
Applicazioni del Formalismo Quantistico alle Scienze Cognitive

La vita è complessa: ha sia una parte reale che una parte immaginaria.

— Anonimo

Sandro Sozzo

*Department of Economics, Finance and Accounting (EFA) and Centre IQSCS
School of Business, University of Leicester
223 London Road, Leicester LE2 1ZE, United Kingdom*

In questo articolo verranno presentati alcuni risultati recenti sull'applicazione del formalismo matematico della meccanica quantistica (QM) ai domini cognitivi e socio-economici, ottenuti nell'ambito di una decennale collaborazione tra i gruppi di ricerca di Bruxelles e Leicester. In particolare, si mostrerà come il formalismo quantistico in spazi di Hilbert permetta di modellizzare e fornire una spiegazione unitaria per una serie di fenomeni cognitivi complessi, compresi i giudizi e le decisioni in presenza di incertezza, per i quali l'applicazione di formalismi di tipo classico porta invece a risultati paradossali. I risultati presentati in questo articolo supportano un programma di ricerca emergente, noto con il nome di *quantum cognition programme*, che presuppone l'esistenza di strutture quantistiche in domini non-fisici.

I modelli delle scienze cognitive

I modelli sviluppati in psicologia cognitiva tradizionalmente impiegano strutture matematiche di tipo insiemistico, per esempio, algebre Booleane, probabilità Kolmogoroviane, ecc., per rappresentare i fenomeni cognitivi complessi, per esempio, i fenomeni che coinvolgono il linguaggio, la memoria, la percezione, i giudizi e le decisioni [1]. Tali strutture, originariamente adottate in fisica classica, sono state successivamente estese a numerose discipline, dalla statistica alla psicologia, dall'economia alla finanza e alle scienze informatiche. Esse sono perciò comunemente dette strutture classiche. In particolare, le seguenti nozioni, relative a strutture classiche, saranno utilizzate nel seguito di questo articolo.

Sia Ω un insieme non vuoto, sia $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme delle parti di Ω , e sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Si dice che \mathcal{A} è una σ -algebra (Booleana) se soddisfa le seguenti condizioni:

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
- (ii) per ogni $A \in \mathcal{A}$, $A' = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di elementi di \mathcal{A} , $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Una σ -algebra \mathcal{A} è **distributiva**, ovvero, per ogni $A, B, C \in \mathcal{A}$, valgono le seguenti proprietà:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (2)$$

Sia ora Ω un insieme non vuoto, sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una σ -algebra, e sia $p : A \in \mathcal{A} \mapsto p(A) \in [0, 1]$. Si dice che p è una **misura (normalizzata) di probabilità** se soddisfa le seguenti condizioni:

$$(1) p(\Omega) = 1,$$

(2) se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di elementi di \mathcal{A} , tale che, per ogni $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, allora $p(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(A_i)$.

Le condizioni (1) e (2) sono state introdotte da Kolmogorov [2]. La misura p è perciò detta **probabilità Kolmogoroviana**. Gli elementi dell'algebra \mathcal{A} sono in particolare utilizzati in matematica applicata per rappresentare accadimenti del mondo naturale. Essi perciò abitualmente designano eventi.

Se p è una probabilità Kolmogoroviana e $A, B \in \mathcal{A}$, la **probabilità condizionale** $p(A|B)$ di A dato B è definita dall'equazione

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}. \quad (3)$$

La probabilità condizionale $p(B|A)$ di B dato A è definita in modo analogo e vale la relazione

$$p(B)p(A|B) = p(A \cap B) = p(A)p(B|A) \quad (4)$$

nota con il nome di **formula di Bayes**. Se ne derivano le seguenti leggi:

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &\leq \min [p(A), p(B)] \\ &\leq \max [p(A), p(B)] \leq p(A \cup B), \end{aligned} \quad (5)$$

detta **legge di monotonicità**, e

$$p(A) = p(B)p(A|B) + p(B')p(A|B'), \quad (6)$$

detta **legge della probabilità totale**.

Crescente evidenza empirica mostra tuttavia che i modelli basati su tali strutture classiche non sono in generale in grado di spiegare il modo concreto in cui gli individui esprimono giudizi o prendono decisioni in presenza di incertezza.

In particolare, le seguenti deviazioni empiriche dalle strutture classiche sono state identificate in psicologia cognitiva [3, 4].

(a) **Errori nei giudizi probabilistici**. Gli individui giudicano la probabilità che si verifichi la congiunzione "A e B" (rispettivamente, disgiunzione "A o B") di due eventi A e B maggiore (rispettivamente, minore) della probabilità che si verifichi uno dei due, il che implica una violazione della legge di monotonicità in (6).

(b) **Errori nelle decisioni**. Gli individui preferiscono un'azione A ad un'azione B quando sono sicuri del verificarsi di un evento Z, e anche quando sono sicuri del non verificarsi di Z, ma preferiscono B ad A quando non sanno se Z si verificherà o meno, il che implica una violazione della legge della probabilità totale in (5).

Deviazioni di tipo (a) sono state identificate, in particolare, negli effetti di sovra- e sotto-estensione in giudizi di appartenenza sulle combinazioni dei concetti [5, 6] e nelle fallacie della congiunzione [7] e della disgiunzione [8]. Deviazioni di tipo (b) sono state identificate, in particolare, nell'effetto disgiunzione [9] e nelle violazioni della teoria dell'utilità attesa [10, 11].

È legittimo allora chiedersi se la probabilità Kolmogoroviana sia l'unico modo a disposizione per formalizzare l'incertezza sul verificarsi degli eventi. Esiste in effetti almeno una possibile alternativa: quella di utilizzare la struttura matematica della probabilità quantistica, che formalizza la struttura probabilistica degli eventi che si verificano a livello microscopico e che sono governati dalle leggi della meccanica quantistica (MQ). La probabilità quantistica non soddisfa infatti le condizioni matematiche della probabilità Kolmogoroviana [12, 13]. In effetti, a partire dagli anni Novanta del secolo scorso, il formalismo matematico della MQ è stato applicato con successo alla modellizzazione dei fenomeni cognitivi e sociali, come quelli nei punti (a) e (b), in cui l'applicazione di strutture classiche si è rivelata altamente problematica [3, 4, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. In contrapposizione infatti al **programma di ricerca di Tversky-Kahneman**, secondo cui le deviazioni empiriche dalle strutture classiche sono dovute a fallacie del ragionamento umano e vengono spiegate in termini di euristiche e *bias* cognitivi [26], il programma di ricerca della *quantum co-*

gnition parte dal presupposto che tali deviazioni rivelino strutture genuinamente quantistiche, come una forma di ragionamento emergente, nel pensiero umano [27, 28].

Prima di procedere ulteriormente, è bene tuttavia anticipare qualche *caveat* riguardo al *quantum cognition programme*, allo scopo di evitare fraintendimenti. Innanzitutto, solo il formalismo matematico della MQ, non la sua interpretazione fisica, viene utilizzato in tali domini cognitivi. Ciò implica, in particolare, che non è richiesta alcuna assunzione riguardo all'esistenza di processi quantistici microscopici che determinerebbero le deviazioni dalle strutture classiche menzionate sopra. Inoltre, il *quantum cognition programme* si discosta nettamente da altri programmi di ricerca, solo apparentemente simili, quali i programmi del *quantum brain* e della *quantum mind*, in cui si ipotizza che fenomeni quantistici microscopici siano responsabili dei processi cerebrali e della coscienza.

Perché allora usare strutture quantistiche nei domini cognitivi? Per rispondere a questa domanda, osserviamo che un crescente numero di studiosi di scienze cognitive e sociali, compresi i premi Nobel per l'economia Paul Samuelson [29], Amartya Sen [30] e Daniel Kahneman [31], concordano sul fatto che i giudizi e le decisioni sono processi attivi che creano e non si limitano a registrare. Più precisamente, in un giudizio o decisione, si verifica una interazione, a livello concettuale-cognitivo, tra l'oggetto del giudizio o decisione e l'individuo che giudica o decide. Nel corso di tale interazione, i cui dettagli non possono in generale essere né controllati né previsti, se non a livello probabilistico, l'individuo agisce come contesto di misura e influenza l'oggetto alternandone lo stato. Da questo punto di vista, giudizi o decisione ricorda da vicino un processo di misura quantistica, dove si verifica una interazione, a livello fisico, tra l'apparato macroscopico che esegue la misura e l'oggetto fisico che viene misurato. Nel corso di tale interazione, l'apparato agisce come contesto di misura e influenza l'oggetto misurato in un modo non controllabile né predicibile, se non a livello probabilistico. Questa analogia tra l'indeterminismo dei processi fisici microscopici e quello dei processi concettuali ha costituito il punto di partenza per gli studi sull'applicazione di strutture

quantistiche ai sistemi concettuali, come si vedrà nelle prossime sezioni.

Struttura e dinamica dei concetti

Una delle grandi sfide della psicologia cognitiva, anche per le sue applicazioni alla linguistica computazionale e all'intelligenza artificiale, è rappresentata dalla comprensione dei meccanismi di combinazione dei concetti e del modo in cui il significato può essere espresso da tali combinazioni. Secondo la visione classica, risalente ad Aristotele, tutte le istanze di un concetto condividono un insieme comune di proprietà definitorie, che risultano quindi necessarie e sufficienti. Tale visione classica è tuttavia in contrasto con alcune caratteristiche empiriche rivelate dal modo in cui gli individui usano i concetti in pratica. In primo luogo, i concetti hanno una struttura graduata: per esempio, gli individui giudicano l'esemplare Pettirosso più tipico dell'esemplare Cicogna, quando la tipicità è definita rispetto al concetto Uccello. In secondo luogo, il significato di un concetto dipende fortemente dal contesto in cui il concetto è espresso: per esempio, l'esemplare Serpente non è un esemplare tipico del concetto Animale Domestico, quindi Serpente farà registrare una bassa tipicità rispetto a tale concetto. Tuttavia, se si considera il concetto Strano Animale Domestico, allora è ragionevole ritenere che Serpente farà registrare un'alta tipicità rispetto a tale concetto (si veda, per esempio, [32]).

