazioni quantistiche o elettrodinamiche, mentre in altri si introducono concetti non elementari, o addirittura fuorvianti, come la "massa relativistica". È invece possibile ottenere, seguendo delle idee descritte da Einstein nel 1935, una derivazione del tutto elementare di queste espressioni basandosi soltanto sulle trasformazioni di Lorentz, sulle leggi di conservazione, e sul limite Newtoniano. Il ragionamento così ottenuto fornisce un'introduzione chiara e logicamente coerente ai concetti fondamentali della dinamica relativistica.

1. Introduzione

Molti testi forniscono una derivazione elementare della cinematica della relatività ristretta, basandosi in ultima analisi sulla prima parte del lavoro fondamentale di Einstein del 1905 [1]. Partendo dai due postulati dell'equivalenza totale dei sistemi di riferimento inerziali, e della costanza della velocità della luce in tutti questi sistemi, è in effetti facile ottenere l'espressione delle trasformazioni di Lorentz delle coodinate spaziotemporali. Una derivazione semplice ed elegante fa uso del cosiddetto k-calcolo di Bondi [2], basato a sua volta sull'effetto Doppler. Tuttavia il passaggio dalla cinematica (le trasformazioni di Lorentz) alla dinamica, e in particolare alle espressioni relativistiche della quantità di moto e dell'energia, viene spesso compiuto facendo uso di concetti più sofisticati, come quello di quadrivettore, o di considerazioni quantistiche. (Un esempio di questo approccio è la "derivazione elementare" suggerita da F. Rohrlich [3], che fa uso delle espressioni della quantità di moto e dell'energia di un fotone di frequenza ν.) Lo stesso Einstein aveva inizialmente derivato la relazione fra massa ed energia mediante un uso esplicito dell'elettrodinamica [4], e non limitandosi alle considerazioni cinematiche sviluppate nella prima parte del suo lavoro del 1905, che si basano sì sulla costanza della velocità della luce, ma non dipendono altrimenti dalle equazioni di Maxwell.

Einstein aveva notato questo problema, e propose nel 1935 una derivazione elementare della relazione fra massa ed energia indipendente dal suo argomento del 1905, motivandola con le seguenti parole [5]:

> "La teoria della relatività ristretta origina dalle equazioni elettromagnetiche di Maxwell. Di conseguenza anche nella derivazione dei concetti meccanici e delle loro relazioni la considerazione dei concetti relativi al campo elettromagnetico ha svolto un ruolo essenziale. È naturale porsi a domanda se queste relazioni ne siano indipendenti, perché la trasformazione di Lorentz, che è la base reale della relatività ristretta, non ha di per sé niente a che fare con la teoria di Maxwell e perché non sappiamo fino a che punto i concetti di energia della teoria di Maxwell possano essere mantenuti di fronte ai dati della fisica molecolare. Nelle considerazioni che seguono, a parte la trasformazione di Lorentz, ci baseremo soltanto sull'assunzione dei principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia."

Il ragionamento di Einstein sfrutta un esperimento ideale introdotto da G. N. Lewis e R. C. Tolman [6] e discusso ulteriormente da P. S. Epstein [7], in cui si considerano urti fra coppie di particelle in diversi sistemi di riferimento, e si cercano le espressioni della quantità di moto e dell'energia postulandone la conservazione. È interessante notare che l'articolo di Lewis e Tolman, così come quello di Epstein, considerano solo urti elastici, ed ottengono così l'espressione relativistica della quantità di moto, mentre forniscono un argomento insoddisfacente per l'equivalenza massa-energia considerando la variazione della "massa relativistica" in funzione della velocità. La "massa relativistica" è in effetti un concetto piuttosto problematico [8, 9], e c'è un consenso crescente ad evitarne l'introduzione nell'insegnamento della relatività. Invece Einstein ottiene l'equivalenza semplicemente estendendo l'argomento agli urti anelastici. L'efficacia di questo approccio per introdurre i concetti fondamentali della relatività speciale è stata ben notata da R. F. Feynman che, nelle sue *Lectures* [10, Vol. I. Secs. 16-4, 16-5], ottiene le espressioni relativistiche della quantità di moto e dell'energia in un modo che assomiglia da vicino a quello di Einstein. (Tuttavia, la derivazione di Feynman è viziata dal suo uso della "massa relativistica".) L'argomento di Einstein è stato più recentemente discusso da F. Flores [11], che identifica entro il concetto dell'equivalenza fra massa ed energia tre affermazioni collegate ma distinte, e confronta l'argomento di Einstein del 1935 con la sua derivazione originale e con la derivazione ottenuta da Friedman nel 1983 [12, p. 142ss], che si basa sulla considerazione delle equazioni di Newton in relatività ristretta.