Per superare le difficoltà della visione classica, sono state proposte numerose teorie psicologiche dei concetti, per esempio, la teoria dei prototipi, la teoria degli esemplari, la teoria della teoria, ecc. (si veda, per esempio [33]). Alcune delle teorie che sono state proposte hanno poi suggerito una rappresentazione matematica esplicita dei concetti e delle loro combinazioni. Per esempio, un tentativo di superare la concezione aristotelica dei concetti utilizzando strutture matematiche classiche è costituito dalla rappresentazione dei concetti mediante insiemi *fuzzy*, introdotta da Zadeh negli anni Ottanta del secolo scorso [34]. Nella rappresentazione *fuzzy*, dato un insieme di esemplari \mathcal{X} e un insieme di concetti \mathcal{C} su cui siano definite una congiunzione e una disgiun-

zione, per ogni esemplare $X \in \mathcal{X}$, si assume che esista una **funzione di appartenenza graduata** $\mu_X : A \in \mathcal{C} \mapsto \mu_X(A) \in [0, 1]$ tale che la congiunzione "A e B" e la disgiunzione "A o B" dei concetti A e B soddisfino le seguenti regole (in cui la dipendenza da X è sottintesa per semplicità):

$$\mu(A \text{ e } B) = \min [\mu(A), \mu(B)], \quad (7)$$

$$\mu(A \text{ o } B) = \max [\mu(A), \mu(B)]. \quad (8)$$

Le equazioni (7) e (8) esprimono la **regola del minimo per la congiunzione fuzzy** e la **regola del massimo per la disgiunzione fuzzy**, rispettivamente.

Tuttavia, l'applicazione di strutture classiche e, in particolare, la rappresentazione *fuzzy*, porta a previsioni che sono in disaccordo con una serie di risultati sperimentali su semplici combinazioni di concetti. Tale disaccordo è espresso dai seguenti effetti cognitivi.

Effetto Guppy.¹ Gli individui giudicano l'esemplare Guppy come esempio molto tipico della congiunzione Pet-Fish, senza giudicare Guppy né esempio tipico di Pet né esempio tipico di Fish. Questo risultato è in disaccordo con l'Equazione (7) [35].

Sovra-/sotto-estensione dei pesi di appartenenza. Per numerosi esemplari, gli individui giudicano la probabilità, o peso, di appartenenza dell'esemplare rispetto alla congiunzione (rispettivamente, disgiunzione) maggiore (rispettivamente, minore) della probabilità, o peso, di appartenenza dell'esemplare rispetto ad uno o entrambi i concetti componenti. Questo risultato è in disaccordo con l'Equazione (7) (rispettivamente, (8)) [5, 6].

Contraddizioni *borderline*. Una contraddizione *borderline* è un enunciato della forma "John è alto e John non è alto", e viene giudicato vero per alcuni casi limite di "John". Questo risultato è in disaccordo con l'Equazione (7) [36].

Ne consegue il **problema della combinazione**, vale a dire, l'impossibilità di rappresentare consistentemente la combinazione di due (o più) concetti in termini della rappresentazione dei concetti componenti. Tale problema venne rile-

vato in modo eclatante in una serie di test sulla combinazione dei concetti naturali, eseguiti da James Hampton, psicologo della *City University of London*, verso la fine degli anni Ottanta del secolo scorso. Nel seguito verranno riportati alcuni dei risultati ottenuti da Hampton.

Si considerino, per esempio, i concetti naturali Frutta e Verdura, la loro congiunzione Frutta e Verdura, e la loro disgiunzione Frutta o Verdura. Hampton chiese ad un gruppo di individui di indicare su un questionario l'appartenenza a questi concetti di una serie di esemplari in una lista contenente Mela, Pomodoro, Broccoli, Oliva, Cocco, Mandorla, Fungo, Uvetta, Ghianda, ecc. Più precisamente, agli individui che partecipavano al test veniva chiesto di giudicare su una scala di Likert a 7 valori, $\{+3, +2, +1, 0, -1, -2, -3\}$, l'appartenenza di tali esemplari ai concetti Frutta e Verdura e alle loro combinazioni Frutta e Verdura e Frutta o Verdura. Un valore +3 indicava un giudizio di forte appartenenza dell'esemplare al concetto, un valore -3 indicava un giudizio di forte non-appartenenza, un valore 0 indicava che l'individuo non aveva alcuna preferenza rispetto all'appartenenza dell'esemplare al concetto. Le frequenze relative delle risposte positive venivano considerate, nel limite dei grandi numeri, probabilità, o pesi, di appartenenza. Hampton raccolse i pesi di appartenenza di numerosi esemplari rispetto a diversi concetti naturali, alla loro congiunzione ed alla loro disgiunzione, trovando deviazioni significative da strutture classiche ed introducendo una specifica terminologia per classificare tali deviazioni, come segue [5, 6].

Sia X un esemplare e siano $\mu(A)$, $\mu(B)$, $\mu(A \text{ e } B)$ e $\mu(A \text{ o } B)$ i pesi di appartenenza di X rispetto ai concetti A, B, alla congiunzione "A e B" e alla disgiunzione "A o B", rispettivamente. Si dirà che X è (**doppiamente**) **sovr-esteso rispetto alla congiunzione** se $\mu(A \text{ e } B) > \mu(A)$ (e) o $\mu(A \text{ e } B) > \mu(B)$. Si dirà che X è (**doppiamente**) **sotto-esteso rispetto alla disgiunzione** se $\mu(A \text{ o } B) < \mu(A)$ (e) o $\mu(A \text{ o } B) < \mu(B)$.

Recentemente, si è trovato che le deviazioni da strutture classiche e, in particolare, da modelli di probabilità Kolmogoroviana, dei dati di Hampton sono ancora più profonde degli effetti di sovra- e sotto-estensione [17, 37]. Sia infatti X

¹Il *guppy*, dal nome del suo scopritore, il naturalista inglese R. J. L. Guppy, è un piccolo pesce d'acqua dolce, di origine tropicale, simile al pesce rosso.

un esemplare e siano $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ e } B)$ i pesi di appartenenza di X rispetto ai concetti A , B e alla congiunzione "A e B", rispettivamente. Con riferimento alle strutture classiche definite nella sezione introduttiva, si dirà che tali pesi corrispondono a **dati classici per la congiunzione** se possono essere rappresentati in un modello probabilistico Kolmogoroviano, cioè, se esiste una σ -algebra \mathcal{A} , una probabilità Kolmogoroviana $p : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, e $E_A, E_B \in \mathcal{A}$ tali che:

$$\mu(A) = p(E_A), \quad (9)$$

$$\mu(B) = p(E_B), \quad (10)$$

$$\mu(A \text{ e } B) = p(E_A \cap E_B). \quad (11)$$

Si dimostra allora che $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ e } B)$ sono dati classici per la congiunzione se e solo se le seguenti disuguaglianze sono simultaneamente soddisfatte:

$$\mu(A \text{ e } B) - \min [\mu(A), \mu(B)] \leq 0, \quad (12)$$

$$\mu(A) + \mu(B) - \mu(A \text{ e } B) \leq 1 \quad (13)$$

[17, 37]. L'Equazione (12) esprime la legge di monotonicità della probabilità Kolmogoroviana relativamente alla congiunzione di due eventi (si veda l'Equazione (5)). Si noti che l'Equazione (12) non è sufficiente a garantire l'esistenza di un modello di probabilità Kolmogoroviana per una data terna di pesi $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ e } B)$.

È facile trovare dati non-classici per la congiunzione nello studio in [5]. Infatti, i pesi di appartenenza dell'esemplare *Rasoio* rispetto ai concetti *Arma*, *Strumento* e alla congiunzione *Arma e Strumento* sono 0.63, 0.68 e 0.83, rispettivamente, il che viola l'Equazione (12) e anche la regola del minimo per la congiunzione *fuzzy* (7). Utilizzando la terminologia di Hampton, si ha un **effetto di doppia sovra-estensione**, in questo caso.

Analogamente, la natura non - Kolmogoroviana della probabilità nei dati di Hampton sulla disgiunzione di due concetti non si riduce a effetti di sotto - estensione. Sia infatti X un esemplare e siano $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ o } B)$ i pesi di appartenenza di X rispetto ai concetti A , B e alla disgiunzione "A o B", rispettivamente. Si dirà che tali pesi corrispondono a **dati classici per la disgiunzione** se possono essere rappresentati in un modello probabilistico Kolmogoroviano, cioè, se esiste una σ -algebra \mathcal{A} , una probabilità Kol-

mogoroviana $p : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, e $E_A, E_B \in \mathcal{A}$ tali che:

$$\mu(A) = p(E_A), \quad (14)$$

$$\mu(B) = p(E_B), \quad (15)$$

$$\mu(A \text{ o } B) = p(E_A \cup E_B). \quad (16)$$

Si dimostra allora che $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ o } B)$ sono dati classici per la disgiunzione se e solo se le seguenti disuguaglianze sono simultaneamente soddisfatte:

$$\mu(A \text{ o } B) - \max [\mu(A), \mu(B)] \geq 0, \quad (17)$$

$$\mu(A) + \mu(B) - \mu(A \text{ o } B) \geq 0 \quad (18)$$

[17, 37]. L'Equazione (17) esprime la legge di monotonicità della probabilità Kolmogoroviana relativamente alla disgiunzione di due eventi (si veda l'Equazione (5)). Anche in questo caso, l'Equazione (17) non è sufficiente a garantire l'esistenza di un modello di probabilità Kolmogoroviana per una data terna di pesi $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ o } B)$.

È facile trovare dati non-classici per la disgiunzione nello studio in [6]. Infatti, i pesi di appartenenza dell'esemplare *Occhiali da Sole* rispetto ai concetti *Abbigliamento Sportivo*, *Attrezzatura Sportiva* e alla disgiunzione *Abbigliamento Sportivo o Attrezzatura Sportiva* sono 0.40, 0.20 e 0.10, rispettivamente, il che viola l'Equazione (17) e anche la regola del massimo per la disgiunzione *fuzzy* (8). In questo caso, si ha un **effetto di doppia sotto - estensione**. Se invece si considerano i pesi di appartenenza dell'esemplare *Oliva* rispetto ai concetti *Frutta*, *Verdura* e alla disgiunzione *Frutta o Verdura*, si trovano i valori 0.50, 0.10 e 0.80, rispettivamente, il che soddisfa l'Equazione (17) ma non la (18). In quest'ultimo caso, si ha dunque una violazione dalla probabilità Kolmogoroviana che non si riduce ad un effetto di sovra- o sotto- estensione.

La maggior parte dei dati raccolti da Hampton e da altri studiosi che si sono occupati dei meccanismi di combinazione dei concetti non possono essere riprodotti da modelli di probabilità Kolmogoroviana. Ne consegue che strutture probabilistiche classiche di questo tipo non sono in grado di rappresentare nemmeno le più semplici combinazioni di due concetti.

Nelle prossime sezioni si presenterà la prospettiva teorica generale che è stata elaborata nell'ambito della collaborazione Bruxelles-Leicester per rappresentare i sistemi concettuali e le loro interazioni. Tale prospettiva adotta il formalismo quantistico in spazi di Hilbert ed è motivata da due decenni di studi sui fondamenti epistemologici e matematici della MQ, in particolare, sulle motivazioni che giustificano l'uso di strutture quantistiche in determinati domini empirici.

Rappresentazione dei sistemi concettuali in spazi di Hilbert

Negli anni Sessanta e Settanta del secolo scorso, furono sviluppati diversi approcci ai fondamenti della MQ, i quali si proponevano di giustificare l'uso degli spazi di Hilbert nel formalismo della teoria a partire da assiomi fisicamente giustificati, relativi a nozioni ben definite e collegate in modo diretto alle operazioni che sono tipicamente eseguite in un laboratorio di fisica. Alcuni di questi approcci vennero detti *realistico-operazionali* e uno di essi venne inizialmente sviluppato a Ginevra [38, 39] e successivamente completato a Bruxelles (si veda, per esempio, [40]). Nell'approccio di Ginevra-Bruxelles, ogni sistema fisico viene astrattamente descritto in termini delle nozioni elementari ed operativamente definite di *stato*, *contesto* e *proprietà* e delle mutue relazioni statistiche (*sistema SCoP*). Se un sistema SCoP soddisfa alcuni assiomi, opportunamente scelti, allora tale sistema può essere rappresentato univocamente (a meno di isomorfismi) da una struttura algebrica in uno spazio di Hilbert [39, 40].

Discuteremo ora le ragioni che suggeriscono di applicare il formalismo matematico della MQ ai sistemi concettuali. Come si vedrà, l'uso di tale formalismo è giustificato dalle analogie nelle descrizioni *realistico-operazionali* di sistemi fisici e sistemi concettuali.

Un esperimento su un sistema fisico viene tipicamente eseguito in un laboratorio di fisica, che viene comunemente identificato con un dominio spazio-temporale. Il sistema fisico viene preliminarmente sottoposto a una procedura di preparazione da parte dello sperimentatore, al termine della quale il sistema si trova in uno stato

definito. Questo stato esprime aspetti realistici del sistema misurato, nel senso che, come conseguenza dell'essere in quello stato, il sistema ha alcune proprietà attuali indipendentemente da qualsiasi misura che può essere eseguita su di esso (*parte realistica*). Quando una misura viene eseguita sul sistema fisico, l'apparato macroscopico agisce come contesto di misura e interagisce, a livello fisico, con il sistema misurato alterandone lo stato in modo in generale non-deterministico (*parte operativa*).² Quindi, il sistema fisico, i suoi stati, i contesti, le proprietà e le reciproche relazioni statistiche sono rappresentati nel formalismo della MQ in spazi di Hilbert.

Si è recentemente dimostrato che una siffatta descrizione *realistico-operazionale* può essere elaborata per ogni sistema concettuale, sia esso un concetto, una combinazione di concetti, oppure un più complesso sistema decisionale [41]. Più precisamente, in un sistema concettuale, si possono introdurre, in analogia con un sistema fisico, le seguenti nozioni basilari:³

(i) i *test cognitivi* vengono eseguiti in un laboratorio di psicologia, che viene identificato con un dominio spazio-temporale;

(ii) il complesso delle procedure sperimentali concepite dallo sperimentatore, il dispositivo sperimentale e l'effetto cognitivo che si intende studiare definiscono un **sistema concettuale** A ;

(iii) le procedure sperimentali adottate (per esempio, il contenuto concettuale del testo introduttivo in un questionario), inoltre, preparano A in un stato definito p_A ;

²La nozione di *determinismo* è piuttosto complessa ed è tuttora oggetto di accesi dibattiti in filosofia della scienza. Intuitivamente, si parla di *determinismo* quando ad uno stato presente completamente definito corrisponde un unico stato futuro ad esso compatibile e altrettanto definito. Con riferimento a tale interpretazione intuitiva, si può allora dire che le trasformazioni di stato che coinvolgono i sistemi fisici descritti dalla fisica classica sono fondamentalmente *deterministiche*. Per quanto visto brevemente in questa sezione, invece, le trasformazioni di stato che coinvolgono i sistemi fisici nel corso di una misura in MQ sono invece *non-deterministiche*, in quanto lo stato iniziale non determina in modo univoco lo stato finale.

³Si noti che questa descrizione di un sistema concettuale diverge dalla visione classica, e anche dalle successive estensioni *fuzzy*, dei concetti, in quanto un concetto non è più semplicemente considerato come un insieme di elementi (o esemplari), ma ha una struttura più complessa e dipende in modo cruciale dal contesto.

(iv) un contesto e ha natura concettuale e può influenzare A alterandone lo stato in modo non-deterministico, cioè tale che solo la probabilità di transizione $\mu(p, e, p_A)$ dallo stato iniziale p_A ad uno stato finale p è nota;

(v) il sistema concettuale A può possedere una data proprietà a , a seconda del contesto e e dello stato p_A .

Una volta introdotti, in analogia con la descrizione realistico-operazionale di un sistema fisico, gli elementi fondamentali di un sistema concettuale, si procederà alla rappresentazione matematica di sistemi concettuali e dei rispettivi stati, contesti, proprietà e mutue relazioni statistiche utilizzando il formalismo della MQ in spazi di Hilbert. Nella prossime due sezioni discuteremo tale rappresentazione, distinguendo tra sistemi concettuali individuali e combinazioni concettuali.

Rappresentazione dei concetti individuali

Si consideri un test cognitivo consistente in un questionario in cui viene chiesto ad un gruppo di partecipanti di giudicare se un dato esemplare, per esempio, *Oliva*, appartenga al concetto *Frutta*. Tale giudizio ha due possibili risultati, "si" e "no", e, pertanto, corrisponde alla misura di una proprietà a_{Oliva} sul concetto *Frutta*. Il concetto *Frutta* viene descritto come un sistema concettuale preparato, mediante il questionario del test, in uno stato iniziale p_{Frutta} . Ciascuno degli individui che partecipano al test interagisce con il sistema concettuale *Frutta* preparato nello stato iniziale p_{Frutta} e ne trasforma lo stato in un modo che è, in generale, non-deterministico (si veda la nota 2). Se l'interazione produce, per esempio, il risultato "si" relativamente all'esemplare *Oliva*, lo stato del sistema concettuale *Frutta* verrà trasformato nello stato finale p_{Oliva} .⁴ L'insieme degli individui che partecipano al test agisce quindi come un contesto (di misura) complessivo e per il sistema concettuale *Frutta*. Una volta raccolte tutte le risposte individuali, se ne ottiene una distribuzione statistica $\mu(p_{\text{Oliva}}, e, p_{\text{Frutta}})$, che viene considerata, nel limite dei grandi nume-

⁴Nel gergo quantistico, misure siffatte sono dette misure ideali di prima specie.

ri, come la probabilità, o peso, di appartenenza dell'esemplare *Oliva* rispetto al concetto *Frutta*.

Tale descrizione suggerisce che un sistema concettuale possa essere modellizzato utilizzando la rappresentazione quantistica di stati, contesti, proprietà e le mutue relazioni statistiche nello spazio di Hilbert. Più precisamente, utilizzando la notazione di Dirac tipicamente esposta nei manuali di MQ [42], il sistema concettuale *Frutta* viene associato ad uno spazio di Hilbert \mathcal{H} sul campo \mathbb{C} dei numeri complessi, lo stato iniziale p_{Frutta} viene rappresentato da un vettore unitario (normalizzato) $|p_{\text{Frutta}}\rangle$ di \mathcal{H} , la proprietà che *Oliva* sia giudicato un esemplare del concetto *Frutta* viene rappresentata da un operatore di proiezione ortogonale M_{Oliva} su \mathcal{H} , il contesto della misura e viene rappresentato da un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} o, equivalentemente, dalla misura spettrale $\{M_{\text{Oliva}}, \mathbb{1} - M_{\text{Oliva}}\}$, dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità.⁵ Infine, la probabilità, o peso, di appartenenza $\mu(p_{\text{Oliva}}, e, p_{\text{Frutta}})$ è calcolata mediante la regola di Born della probabilità quantistica, cioè, $\mu(p_{\text{Oliva}}, e, p_{\text{Frutta}}) = \|M_{\text{Oliva}}|p_{\text{Frutta}}\rangle\|^2$.

Nella sezione successiva, si presenterà un'esposizione semplificata della rappresentazione matematica generale che è stata elaborata per la congiunzione e la disgiunzione di due concetti.

Rappresentazione della combinazione di due concetti

La rappresentazione matematica che tratteggiamo in questa sezione, sebbene semplificata e giustificata dalla prospettiva teorica generale presentata, per esempio, in [17, 19, 20, 37, 43, 44, 45], permette di riprodurre la maggior parte dei dati raccolti da Hampton sulla congiunzione e la disgiunzione di due concetti.

Iniziamo dal modello quantistico per la congiunzione di due concetti. Sia X un esemplare, e siano $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ e } B)$ i pesi di appartenenza di X rispetto ai concetti A , B e alla loro congiunzione " A e B ", rispettivamente. Ciascuno

⁵Ricordiamo che un operatore lineare $O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ si dice autoaggiunto se, per ogni $|A\rangle, |B\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle A|O|B\rangle = \langle B|O|A\rangle^*$, dove $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ denota il prodotto scalare complesso definito su \mathcal{H} e $\langle B|O|A\rangle^*$ è il complesso coniugato del numero complesso $\langle B|O|A\rangle$. Se l'operatore autoaggiunto O è anche idempotente, cioè, $O^2 = O$, O viene detto operatore di proiezione ortogonale.

di questi concetti è associato nel modello quantistico allo spazio di Hilbert \mathcal{H} sul campo \mathbb{C} dei numeri complessi. Lo stato iniziale del concetto A è rappresentato dal vettore unitario $|A\rangle \in \mathcal{H}$, cioè, $\langle A|A\rangle = 1$, e lo stato iniziale del concetto B è rappresentato dal vettore unitario $|B\rangle \in \mathcal{H}$, cioè, $\langle B|B\rangle = 1$. Si supponga, per semplicità, che $|A\rangle$ e $|B\rangle$ siano ortogonali, cioè, $\langle A|B\rangle = 0$. Inoltre, lo stato iniziale della congiunzione concettuale "A e B" è rappresentato dalla combinazione lineare⁶

$$|A \text{ e } B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle). \quad (19)$$

Infine, la misura di un individuo che giudichi l'appartenenza dell'esemplare X rispetto ai concetti A, B e "A e B" è rappresentata dall'operatore di proiezione ortogonale M su \mathcal{H} .