In questa nota, presento questa linea di pensiero nella speranza che la si possa trovare utile per la presentazione di questo concetti fondamentali della relatività ristretta in corsi introduttivi per studenti di fisica e matematica. Mentre la derivazione dell'espressione relativistica della quantità di moto nella sezione è vicina agli argomenti di Epstein e Feynman, la discussione dell'espressione dell'energia cinetica e dell'equivalenza massa-energia è più vicina all'argomentazione di Einstein.

2. Trasformazioni di Lorentz e postulati dinamici

Seguendo il lavoro di Einstein del 1905 [1, §2], i concetti cinematici della relatività ristretta si basano sui seguenti postulati:

(i) Le leggi che governano le trasformazioni degli stati dei sistemi fisici hanno la stessa forma in sistemi di riferimento animati da moto traslazionale uniforme l'uno rispetto all'altro.

(ii) Esiste una classe di tali sistemi di riferimento (i *sistemi di riferimento inerziali*) in cui la velocità della luce assume lo stesso valore c, indipendentemente dallo stato di moto della sua sorgente.

Scegliamo d'ora in poi unità di misura in cui $c = 1$ e limitiamoci a considerare sistemi inerziali. Basandosi su questi postulati, è facile ottenere le trasformazioni di Lorentz nella forma seguente. Consideriamo due sistemi di riferimento, K e K', tali che K' è animato di moto traslazionale uniforme nella direzione degli x positivi e con velocità V rispetto a K. Allora l'evento di coordinate (t', x', y', z') in K' ha le coordinate (t, x, y, z) in K, dove

$$\begin{aligned} t &= \gamma(V)\left(t' + Vx'\right), \\ x &= \gamma(V)\left(x' + Vt'\right), \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned} \tag{1}$$

ed abbiamo definito

$$\gamma(V) = \frac{1}{(1 - V^2)^{1/2}}. \tag{2}$$

La stessa relazione vale per i differenziali $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, ecc. Dividendo per $\mathrm{d}t$, otteniamo le regole della trasformazione delle velocità:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x V}, \\ u_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_y}{\gamma(V)\,(1 + u'_x V)}, \\ u_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_z}{\gamma(V)\,(1 + u'_x V)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Per introdurre concetti dinamici abbiamo ovviamente bisogno di ulteriori postulati. Faremo dunque le seguenti ipotesi:

(iii) La quantità di moto $\mathbf{P}$ e l'energia E di una particella animata dalla velocità $\mathbf{u}$ nel sistema di riferimento K hanno rispettivamente le espressioni

$$\mathbf{P} = m\mathbf{u}\,F(u), \qquad E = E_0 + m\,G(u), \tag{4}$$

dove E_0 è una costante, che può essere chiamata l'*energia a riposo*, m è una costante positiva (che è *relativisticamente invariante*, cioè non cambia al cambiare di sistema di riferimento, ed è quindi *indipendente dalla velocità della particella*) che chiameremo semplicemente la *massa* della particella, e dove $F(u)$ e $G(u)$ sono funzioni universali e *monotone crescenti* di $u = |\mathbf{u}|$.

(iv) Per $u \ll 1$ queste espressioni si riducono alle note espressioni classiche. Si ha in particolare

$$F(u) = 1 + \mathrm{O}\left(u^2\right), \qquad G(u) = \frac{1}{2}u^2 + \mathrm{O}(u^4). \tag{5}$$

(Se, come è ragionevole supporre, $F(u)$ and $G(u)$ sono funzioni analitiche di $\mathbf{u}$, il loro sviluppo di Taylor contiene solo potenze pari di u.)

(v) La quantità di moto totale $\mathbf{P}^{\mathrm{tot}}$ e l'energia totale E^{tot} di un sistema di particelle sono date rispettivamente dalla somma di $\mathbf{P}$ e di E su tutte le particelle del sistema (questo esclude ogni interazione a distanza).

(vi) *Conservazione della quantità di moto e dell'energia:* Supponiamo che in un sistema di particelle abbiano luogo degli urti, elastici o inelastici. Allora, in ogni sistema di riferimento, $\mathbf{P}^{\mathrm{tot}}$ ed E^{tot} conservano lo stesso valore prima e dopo ogni urto.

Come corollario, la velocità di ogni particella rimane costante in assenza di urti, poiché si possono considerare sistemi costituiti da particelle singole e indipendenti.

3. Urti elastici e quantità di moto relativistica

Consideriamo adesso una `coppia` di particelle, cioè un sistema costituito da due particelle di uguale massa. Supponiamo che in un sistema di riferimento K esse abbiano velocità opposte $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1$. Supponiamo inoltre che le particelle subiscano un urto elastico, in seguito al quale esse assumano rispettivamente le velocità $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. Per la conservazione della quantità di moto si deve avere $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_2$, indipendentemente dalla forma della funzione $F(u)$. In effetti, si ha $\mathbf{P}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{in}} = 0$ prima dell'urto. Per la legge di conservazione si deve avere, dopo l'urto,

$$\mathbf{P}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{out}} = 0 = m\mathbf{w}_1 F(w_1) + m\mathbf{w}_2 F(w_2). \tag{6}$$

Quindi i vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono antiparalleli, e si ha

$$\frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{w}_2|} = \frac{F(w_2)}{F(w_1)}. \tag{7}$$

Poiché la funzione $F(u)$ è monotona crescente, questa relazione può essere soddisfatta solo se

$|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{w}_2|$, e si ha quindi $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_2$. Ora la conservazione dell'energia impone

$$w \equiv |\mathbf{w}_{1,2}| \equiv |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| \equiv |\mathbf{u}_{1,2}| \equiv u\,.$$

Infatti, l'energia cinetica totale prima dell'urto è data da $2mG(u)$, e dopo l'urto è data da $2mG(w)$. Dato che $G(u)$ è una funzione monotona crescente di u, questa condizione può essere soddisfatta solo se $w = u$.

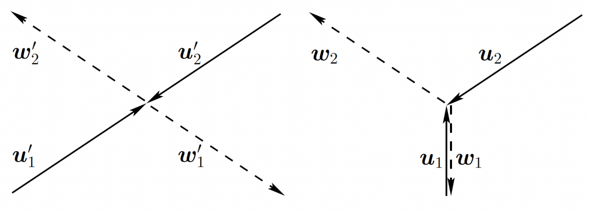

Figura 1: Urto di una coppia di particelle di ugual massa. A sinistra: nel sistema di riferimento K'. A destra: nel sistema di riferimento K. Le figure sono schematiche e non implicano nessuna relazione quantitativa.

Consideriamo ora il caso speciale in cui la variazione della velocità è parallela all'asse y. (Questo esclude le `collisioni frontali`, in cui le particelle scambiano semplicemente le loro velocità.) Siano rispettivamente $\mathbf{u}_1' = (V', v', 0)$ e $\mathbf{u}_2' = -\mathbf{u}_1'$ (vedi Fig. 1) le velocità delle particelle nel sistema di riferimento K'. Consideriamo ora l'urto nel sistema di riferimento K, che si muove rispetto a K' con velocità V' nella direzione x. In questo sistema di riferimento, le velocità $\mathbf{u}_{1,2}$ delle particelle sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (0, v, 0), \\ \mathbf{u}_2 &= (-V, -w, 0), \end{aligned} \tag{8}$$

dove

$$\begin{aligned} V &= \frac{2V'}{1+V'^2}, \\ v &= \frac{v'}{\gamma(V')(1-V'^2)}, \\ w &= \frac{v'}{\gamma(V')(1+V'^2)}. \end{aligned} \tag{9}$$