Si usi ora la regola di Born della probabilità quantistica per calcolare i pesi, o probabilità, di appartenenza. Si ha:

$$\mu(A) = \langle A|M|A\rangle, \quad (20)$$

$$\mu(B) = \langle B|M|B\rangle, \quad (21)$$

$$\mu(A \text{ e } B) = \langle A \text{ e } B|M|A \text{ e } B\rangle. \quad (22)$$

Usando le equazioni (20) e (21), la linearità dello spazio di Hilbert \mathcal{H} e la proprietà $\langle B|M|A\rangle^* = \langle A|M|B\rangle$ (l'operatore di proiezione ortogonale M è in particolare autoaggiunto, si veda la nota 5), l'Equazione (22) diventa:

$$\begin{aligned} \mu(A \text{ e } B) &= \frac{1}{2}(\langle A| + \langle B|)M(|A\rangle + |B\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle A|M|A\rangle + \langle A|M|B\rangle \\ &\quad + \langle B|M|A\rangle + \langle B|M|B\rangle) \\ &= \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2} + \text{Re} \langle A|M|B\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

dove $\text{Re} \langle A|M|B\rangle$ è la parte reale del numero complesso $\langle A|M|B\rangle$. Si riconosce in $\text{Re} \langle A|M|B\rangle$ il termine di interferenza, che è tipico dell'esperimento quantistico della doppia fenditura. La sua presenza, infatti, esprime interferenza quantistica, dal momento che questo termine produce una fluttuazione intorno al valore medio $\frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(B))$, che è ciò che ci si aspette-

⁶Nel gergo quantistico, si dice che lo stato rappresentato dal vettore unitario in (19) è la "sovrapposizione" degli stati rappresentati dai vettori unitari $|A\rangle$ e $|B\rangle$.

rebbe classicamente nell'esperimento della doppia fenditura. Si noti, inoltre, il ruolo fondamentale svolto dai numeri complessi in questa rappresentazione.

È possibile elaborare ulteriormente l'Equazione (23) per ottenere la formula quantistica per la probabilità della congiunzione, distinguendo due casi, come segue.

(i) Se $\mu(A) + \mu(B) \leq 1$, si ha:

$$\mu(A \text{ e } B) = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2} + \sqrt{\mu(A)\mu(B)} \cos \theta_c. \quad (24)$$

(ii) Se $\mu(A) + \mu(B) > 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \mu(A \text{ e } B) &= \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2} \\ &\quad + \sqrt{1 - \mu(A)}\sqrt{1 - \mu(B)} \cos \theta_c. \end{aligned} \quad (25)$$

Nelle Equazioni (24) e (25), θ_c denota l'angolo di interferenza per la congiunzione.

Il modello quantistico presentato sopra può essere effettivamente realizzato nello spazio di Hilbert complesso \mathbb{C}^3 di tutte le triple ordinate di numeri complessi. Sia infatti $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canonica ortogonale (ON) di \mathbb{C}^3 . Distinguiamo nuovamente due casi, come segue.

(I) Se $\mu(A) + \mu(B) \leq 1$, $\mu(A), \mu(B) \neq 0, 1$, le equazioni (20)–(24) sono soddisfatte dalla scelta:

$$|A\rangle = \left(\sqrt{1 - \mu(A)}, 0, \sqrt{\mu(A)} \right), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} |B\rangle &= e^{i\theta_c} \left(-\sqrt{\frac{\mu(A)\mu(B)}{1 - \mu(A)}}, \right. \\ &\quad \left. -\sqrt{\frac{1 - \mu(A) - \mu(B)}{1 - \mu(A)}}, \sqrt{\mu(B)} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

mentre l'operatore di proiezione ortogonale M proietta sul sottospazio 1-dimensionale generato dal vettore $(0, 0, 1)$.

(II) Se $\mu(A) + \mu(B) > 1$, $\mu(A), \mu(B) \neq 0, 1$, le equazioni (20)–(23) e (25) sono soddisfatte dalla scelta:

$$|A\rangle = \left(\sqrt{\mu(A)}, 0, \sqrt{1 - \mu(A)} \right), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} |B\rangle &= e^{i\theta_c} \left(\sqrt{\frac{(1 - \mu(A))(1 - \mu(B))}{\mu(A)}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\frac{\mu(A) + \mu(B) - 1}{\mu(A)}}, -\sqrt{1 - \mu(B)} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

mentre l'operatore di proiezione ortogonale M proietta sul sottospazio 2-dimensionale generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.⁷

Si consideri nuovamente l'esemplare Rasoio rispetto ai concetti Arma, Strumento e alla congiunzione Arma e Strumento. Poiché $\mu(A) + \mu(B) = 0.63 + 0.78 = 1.41 > 1$, la rappresentazione quantistica richiede l'uso delle equazioni (25), (28) e (29). In particolare, dall'Equazione (25) si ottiene:

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{2\mu(A \text{ e } B) - \mu(A) - \mu(B)}{\sqrt{1 - \mu(A)}\sqrt{1 - \mu(B)}}\right) = 64.02^\circ. \quad (30)$$

Pertanto, i pesi di appartenenza $\mu(A) = 0.63$, $\mu(B) = 0.78$ e $\mu(A \text{ e } B) = 0.83$ sono rappresentati da $\theta_c = 64.02^\circ$, $|A\rangle = (0.79, 0, 0.61)$ e $|B\rangle = e^{i64.02^\circ}(0.36, 0.81, -0.47)$ nel modello quantistico. In questo caso, la doppia sovra-estensione dell'esemplare Rasoio rispetto alla congiunzione Arma e Strumento può essere spiegata come un effetto di interferenza costruttiva ($\theta_c = 64.02^\circ < 90^\circ$) tra i concetti componenti Arma e Strumento nella sovrapposizione Arma e Strumento.

Veniamo ora al modello quantistico per la disgiunzione di due concetti. Nuovamente, sia X un esemplare e siano $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ o } B)$ i pesi di appartenenza di X rispetto ai concetti A , B e alla loro disgiunzione " $A \text{ o } B$ ", rispettivamente. I concetti in questione sono associati allo spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} , mentre gli stati iniziali dei concetti A e B sono rappresentati dai vettori unitari ortogonali $|A\rangle$ e $|B\rangle$, rispettivamente, e lo stato iniziale della disgiunzione concettuale " $A \text{ o } B$ " è rappresentato dal vettore unitario $|A \text{ o } B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle)$ ottenuto sovrapponendo gli stati A e B (si vedano l'equazione (19) e la nota 6). Infine, la misura di un individuo che giudichi l'appartenenza dell'esemplare X rispetto ai concetti A , B e " $A \text{ o } B$ " è rappresentata dall'operatore di proiezione ortogonale M su \mathcal{H} .

Usando nuovamente la regola di Born della probabilità quantistica per i pesi di appartenenza $\mu(A)$ e $\mu(B)$, come in (20) e (21), rispettivamente,

⁷La situazione in cui $\mu(A) = 0$ o $\mu(B) = 0$ richiede ulteriori dettagli tecnici e una struttura di spazio di Hilbert particolare, lo spazio di Fock, come si vedrà nel seguito. Non insistiamo su questo aspetto, per brevità.

si trova per $\mu(A \text{ o } B)$:

$$\begin{aligned} \mu(A \text{ o } B) &= \langle A \text{ o } B | M | A \text{ o } B \rangle \\ &= \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2} + \text{Re} \langle A | M | B \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Anche nel caso della disgiunzione, l'Equazione (31) può essere elaborata ulteriormente per ottenere la formula quantistica per la probabilità della disgiunzione, la quale prende matematicamente due forme, come segue.

(i') Se $\mu(A) + \mu(B) \leq 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \mu(A \text{ o } B) &= \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2} \\ &+ \sqrt{\mu(A)\mu(B)} \cos \theta_d. \end{aligned} \quad (32)$$

(ii') Se $\mu(A) + \mu(B) > 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \mu(A \text{ o } B) &= \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2}, \\ &+ \sqrt{1 - \mu(A)}\sqrt{1 - \mu(B)} \cos \theta_d. \end{aligned} \quad (33)$$

Nelle Equazioni (32) e (33), θ_d denota l'angolo di interferenza per la disgiunzione. Anche in questo caso, il modello quantistico può essere realizzato nello spazio di Hilbert complesso \mathbb{C}^3 , e formule analoghe alle equazioni (26)–(29) valgono con θ_d al posto di θ_c [17].

Si consideri nuovamente l'esemplare Occhiali da Sole rispetto ai concetti Abbigliamento Sportivo, Attrezzatura Sportiva e alla disgiunzione Abbigliamento Sportivo o Attrezzatura Sportiva. Poiché $\mu(A) + \mu(B) = 0.40 + 0.20 = 0.60 < 1$, la rappresentazione quantistica richiede l'uso delle equazioni (26) and (27), con θ_d al posto di θ_c , e (32). In particolare, dall'Equazione (32) si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta_d &= \arccos\left(\frac{2\mu(A \text{ o } B) - \mu(A) - \mu(B)}{\sqrt{\mu(A)\mu(B)}}\right) \\ &= 135.00^\circ. \end{aligned} \quad (34)$$

Pertanto i pesi di appartenenza $\mu(A) = 0.40$, $\mu(B) = 0.20$ e $\mu(A \text{ o } B) = 0.10$ sono rappresentati da $\theta_d = 135.00^\circ$, $|A\rangle = (0.77, 0, 0.63)$ e $|B\rangle = e^{i135.00^\circ}(-0.37, -0.82, 0.45)$ nel modello quantistico. Perciò, la doppia sotto-estensione dell'esemplare Occhiali da Sole rispetto alla disgiunzione Abbigliamento Sportivo o

Attrezzatura Sportiva può essere spiegata come un effetto di interferenza distruttiva ($90^\circ < \theta_d = 135.00^\circ < 180^\circ$) tra i concetti componenti Abbigliamento Sportivo and attrezzatura Sportiva nella sovrapposizione Abbigliamento Sportivo o attrezzatura Sportiva.