È facile verificare che

$$\gamma(V) = \frac{1}{(1-V^2)^{1/2}} = \frac{1+V'^2}{1-V'^2}, \tag{10}$$

e quindi che

$$v = w\,\gamma(V). \tag{11}$$

Si può ottenere questa relazione anche applicando l'eq. (3) alla trasformazione dal sistema di riferimento K' al sistema K'', animato, rispetto al sistema K', da un moto traslazionale di velocità $-V'$ parallela all'asse x. In questo sistema di riferimento la componente x della velocità $\mathbf{u}_2''$ si annulla, mentre quella della velocità $\mathbf{u}_1''$ è pari a V, e così le velocità delle due particelle sono scambiate.

Consideriamo adesso la conservazione della quantità di moto. La variazione $\Delta\mathbf{P}_1$ della quantità di moto della particella 1 è data da

$$\Delta\mathbf{P}_1 = -2mv\,F(v)\,\mathbf{e}_y, \tag{12}$$

dove $\mathbf{e}_y$ è il versore dell'asse y. La quantità corrispondente per la particella 2 è data da

$$\Delta\mathbf{P}_2 = 2mw\,F(u_2)\,\mathbf{e}_y, \tag{13}$$

dove $u_2 = \sqrt{V^2+w^2}$. Assumiamo momentaneamente che $v, w \ll V$: allora $F(v) \simeq 1$ e $u_2 \simeq V$. Dalla conservazione della quantità di moto otteniamo $\Delta\mathbf{P}_1 + \Delta\mathbf{P}_2 = 0$, che implica

$$mv = mw\,F(V). \tag{14}$$

Poiché $w = v/\gamma(V)$, otteniamo

$$F(V) = \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}. \tag{15}$$

Avendo ottenuto questo risultato per $v, w \ll V$, è facile vedere che esso vale anche per valori più elevati di v e w, sostituendo a V la velocità della corrispondente particella. Abbiamo infatti

$$mv\,F(v) = mw\,F(w) = \frac{mv}{\gamma(V)}\,F(u_2), \tag{16}$$

da cui segue

$$F(u_2) = F(v)\gamma(V), \tag{17}$$

e cioè

$$\frac{1}{\sqrt{1-u_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{18}$$

un'identità che è facile verificare direttamente.

In molti testi elementari si preferisce scrivere l'espressione della quantità di moto $\mathbf{P}$ di una particella animata dalla velocità $\mathbf{u}$ nella forma

$$\mathbf{P} = M(u)\,\mathbf{u}, \tag{19}$$

dove $M(u)$ (che corrisponde a $m\,F(u)$ nell'eq. (4)) è la "massa relativistica". Questa espressione si trova in diversi testi elementari, ma è del tutto fuorviante. L'opinione di Einstein al riguardo è ben espressa in una sua lettera del 1948 [13]:[1]

> "Non è bene parlare di $M = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ come della massa di un corpo in movimento, dato che non si può dare alcuna chiara definizione di M. È meglio limitarsi al concetto di `massa a riposo` m. Si possono quindi dare le espressioni della quantità di moto e dell'energia, quando si sia specificato il comportamento inerziale di corpi animati da grandi velocità."

La "massa relativistica" venne introdotta per cercare di conservare l'espressione della legge di Newton nella forma

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a}, \tag{20}$$

dove $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ è l'accelerazione. Tuttavia questa relazione non può valere in meccanica relativistica. Infatti, se *definiamo* la forza $\mathbf{F}$ mediante la relazione

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}, \tag{21}$$

(corrispondente all'originale legge di Newton) un breve calcolo mostra che si ottiene

$$\mathbf{F} = \gamma m\left[\mathbf{a} + \gamma^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{v}\right]. \tag{22}$$

In particolare, si ha

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\,\mathbf{a}, \tag{23}$$

se $\mathbf{F}$ è perpendicolare a $\mathbf{v}$, mentre

$$\mathbf{F} = \frac{m}{(1-v^2)^{3/2}}\,\mathbf{a}, \tag{24}$$

se $\mathbf{F}$ è parallelo a $\mathbf{v}$. Quindi la proporzionalità fra $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{a}$ non può essere espressa da uno scalare come la "massa relativistica".