Le formule quantistiche per la probabilità in (23) e (31) permettono di rappresentare la maggior parte dei dati di Hampton sulle congiunzioni e disgiunzioni di due concetti. Questo modello non è tuttavia in grado di rappresentare combinazioni di due concetti in tutta la loro generalità (si veda la nota 7). Infatti, in questo caso è necessaria una struttura più generale, a causa di ragioni che diventeranno chiare nella sezione finale. Questa struttura più generale è uno spazio di Fock a due settori \mathcal{F} , cioè, $\mathcal{F} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ (\oplus denota la somma diretta di spazi vettoriali), dove lo spazio di Hilbert individuale \mathcal{H} è chiamato 'settore 1 di \mathcal{F} ', mentre lo spazio di Hilbert prodotto tensoriale $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ è chiamato settore 2 di \mathcal{F} [17, 28, 37, 49].

Una prospettiva teorica generale

Partendo dalla modellizzazione della congiunzione e della disgiunzione di due concetti presentate nelle due sezioni precedenti, è stata elaborata una prospettiva teorica generale per rappresentare i concetti naturali e le loro combinazioni che utilizza gli spazi di Fock. Tale prospettiva generale ha permesso di riprodurre i dati sperimentali ottenuti in diversi test sulla combinazione dei concetti e ha mostrato che le deviazioni da strutture classiche osservate in questi test può essere spiegata in termini di effetti genuinamente quantistici, per esempio, contestualità, emergenza, interferenza e sovrapposizione, si veda la Figura 1. La stessa prospettiva è stata applicata con successo all'effetto *Guppy* [28] e alle contraddizioni *borderline* [37].

È stata inoltre identificata una violazione sperimentale delle disuguaglianze di Bell in una specifica combinazione concettuale e ne è stato elaborato un modello in spazi di Hilbert, mostrando che la violazione può essere spiegata in termini di *entanglement* tra i concetti componenti [46, 47]. Infine, è stato identificato un

fenomeno di indistinguibilità quantistica di tipo Bose-Einstein in specifiche combinazioni di concetti identici, per esempio, Undici Animali [48].

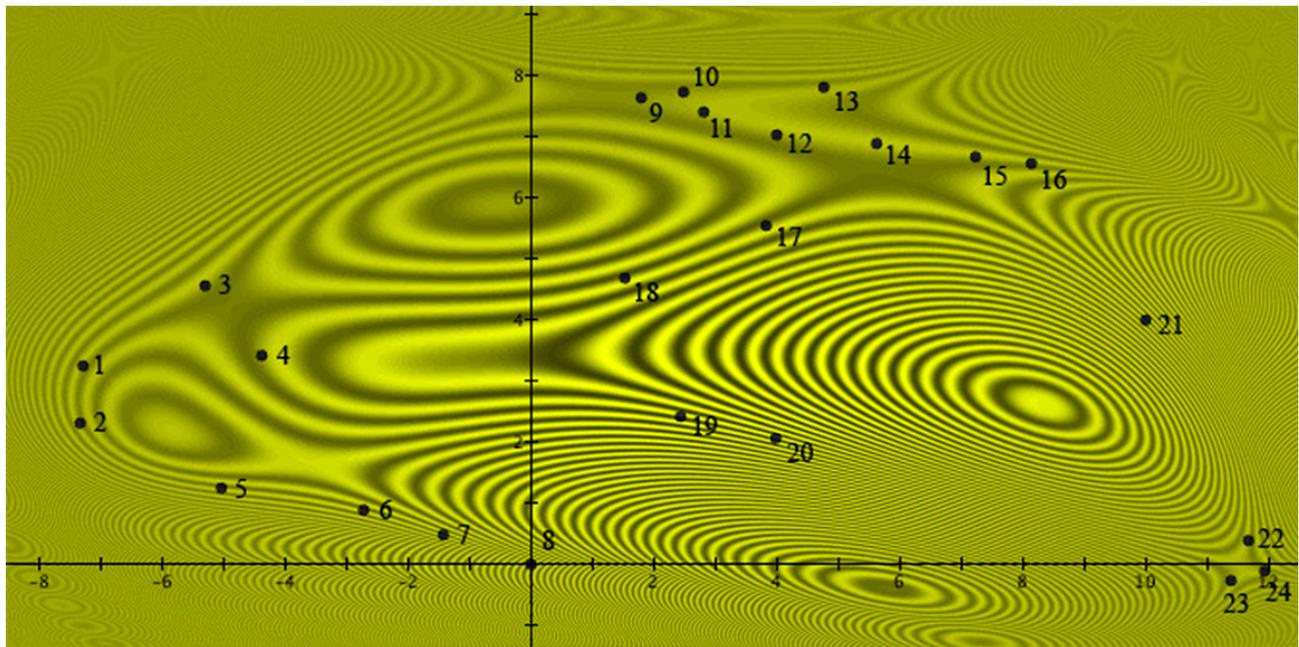
Più recentemente, i test di Hampton sono stati estesi a congiunzioni e negazioni di due concetti naturali [49, 50]. Più precisamente, i pesi di appartenenza di diversi esemplari sono stati testati rispetto ai concetti A , B , alle loro negazioni "non A " e "non B ", e alle congiunzioni " A e B ", " A e non B ", "non A e B " e "non A e non B ". In questi nuovi test, sono stati trovati sistematici effetti di sovra-estensione e doppia sovra-estensione in tutte le congiunzioni " A e B ", " A e non B ", "non A e B " e "non A e non B ", come previsto. Tuttavia, è stato anche scoperto un nuovo effetto non-classico. Infatti, è stata identificata una inaspettata, sistematica e significativa deviazione dalla legge marginale della probabilità Kolmogoroviana. Si consideri, ad esempio, la quantità

$$\mu(A \text{ e } B) + \mu(A \text{ e non } B) - \mu(A), \quad (35)$$

il cui valore dovrebbe essere identicamente nulla in un modello di probabilità Kolmogoroviana, per ogni esemplare e per ogni coppia di concetti. Dal momento che i pesi di appartenenza non possono in generale essere modellizzati da probabilità Kolmogoroviane, come si è visto nelle sezioni precedenti, ci si aspetterebbe che il valore dell'espressione nell'Equazione (35) sia differente da 0 e dipenda dall'esemplare e dalla coppia di concetti. Si è invece trovato che la seguente uguaglianza risulta soddisfatta:

$$\mu(A \text{ e } B) + \mu(A \text{ e non } B) - \mu(A) \approx \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Inoltre, si è trovato che il valore numerico non dipende né dall'esemplare né dalla coppia di concetti che sono testati. Questo comportamento altamente non-classico è esattamente previsto nel modello generale in spazi di Fock per la congiunzione e la negazione di due concetti [50, 51]. Ne segue che la prospettiva teorica generale che abbiamo presentato in queste sezioni può essere ulteriormente testata e permette di prevedere nuovi effetti non-classici nella combinazione dei concetti che non erano stati osservati negli studi precedenti sull'argomento.



| | | | | | |
|----------|--------------|-----------------|---------------|-----------------|-----------------|
| 1 Almond | 5 Coconut | 9 Mustard | 13 Garlic | 17 Green Pepper | 21 Broccoli |
| 2 Acom | 6 Raisin | 10 Wheat | 14 Mushroom | 18 Yam | 22 Rice |
| 3 Peanut | 7 Elderberry | 11 Root Ginger | 15 Watercress | 19 Tomato | 23 Parsley |
| 4 Olive | 8 Apple | 12 Chili Pepper | 16 Lentils | 20 Pumpkin | 24 Black Pepper |

Figura 1: Effetti di interferenza ottenuti nella disgiunzione *Frutta o Verdura* dei concetti naturali *Frutta e Verdura*. Nella figura si riconoscono le frange di interferenza che sono tipicamente osservate nell'esperimento quantistico della doppia fenditura. Si veda [20], Figura 3, per i dettagli su come la figura è stata ottenuta.

Applicazioni a note fallacie cognitive

Altri fenomeni sono stati identificati nelle scienze cognitive dove l'applicazione di strutture matematiche classiche conduce a risultati in disaccordo con i dati sperimentali. In particolare:

(i) le fallacie della congiunzione e della disgiunzione costituiscono esempi di situazioni in cui i giudizi probabilistici non sono in accordo con la legge di monotonicità (5) della probabilità Kolmogoroviana.

(ii) l'effetto disgiunzione costituisce un esempio di situazione in cui le decisioni in presenza di incertezza non sono in accordo con la legge della probabilità totale (6) in probabilità Kolmogoroviana.

Mostreremo nelle prossime due sezioni che il formalismo quantistico in spazi di Hilbert usato per modellizzare la congiunzione e la disgiunzione di due concetti può essere applicato con successo alla modellizzazione sia delle fallacie della congiunzione e della disgiunzione al punto (i), che dell'effetto disgiunzione al punto (ii). Tali

effetti possono quindi essere spiegati in termini di strutture genuinamente quantistiche, come quelle identificate nelle sezioni precedenti.

Le fallacie della congiunzione e della disgiunzione

Tversky e Kahneman scoprirono nel 1983 la fallacia della congiunzione in un test che conteneva la seguente storia riguardante una ipotetica donna chiamata Linda.

“Linda ha 31 anni, è single, estroversa e molto brillante. Ha una laurea in filosofia. Da studentessa, era profondamente impegnata in questioni di discriminazione e giustizia sociale e ha anche partecipato a manifestazioni antinucleari.” [7]

Ai partecipanti veniva chiesto quale delle seguenti alternative essi giudicassero più probabile:

- (1) Linda è una cassiera di banca;
- (2) Linda è una cassiera di banca ed è attiva nel movimento femminista.

Complessivamente, l'85% dei partecipanti giudicava l'opzione (2) più probabile dell'opzione (1). Tale risultato sperimentale è in disaccordo con la legge di monotonicità della probabilità Kolmogoroviana relativamente alla congiunzione (Equazione (5)), donde la fallacia della congiunzione.