[1] Ho tradotto direttamente dall'originale tedesco. Il testo inglese citato in [9] è leggermente diverso.

4. Conservazione dell'energia cinetica

Consideriamo una particella animata dalla velocità $\mathbf{u}' = (u', 0, 0)$, parallela all'asse x, nel sistema di riferimento K'. La sua velocità $\mathbf{u}$ nel sistema K, che è animato di moto traslazionale uniforme rispetto al sistema K' con velocità V nella direzione dell'asse x negativo, è data da $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, con

$$u = \frac{u' + V}{1 + u'V}. \tag{25}$$

Si vede facilmente che

$$\gamma(u) = \big(1 + u'V\big)\,\gamma(u')\gamma(V). \tag{26}$$

Se $\mathbf{u}'$ non è parallelo all'asse x, ma si ha invece $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, si ha la relazione più generale

$$\gamma(u) = (1 + u'_x V)\gamma(u')\gamma(V), \tag{27}$$

che può essere ottenuta con un po' di algebra. È anche facile vedere che

$$\begin{aligned} u_x\gamma(u) &= (u'_x + V)\gamma(u')\gamma(V),\\ u_y\gamma(u) &= u'_y\gamma(u'),\\ u_z\gamma(u) &= u'_x\gamma(u'). \end{aligned} \tag{28}$$

Consideriamo adesso una coppia di particelle, animate da velocità opposte $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{u}'_1$ nel sistema K'. Quindi $u' = |\mathbf{u}'_1| = |\mathbf{u}'_2|$ è il valore comune del modulo delle loro velocità nel sistema K'. Indichiamo con $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ le rispettive velocità nel sistema K. Otteniamo

$$\gamma(u_1) + \gamma(u_2) = 2\gamma(u')\gamma(V). \tag{29}$$

Abbiamo visto che un urto elastico nel sistema K' non può cambiare il valore comune u' del modulo delle loro velocità. Quindi il secondo membro di questa uguaglianza non può cambiare in occasione di un urto elastico. Ma allora neanche il suo primo membro può cambiare. Indicando con $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ le velocità delle particelle nel sistema K dopo l'urto, otteniamo

$$\gamma(u_1) + \gamma(u_2) = \gamma(w_1) + \gamma(w_2). \tag{30}$$

Come sottolineato da Einstein [5, p. 227], queste equazioni hanno la forma di leggi di conservazione. Possiamo quindi interpretare [2] $m\,(\gamma(u)-1)$ come l'energia cinetica di una particella di massa m animata da una velocità $\mathbf{u}$. Per piccoli valori di u questa quantità è quindi data da

$$T = m\,(\gamma(u)-1) \simeq \frac{1}{2}mu^2, \qquad (31)$$

in accordo con il limite classico. Possiamo quindi porre

$$G(u) = \gamma(u) - 1. \qquad (32)$$

Notiamo inoltre che, applicando l'eq. (28) a una coppia di particelle, si ottiene

$$\mathbf{u}_1\gamma(u_1) + \mathbf{u}_2\gamma(u_2) = 2\mathbf{V}\gamma(u')\gamma(V). \qquad (33)$$

Otteniamo così la relazione seguente:

$$\mathbf{u}_1\gamma(u_1) + \mathbf{u}_2\gamma(u_2) = \mathbf{w}_1\gamma(w_1) + \mathbf{w}_2\gamma(w_2), \quad (34)$$

che può essere interpretata come la legge di conservazione della quantità di moto. Otteniamo così l'espressione relativistica della quantità di moto derivata nella Sezione 3.

5. Equivalenza massa-energia

Consideriamo adesso un urto totalmente inelastico in una coppia di particelle. Nel sistema di riferimento K' in cui $\mathbf{P}^{\text{tot}} = 0$, l'energia cinetica totale prima della collisione è data da

$$T'_{\text{in}} = 2m\left(\gamma(u') - 1\right). \qquad (35)$$

Per semplicità, supponiamo che le velocità $\mathbf{u}_{1,2}$ delle particelle siano parallele all'asse y. L'energia cinetica totale dopo l'urto si annulla, ma l'energia della particella risultante è aumentata di T'_{in}. Per la conservazione della quantità di moto la particella risultante è in quiete nel sistema K' ed è animata della velocità V parallela all'asse x nel sistema K. Denotiamo con M la sua massa. Nel sistema K la quantità di moto totale prima dell'urto è data da

$$\mathbf{P} = m\,(\mathbf{u}_1\gamma(u_1) + \mathbf{u}_2\gamma(u_2)) = 2m\mathbf{V}\gamma(u')\gamma(V), \qquad (36)$$

[2] L'equazione (30) implica la conservazione di $\sum(\gamma(u) + \text{const.})$. Il valore della costante è scelto in modo che l'espressione si annulli per $u \to 0$.

mentre dopo l'urto vale

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}\gamma(V). \qquad (37)$$

Otteniamo così

$$M = 2m\gamma(u') = 2m + T'_{\text{in}}. \qquad (38)$$

Quindi, quando due particelle subiscono un urto completamente inelastico e formano una nuova particella, la massa della particella risultante è più grande della somma delle masse delle particelle che subiscono l'urto di una quantità esattamente uguale, nelle nostre unità, all'energia cinetica trasformata dall'urto in altre forme d'energia. È quindi possibile introdurre una scelta `naturale` per l'energia a riposo E_0 di una particella, ponendola uguale (nelle nostre unità) alla sua massa, anche perché "dalla natura del concetto [che] è determinato solo a meno di una costante additiva, si può stipulare che E_0 debba annullarsi insieme con m" [5, p. 229]. Possiamo quindi porre $E_0 = m$ e identificare $m\gamma(u)$ con l'energia totale di una particella, associando la variazione ΔE dell'energia dall'energia cinetica ad un'altra forma con una variazione $\Delta m = \Delta E$ della massa della particella. Nel caso più generale in cui le due particelle non si fondono, ma restano animate da velocità w' di ugual modulo dopo l'urto, si potrà esprimere la conservazione dell'energia mediante la

$$2m\gamma(u') = 2\overline{m}\gamma(w'), \qquad (39)$$

dove $\overline{m}$ è la massa di ciascuna particella dopo l'urto. Lo stesso vale nel sistema K, se teniamo conto della relazione

$$\gamma(u) = \gamma(u')\gamma(V), \qquad (40)$$

che vale dato che tanto $\mathbf{u}_1$ che $\mathbf{u}_2$ sono paralleli all'asse y.

È quindi facile verificare che l'energia E e la quantità di moto $\mathbf{P}$ di una particella di massa m soddisfano la relazione

$$E^2 - P^2 = m^2, \qquad (41)$$

dove il secondo membro è relativisticamente invariante. Questa relazione vale anche nel limite di una particella di massa nulla, in cui assume la forma

$$E = |\mathbf{P}| \,. \tag{42}$$

Come corollario, <u>la massa non è additiva</u>: la massa di un sistema di particelle dipende dal suo contenuto totale di energia nel sistema di riferimento in cui la sua quantità di moto si annulla. Quindi, quando delle onde luminose (di massa nulla) con quantità di moto opposte vengono emesse da una particella in quiete, la massa della particella cambia (come discusso nel lavoro di Einstein del 1905 [4]). Dato che il secondo membro dell'eq. (41) è invariante, può essere usato come punto di partenza per mostrare che l'energia E e la quantità di moto $\mathbf{P}$ si combinano a formare un quadrivettore relativistico, una proprietà che può generalizzarsi ai sistemi di particelle.