Esiste una vasta evidenza empirica che conferma i risultati di Tversky e Kahneman sull'esistenza della fallacia della congiunzione (si veda, per esempio, [3, 52, 53]), e numerose ipotesi sono state proposte per spiegarne l'origine. Nessuna di esse è però esente da critiche. Per esempio, Tversky e Kahneman ipotizzarono l'esistenza di *bias* cognitivi ed euristiche nei giudizi individuali. Tale proposta risulta, tra l'altro, compatibile con la teoria della *bounded rationality* proposta da Herbert Simon negli anni Cinquanta del secolo scorso [54]. Più precisamente, Tversky e Kahneman suggerirono l'euristica della rappresentatività come possibile spiegazione: gli individui giudicherebbero l'evento "essere femminista e cassiera di banca" più rappresentativo dell'evento "essere cassiera di banca" per le attività di Linda. Tale ipotesi funziona a livello intuitivo, tuttavia è necessario ipotizzare differenti euristiche per adattare diversi tipi di fallacie [52]. Una proposta alternativa suggerisce l'ipotesi dell'incomprensione: gli individui fraintenderebbero il problema di Linda nel test, nel senso che non interpreterebbero correttamente i termini "e" e/oppure "probabilità" in esso. Si osserva, tuttavia, che la fallacia si manifesta anche quando tali termini non vengono esplicitamente menzionati nel test [53]. Un primo tentativo di applicare strutture quantistiche viene dalla ipotesi degli effetti di ordine: gli individui giudicherebbero l'enunciato "Linda è una femminista ed è una cassiera di banca" come una sequenza ordinata, prima "Linda è una femminista", poi "Linda è una cassiera di banca". Secondo i proponenti, i due enunciati asseriscono proprietà incompatibili nel senso quantistico usuale, il che genera la fallacia della congiunzione.⁸ Nuovi esperimenti sembrano tuttavia confermare che la fallacia è

⁸Nel gergo quantistico, due proprietà a e b si dicono incompatibili se sono rappresentate da operatori di proiezione ortogonale M_a e M_b , rispettivamente, tali che $M_a M_b \neq M_b M_a$. Questa condizione implica che la probabilità di trovare a e b in una misura dipende in generale dall'ordine con cui a e b sono misurate.

indipendente da tali effetti di ordine [3, 18, 21].

Le osservazioni fatte sopra indicano che la fallacia della congiunzione è ancora un problema aperto in psicologia cognitiva.

Un esperimento più completo venne eseguito da Morier e Borgida nel 1984 [8]. Ai partecipanti veniva chiesto di giudicare la probabilità dei seguenti eventi:

A : Linda è una femminista;

B : Linda è una cassiera di banca;

' A e B ': Linda è una femminista e una cassiera di banca;

' A o B ': Linda è una femminista o una cassiera di banca.

Le rispettive probabilità erano ordinate nel modo seguente:

$$\mu(A) = 0.83 > 0.60 = \mu(A \text{ o } B), \quad (37)$$

$$\mu(A \text{ e } B) = 0.36 > 0.26 = \mu(B). \quad (38)$$

L'Equazione (37) esprime la fallacia della congiunzione, mentre l'Equazione (38) esprime una nuova fallacia, relativa alla disgiunzione e nota in letteratura con il nome di fallacia della disgiunzione [8]. Il test metteva quindi in evidenza l'esistenza simultanea di due fallacie, una per la congiunzione e una per la disgiunzione.

Nella prospettiva generale per i sistemi concettuali presentata nelle sezioni precedenti, la fallacia della congiunzione viene considerata come un effetto di sovra-estensione rispetto alla congiunzione di due concetti. Utilizzando la terminologia tipica della teoria dei concetti, infatti, lo studio della fallacia della congiunzione viene ricondotto al problema dell'appartenenza dell'esemplare Linda ai concetti Femminista (A), Cassiera di Banca (B) e alla loro congiunzione Femminista e Cassiera di Banca (' A e B '). Sia $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ e } B)$ la probabilità che Linda sia giudicata femminista, cassiera di banca e femminista e cassiera di banca, rispettivamente, in un test cognitivo. Appliciamo alla fallacia della congiunzione il modello quantistico in spazi di Hilbert per la congiunzione di due concetti, come segue [44, 45].

Si considerino le Equazioni (37) e (38). Poiché $\mu(A \text{ e } B) = 0.36$ e $\mu(A) + \mu(B) = 0.83 + 0.26 = 1.09 > 1$, si possono usare le equazioni (20)–(23),

(25), (28) and (29), ottenendo

$$\begin{aligned}\theta_c &= 121.44^\circ, \\ |A\rangle &= (0.91, 0, 0.41), \\ |B\rangle &= e^{i121.44^\circ} (0.39, 0.33, -0.86),\end{aligned}\quad (39)$$

nello spazio di Hilbert \mathbb{C}^3 , dove il vettore unitario $|A\rangle$ rappresenta il concetto Femminista, il vettore unitario $|B\rangle$ rappresenta il concetto Cassiera di Banca e θ_c è l'angolo di interferenza per la congiunzione.

Il modello quantistico per la congiunzione di due concetti permette di riprodurre fedelmente i dati di vari test sulle fallacie congiuntive [44, 55, 56]. Esso permette inoltre di spiegare la fallacia della congiunzione assumendo che, quando si considera l'esemplare Linda, insieme alla sua storia, i concetti Femminista e Cassiera di Banca interferiscono distruttivamente nella congiunzione Femminista e Cassiera di Banca, inteso come un nuovo emergente sistema concettuale. A differenza di altri modelli quantistici, questo modello predice anche l'esistenza di doppie fallacie della congiunzione, cioè di situazioni in cui $\mu(A \text{ e } B) > \max[\mu(A), \mu(B)]$, in analogia con gli effetti di doppia sovra-estensione osservati nella congiunzione di due concetti [18, 44].

Analogamente, la fallacia della disgiunzione viene considerata come un effetto di sotto-estensione rispetto alla disgiunzione di due concetti, e lo studio della fallacia viene ricondotto al problema dell'appartenenza dell'esemplare Linda ai concetti Femminista (A), Cassiera di Banca (B) e alla loro disgiunzione Femminista o Cassiera di Banca ($A \text{ o } B$). Siano $\mu(A)$, $\mu(B)$ e $\mu(A \text{ o } B)$ la probabilità che Linda sia giudicata femminista, cassiera di banca e femminista o cassiera di banca, rispettivamente, in un test cognitivo. Appliciamo alla fallacia della disgiunzione il modello quantistico in spazi di Hilbert per la disgiunzione di due concetti, come segue [44, 45].

Poiché $\mu(A \text{ o } B) = 0.60$ e $\mu(A) + \mu(B) = 0.83 + 0.26 = 1.09 > 1$, si possono utilizzare le equazioni (20), (21), (28) e (29) con θ_d al posto

di θ_c , (31) e (33), ottenendo:

$$\begin{aligned}\theta_d &= 81.08^\circ \\ |A\rangle &= (0.91, 0, 0.41) \\ |B\rangle &= e^{i81.08^\circ} (0.39, 0.33, -0.86)\end{aligned}\quad (40)$$

nello spazio di Hilbert \mathbb{C}^3 , dove il vettore unitario $|A\rangle$ rappresenta il concetto Femminista, il vettore unitario $|B\rangle$ rappresenta il concetto Cassiera di Banca e θ_d è l'angolo di interferenza per la disgiunzione.

Il modello quantistico per la disgiunzione di due concetti permette di riprodurre fedelmente i dati di vari test sulle fallacie disgiuntive [44, 55, 56]. Esso permette inoltre di spiegare la fallacia della disgiunzione assumendo che, quando si considera l'esemplare Linda, insieme alla sua storia, i concetti Femminista e Cassiera di Banca interferiscono costruttivamente nella disgiunzione Femminista o Cassiera di Banca, inteso come un nuovo emergente sistema concettuale. A differenza di altri modelli quantistici, questo modello predice anche l'esistenza di doppie fallacie della disgiunzione, cioè di situazioni in cui $\mu(A \text{ o } B) < \min[\mu(A), \mu(B)]$, in analogia con gli effetti di doppia sotto-estensione osservati nella disgiunzione di due concetti [18, 44].

L'analisi che precede mostra che strutture quantistiche emergono nella modellizzazione di effetti cognitivi che sono altamente problematici se si utilizzano strutture classiche. La medesima conclusione può essere ottenuta studiando l'effetto disgiunzione.

L'effetto disgiunzione

L'effetto disgiunzione è un esempio di errore decisionale (si veda il punto (b) nella sezione introduttiva) e mostra che le decisioni umane non sono in generale in accordo con il principio della cosa certa, uno degli assiomi fondamentali della teoria dell'utilità attesa di Leonard Savage [57].

Il principio della cosa certa venne suggerito a Savage dalla seguente storia.

“Un uomo d'affari considera l'acquisto di un determinato immobile. Egli ritiene che l'esito delle prossime elezioni presidenziali sia rilevante per la de-

cisione sull'acquisto. Quindi, [...], si chiede se comprerebbe se sapesse che il candidato democratico avrebbe vinto, e scopre che lo farebbe. Allo stesso modo, egli si chiede se comprerebbe se sapesse che il candidato repubblicano avrebbe vinto, e scopre che ancora lo farebbe. Vedendo che avrebbe comprato in entrambi i casi, decide che dovrebbe comprare, anche se non sa quale evento si verificherà." [57]

Tversky e Shafir testarono la validità del principio della cosa certa in un test che consisteva nel proporre ad un gruppo di studenti una scommessa in due fasi, cioè una scommessa che può essere giocata due volte [9]. Ad ogni stadio del test, la decisione consisteva nel giocare o meno una scommessa che ha le stesse probabilità di vincere, diciamo \$200, o di perdere, diciamo \$100. Il risultato chiave si basa sulla decisione riguardo alla seconda scommessa al termine della prima scommessa.

Il test includeva tre situazioni differenti:

- (i) gli studenti venivano informati di aver vinto la prima scommessa;
- (ii) gli studenti venivano informati di aver perso la prima scommessa;
- (iii) gli studenti non conoscevano l'esito della prima scommessa.