È interessante sottolineare che l'approccio considerato può essere applicato solo se lo spazio ha più di una dimensione. Ci si può domandare se sia possibile percorrere un ragionamento analogo in uno spazio unidimensionale. Un attimo di riflessione mostra però che le funzioni $F(u)$ e $G(u)$ non possono essere completamente determinate dalle leggi di conservazione se lo spazio è unidimensionale. In questo caso, in effetti, urti elastici fra particelle, visti nel sistema di riferimento del centro di massa, producono semplicemente il cambio di segno delle velocità delle particelle incidenti. Di conseguenza, non è possibile ottenere una relazione che identifichi $F(u)$. Se si considerano urti anelastici, si ottiene una relazione fra $F(u)$ e $G(u)$, ma comunque non si ottiene una espressione ben definita di queste funzioni.

Occorre sottlineare che questo approccio non si basa sulle equazioni di Maxwell (conservandone solo la costanza della velocità della luce), né fa uso di altri concetti meccanici, in particolare del concetto di forza, che è difficile da giustificare in relatività ristretta. Esattamente per questa ragione, Einstein critica l'uso del concetto di forza nella derivazione delle espressioni relativistiche dell'energia e della quantità di moto, contenuta nel libro di G. D. Birkhoff e R. E. Langer, *Relativity and Modern Physics* [14], come espresso dai paragrafi finali del suo lavoro del 1935 [5]:

> "Così, nel libro appena menzionato, viene fatto un uso essenziale del concetto di forza, che non ha un significato così diretto nella teoria della relatività come quello che ha in meccanica classica. Questo è dovuto al fatto che, in quest'ultima, bisogna considerare la forza come una funzione data delle coordinate di tutte le particelle, il che è evidentemente impossibile in teoria della relatività. Perciò ho evitato di introdurre il concetto di forza.
>
> Inoltre, ho fatto attenzione ad evitare qualunque ipotesi relativa alle leggi di trasformazione dell'energia e della quantità di moto rispetto a una trasformazione di Lorentz."

[1] A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper,* Annalen der Physik, 17 (1905) 891.

[2] H. Bondi: *Relativity and Common Sense,* Dover, New York (1980).

[3] F. Rohrlich: *An elementary derivation of $E = mc^2$,* Am. J. Phys., 58 (1990) 348.

[4] A. Einstein: *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?,* Annalen der Physik, 18 (1905) 639.

[5] A. Einstein: *Elementary derivation of the equivalence between mass and energy,* Bull. Am. Math. Soc., 41 (1935) 223.

[6] G. N. Lewis, R. C. Tolman: *The principle of relativity and non-Newtonian mechanics,* Phil. Mag., 6 (1909) 510.

[7] P. S. Epstein, Über relativistische Statik, *Annalen der Physik* **36** 779-795 (1911).

[8] C. G. Adler: *Does mass really depend on velocity, dad?,* Am. J. Phys., 55 (1987) 739.

[9] L. B. Okun: *The concept of mass,* Physics Today, 42 (1989) 31. : *The mass versus relativistic and rest masses,* Am. J. Phys., 77 (2009) 430.

[10] R. F. Feynman, R. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics,* Addison-Wesley, Boston (1964, 1966).

[11] F. Flores: *Einstein's 1935 derivation of $E = mc^2$,* Stud. Hist. Philos. Mod. Phys., 29 (1998) 223.

[12] M. Friedman: *Foundations of Spacetime Theories,* Princeton University Press, Princeton (1983).

[13] A. Einstein: lettera a Lincoln Barnett, 19 giugno 1948, citata in [9, p. 32].

[14] G. D. Birkhoff, R. E. Langer: *Relativity and Modern Physics,* Harvard University Press, Cambridge (MA) (1923).

Luca Peliti: è stato Professore Ordinario di Meccanica Statistica presso l'Università "Federico II" di Napoli. Si è occupato di meccanica statistica, applicata in particolare a sistemi di interesse biologico, e dell'approccio statistico alla teoria dell'evoluzione. È autore, in particolare, di *Appunti di Meccanica Statistica* (Bollati Boringhieri, 2003) e di *Stochastic Thermodynamics: An Introduction*, in collaborazione con Simone Pigolotti, Princeton University Press (2021). Al momento è vice direttore del Santa Marinella Research Institute.