Tversky e Shafir trovarono che il 69%, ovvero la maggioranza, degli studenti che sapevano di aver vinto la prima scommessa decisero di giocare nuovamente, il 59%, ancora la maggioranza, degli studenti che sapevano di aver perso la prima scommessa decisero di giocare nuovamente, mentre solo il 36% degli studenti che non sapevano se avessero vinto o perso decisero di giocare nuovamente (equivalentemente, il 64%, ovvero la maggioranza, decise di non giocare la seconda scommessa).

Il test della scommessa in due fasi è in disaccordo con il principio della cosa certa: gli studenti preferiscono in generale giocare di nuovo se sanno di aver vinto, e preferiscono giocare di nuovo anche se sanno di aver perso, ma generalmente preferiscono non giocare di nuovo quando non sanno se hanno vinto o perso. Tversky e Shafir ottennero lo stesso risultato in un altro test, simile alla scommessa in due fasi, oggi noto con il nome di problema Hawaii [9]. Inoltre, vio-

lazioni del principio della cosa certa sono state sistematicamente osservate in test simili, eseguiti più recentemente [58, 59].⁹

Più in generale, i risultati del test di Tversky e Shafir sono in disaccordo con la legge della probabilità totale (6) in probabilità Kolmogoroviana. Infatti, sia $p(P)$ la probabilità totale che lo studente decida di giocare nuovamente senza sapere se ha vinto o ha perso la prima scommessa, sia $p(W)$ (rispettivamente, $p(L) = 1 - p(W)$) la probabilità che lo studente vinca (rispettivamente, perda) la prima scommessa, e sia $p(P|W)$ (rispettivamente, $p(P|L)$) la probabilità condizionale che lo studente decida di giocare nuovamente sapendo di aver vinto (rispettivamente, perso) la prima scommessa. Si prova allora facilmente che non è possibile trovare una probabilità $p(W)$ in modo che le probabilità in [9] siano soddisfatte, cioè, $p(P) = 0.36$, $p(P|W) = 0.69$, $p(P|L) = 0.59$, e la legge della probabilità totale (6) sia soddisfatta, donde l'effetto disgiunzione. Come spiegazione dell'effetto, Tversky e Shafir suggerirono che le persone provano in genere avversione all'incertezza, ovvero preferiscono le scelte sicure a quelle insicure.

Nell'ambito della prospettiva generale che è stata presentata nelle sezioni precedenti e che adotta il formalismo quantistico in spazi di Hilbert, è possibile trattare l'effetto disgiunzione come un effetto di sotto-estensione rispetto alla disgiunzione di due concetti [43, 44]. A tal fine, sia A la situazione concettuale corrispondente a *Aver Vinto la Prima Scommessa*, sia B la situazione concettuale corrispondente a *Aver Perso la Prima Scommessa*, e sia " A o B " la situazione concettuale corrispondente a *Aver Vinto o Perso la Prima Scommessa*. Dai dati in [9], si ha $\mu(A \text{ o } B) = 0.36$ e $\mu(A) + \mu(B) = 0.69 + 0.59 = 1.28 > 1$. Quindi, si possono utilizzare le equazioni (20), (21), (28) e (29) con θ_d al posto di θ_c , (31) e (33), ottenendo:

$$\begin{aligned} \theta_d &= 141.76^\circ, \\ |A\rangle &= (0.83, 0, 0.56), \\ |B\rangle &= e^{i141.76^\circ} (0.43, 0.64, -0.64), \end{aligned} \quad (41)$$

nello spazio di Hilbert \mathbb{C}^3 , dove i vettori unitari e ortogonali $|A\rangle$ e $|B\rangle$ rappresentano le situazioni

⁹È interessante osservare che anche il dilemma del prigioniero, famoso in teoria dei giochi, può essere formulato nella forma di effetto disgiunzione [3].

concettuali A e B , rispettivamente, la combinazione lineare normalizzata $\frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle)$ rappresenta la disgiunzione " A o B ", e θ_d è l'angolo di interferenza per la disgiunzione.

Il modello quantistico per la disgiunzione di due concetti permette di riprodurre fedelmente i risultati di altri test sull'effetto disgiunzione [44, 58, 59]. Esso permette inoltre di spiegare l'effetto assumendo che le situazioni concettuali *Aver Vinto la Prima Scommessa* e *Aver Perso la Prima Scommessa* interferiscono distruttivamente nella disgiunzione *Aver Vinto o Perso la Prima Scommessa*, inteso come una nuova emergente situazione concettuale.

Una spiegazione unitaria

Si è visto nelle sezioni precedenti che, sia gli effetti di sovra-/sotto-estensione nella combinazione dei concetti, che le fallacie della congiunzione/disgiunzione e l'effetto disgiunzione rivelano la presenza di strutture genuinamente quantistiche in fenomeni cognitivi in cui è presente un certo tipo di incertezza. Tali strutture sono anche sistematicamente presenti in altri domini empirici collegati con le scienze cognitive, in particolare, la teoria della decisione e la *information retrieval*. A tal proposito, la prospettiva teorica sviluppata nell'ambito della collaborazione tra i gruppi di ricerca di Bruxelles e Leicester è stata applicata ad entrambi questi domini.

In teoria della decisione, è stato elaborato un modello generale che usa il formalismo quantistico in spazi di Hilbert per rappresentare preferenze e decisioni in condizioni di incertezza (si veda, per esempio, [25]). Secondo la già citata teoria dell'utilità attesa, gli individui dovrebbero prendere la decisione che massimizza la loro utilità rispetto ad una misura di probabilità Kolmogoroviana. Esistono situazioni concrete in cui le decisioni umane non sono invece in accordo con le previsioni della teoria dell'utilità attesa. Tale disaccordo è illustrato, per esempio, dai noti paradossi di Allais, Ellsberg e Machina [10, 11], i quali rivelano che specifici aspetti psicologici, quali l'avversione all'incertezza, guidano le decisioni in tali situazioni. Nel quadro della prospettiva quantistica generale, si è invece mostrato che gli individui prendono effettivamente la decisione che massimizza la lo-

ro utilità attesa, ma tale utilità è riferita rispetto ad una misura di probabilità quantistica, la quale incorpora gli aspetti psicologici di cui sopra. Tale prospettiva teorica permette di rappresentare i risultati di numerosi test su decisioni in presenza di incertezza, e costituisce il primo passo verso l'elaborazione di un'estensione di tipo quanto-meccanico della teoria dell'utilità attesa [25, 60].

Il successo del formalismo quantistico in spazi di Hilbert nella modellizzazione dei sistemi concettuali si può estendere al *World Wide Web* (WWW), quando quest'ultimo venga considerato come un sistema concettuale complessivo. È stata, in particolare, elaborata una descrizione in termini di stato, contesto e proprietà delle parole, dei concetti e dei documenti presenti nel WWW. Sulla base di tale descrizione, si è sviluppato un modello quantistico in spazi di Hilbert per rappresentare il significato di tali parole, concetti e documenti. Utilizzando tecniche di *information retrieval* e opportuni *corpora* di documenti, le fallacie della congiunzione e della disgiunzione ed altri effetti non-classici sono stati identificati anche nel WWW, ed una spiegazione in termini di strutture quantistiche è stata effettivamente proposta [61]. Il presente approccio estende a spazi di Hilbert complessi gli approcci tradizionali in *information retrieval* che utilizzano spazi vettoriali reali. Tale prospettiva evidenzia l'importanza dei numeri complessi nella rappresentazione dei processi informatici (si veda, per esempio, [23]).

Concludiamo questo articolo con un commento sulla possibilità di fornire una spiegazione unitaria per le strutture quantistiche identificate nei processi cognitivi e decisionali. Infatti, si può formulare la seguente ipotesi esplicativa sui meccanismi che sono alla base del ragionamento umano: il ragionamento è una sovrapposizione di due processi strutturati, un processo di tipo logico e un processo di tipo emergente. Il ragionamento logico combina sistemi concettuali, cioè, concetti, combinazioni di concetti, proposizioni, e anche sistemi decisionali complessi, applicando le regole della logica Booleana, in alcuni casi arricchita da una semantica probabilistica Kolmogoroviana. Il ragionamento emergente consente invece la formazione di nuovi sistemi concettuali, nel caso di concetti, nuovi concetti, nel caso di proposizioni, nuove proposizioni, ecc.

Il significato di tali sistemi concettuali emergenti è legato a quello dei sistemi concettuali componenti, ma non obbedisce alle regole di combinazione della logica Booleana. Questi due meccanismi agiscono in sovrapposizione nel pensiero umano durante un processo di ragionamento, il primo essendo guidato dalle regole della logica classica, il secondo seguendo un meccanismo non-classico di emergenza.

La struttura a due livelli del ragionamento può essere formalizzata nello spazio di Fock introdotto nelle sezioni precedenti, dove sono attivi solo i primi due settori, e gli stati dei sistemi concettuali sono rappresentati da vettori unitari di questo spazio di Fock a due settori. Più precisamente, il settore 1 dello spazio di Fock, formato da uno spazio di Hilbert individuale, modella l'emergenza concettuale, quindi la combinazione di due concetti è rappresentata da una sovrapposizione dei vettori che rappresentano i concetti componenti in questo spazio di Hilbert, il che spiega come fenomeni di interferenza quantistica possano essere coinvolti in un processo di emergenza. Il settore 2 dello spazio di Fock, cioè un prodotto tensoriale di due copie identiche di questo spazio di Hilbert, modella una combinazione di concetti a partire dai concetti componenti richiedendo che le regole della logica per il connettivo logico usato per la combinazione siano soddisfatte.

Il seguente esempio fornisce un significativo supporto a questa ipotesi [28, 44, 51].

Hampton misurò i pesi di appartenenza dell'esemplare Oliva rispetto ai concetti Frutta, Verdura e la loro disgiunzione Frutta o Verdura, trovando 0.50, 0.10 e 0.80, rispettivamente [6], come si è visto nelle sezioni precedenti. L'Equazione (18) è violata in questo caso, perciò i dati sono non-classici rispetto alla disgiunzione. Recentemente, i pesi di appartenenza dell'esemplare Oliva sono stati testati rispetto ai Frutta, Verdura e la loro congiunzione Frutta e Verdura, trovando 0.56, 0.63 and 0.65, rispettivamente [49]. L'Equazione (12) è violata in questo caso, e i dati sono non-classici rispetto alla congiunzione. Tuttavia, si noti che l'esemplare Oliva è doppiamente sovra-esteso in entrambi i casi, con simili pesi di appartenenza rispetto alla disgiunzione e alla congiunzione. Questo

risultato suggerisce che esistono situazioni in cui gli individui non considerano se si usa il connettivo 'o' oppure il connettivo 'e', ma essi giudicano se l'esemplare è membro del nuovo concetto emergente, ottenuto combinando i due concetti componenti, ma in un modo che è indipendente dal fatto che la combinazione è ottenuta mediante congiunzione o disgiunzione. Questo è un chiaro esempio di processo in cui l'emergenza concettuale domina nettamente il processo di combinazione logica.



- [1] J. R. Busemeyer, A. Diederich *Cognitive Modeling*, Sage Publications Inc., Los Angeles (2009).
- [2] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, Ergebnisse Der Mathematik (1933); translated as *Foundations of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York (1950).
- [3] J. R. Busemeyer, P. D. Bruza, *Quantum Models of Cognition and Decision*, Cambridge University Press, Cambridge (2012).
- [4] E. Haven, A. Y. Khrennikov, *Quantum Social Science*, Cambridge University Press, Cambridge (2013).
- [5] J. A. Hampton, Overextension of conjunctive concepts: Evidence for a unitary model for concept typicality and class inclusion, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 14 (1988a) 12–32.
- [6] J. A. Hampton, Disjunction of natural concepts, *Memory and Cognition* 16 (1988b) 579–591.
- [7] A. Tversky, D. Kahneman, Extension versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment, *Psychological Review* 90 (1983) 293–315.
- [8] D. Morier, E. Borgida, The conjunction fallacy: A task specific phenomenon?, *Personality and Social Psychology Bulletin* 10 (1984) 243–252.
- [9] A. Tversky, E. Shafir, The disjunction effect in choice under uncertainty, *Psychological Science* 3 (1992) 305–309.
- [10] D. Ellsberg, Risk, ambiguity, and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economic* 75 (1961) 643–669.
- [11] M. J. Machina, Risk, ambiguity, and the dark-dependence axioms, *American Economic Review* 99 (2009) 385–392.
- [12] D. Aerts, A possible explanation for the probabilities of quantum mechanics, *Journal of Mathematical Physics* 27 (1986) 202–210.
- [13] I. Pitowsky, *Quantum Probability, Quantum Logic*, Lecture Notes in Physics vol. 321, Springer, Berlin (1989).
- [14] D. Aerts, S. Aerts, Applications of quantum statistics in psychological studies of decision processes, *Foundations of Science* 1 (1995) 85–97.

- [15] D. Aerts, L. Gabora, A theory of concepts and their combinations I: The structure of the sets of contexts and properties, *Kybernetes* 34 (2005a) 167–191.
- [16] D. Aerts, L. Gabora, A theory of concepts and their combinations II: A Hilbert space representation, *Kybernetes* 34 (2005b) 192–221.
- [17] D. Aerts, Quantum structure in cognition, *Journal of Mathematical Psychology* 53 (2009) 314–348.
- [18] J. R. Busemeyer, E. M. Pothos, R. Franco, J. S. Trueblood, A quantum theoretical explanation for probability judgment errors, *Psychological Review* 118 (2011) 193–218.
- [19] D. Aerts, J. Broekaert, L. Gabora, S. Sozzo, Quantum structure and human thought, *Behavioral and Brain Sciences* 36 (2013) 274–276.
- [20] D. Aerts, L. Gabora, S. Sozzo, Concepts and their dynamics: A quantum–theoretic modeling of human thought. *Topics in Cognitive Science* 5 (2013) 737–772.
- [21] E. M. Pothos, J. R. Busemeyer, Can quantum probability provide a new direction for cognitive modeling?, *Behavioral and Brain Sciences* 36 (2013) 255–274.
- [22] Z. Wang, T. Solloway, R. M. Shiffrin, J. R. Busemeyer, Context effects produced by question orders reveal quantum nature of human judgments, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111 (2014) 9431–9436.
- [23] M. Melucci, *Introduction to Information Retrieval and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (2015).
- [24] P. D. Kvam, T. J. Pleskac, S. Yu, J. R. Busemeyer, Interference effects of choice on confidence: Quantum characteristics of evidence accumulation, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112 (2016) 10645–10650.
- [25] D. Aerts, E. Haven, S. Sozzo, A proposal to extend expected utility in a quantum probabilistic framework, *Economic Theory* 65 (2018) 1079–1109.
- [26] A. Tversky, D. Kahneman, Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Science* 185 (1974) 1124–1131.
- [27] D. Aerts, S. Sozzo, T. Veloz, Quantum structure in cognition and the foundations of human reasoning, *International Journal of Theoretical Physics* 54 (2015a) 4557–4569.
- [28] D. Aerts, S. Sozzo, Quantum structure in cognition: Origins, developments, successes and expectations, *The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science: Applications and Grand Challenges*, E. Haven, A. Y. Khrennikov Eds., Palgrave & Macmillan, London, pp. 157–193 (2016).
- [29] P. Samuelson, A quantum theory model of economics: Is the co-ordinating entrepreneur just worth his profit?, *The collected scientific papers of Paul A. Samuelson 4*, MIT Press, Cambridge, MA, pp. 104–110 (1979).
- [30] A. Sen, Maximization and the act of choice, *Econometrica* 65 (1997) 745–779.
- [31] D. Kahneman, A. Tversky, *Choice, Values and Frames*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [32] E. Rosch, Prototype classification and logical classification: The two systems, *New Trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget Theory?*, E. K. Scholnick Ed., Lawrence Erlbaum, New Jersey, pp. 133–159 (1983).
- [33] J. A. Hampton, Categories, prototypes and exemplars, *Routledge Handbook of Semantics*, N. Riemer Ed., Routledge, London, pp. 125–141 (2016).
- [34] L. Zadeh, A note on prototype theory and fuzzy sets, *Cognition* 12 (1982) 291–297.
- [35] D. Osherson, E. Smith, On the adequacy of prototype theory as a theory of concepts, *Cognition* 9 (1981) 35–58.
- [36] S. Alxatib, J. Pelletier, On the psychology of truth gaps, *Vagueness in Communication*, R. Nouwen, R. van Rooij, U. Sauerland, H.-C. Schmitz Eds., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg pp. 13–36 (2011).
- [37] S. Sozzo, A quantum probability explanation in Fock space for borderline contradictions, *Journal of Mathematical Psychology* 58 (2014) 1–12.
- [38] J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison Wesley, Reading, MA (1968).
- [39] C. Piron, *Foundations of Quantum Physics*, Reading, Reading, MA (1976).
- [40] D. Aerts, Foundations of quantum physics: A general realistic and operational approach, *International Journal of Theoretical Physics* 38 (1999) 289–358.
- [41] D. Aerts, M. Sassoli de Bianchi, S. Sozzo, On the foundations of the Brussels operational-realistic approach to cognition, *Frontiers in Physics* doi 10.3389/fphy.2016.00017 (2016).
- [42] P. A. M. Dirac, *Quantum mechanics, 4th Ed.*, Oxford University Press, Oxford (1958).
- [43] S. Sozzo, Effectiveness of the quantum-mechanical formalism in cognitive modeling, *Soft Computing* 21 (2017) 1455–1465.
- [44] D. Aerts, M. Sassoli de Bianchi, S. Sozzo, T. Veloz, Modeling Human Decision-making: An Overview of the Brussels Quantum Approach, *Foundations of Science* doi 10.1007/s10699-018-9559-x (2018).
- [45] R. Pisano, S. Sozzo, A unified theory of human judgements and decision-making under uncertainty, *Entropy* 22 (2020) 738: doi 10.3390/e22070738.
- [46] D. Aerts, S. Sozzo, Quantum structure in cognition. Why and how concepts are entangled. *Quantum Interaction. Lecture Notes in Computer Science* 7052 (2011) 116–127., Springer Berlin.
- [47] D. Aerts, J. Arguëlles, L. Beltran, S. Geriente, M. Sassoli de Bianchi, S. Sozzo, V. Veloz, Quantum entanglement in physical and cognitive systems: A conceptual analysis and a general representation, *European Physical Journal Plus* 134 (2019) 493.
- [48] D. Aerts, S. Sozzo, T. Veloz, Quantum nature of identity in human concepts: Bose-Einstein statistics for conceptual indistinguishability, *International Journal of Theoretical Physics* 54 (2015b) 4430–4443.

- [49] S. Sozzo, Conjunction and negation of natural concepts: A quantum-theoretic modeling, *Journal of Mathematical Psychology* 66 (2015) 83–102.
- [50] D. Aerts, S. Sozzo, T. Veloz, Quantum structure of negation and conjunction in human thought, *Frontiers in Psychology*, doi 10.3389/fpsyg.2015.01447 (2015c).
- [51] D. Aerts, S. Sozzo, T. Veloz, New fundamental evidence of non-classical structure in the combination of natural concepts, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 374 (2915d) 20150095.
- [52] A. K. Shah, D. M. Oppenheimer, Heuristics made easy: An effort-reduction framework, *Psychological Bulletin* 134 (2008) 207–222.
- [53] R. Moro, On the nature of the conjunction fallacy, *Synthese* 171 (2009) 1–24.
- [54] H. A. Simon, A behavioral model of rational choice, *The Quarterly Journal of Economics* 69 (1955) 99–118.
- [55] J. E. Fisk, Judgments under uncertainty: Representativeness or potential surprise?, *British Journal of Psychology* 93 (2002) 431–449.
- [56] Y. Lu, The conjunction and disjunction fallacies: Explanations of the Linda problem by the equate-to-differentiate model, *Integrative Psychological and Behavioral Science* 50 (2015) 507–531.
- [57] L. Savage, *The Foundations of Statistics*, John Wiley & Sons, New York (1954).
- [58] A. Kühberger, D. Kamunská, J. Perner, The disjunction effect: Does it exist for two-step gambles?, *Organization Behavior and Human Decision Processes* 85 (2001) 250–264.
- [59] C. Lambdin, C. Burdsal, The disjunction effect reexamined: Relevant methodological issues and the fallacy of unspecified percentage comparisons, *Organization Behavior and Human Decision Processes* 103 (2007) 268–276.
- [60] D. Aerts, S. Geriente, C. Moreira, S. Sozzo, Testing ambiguity and Machina preferences within a quantum-theoretic framework for decision-making, *Journal of Mathematical Economics* 78 (2018) 176–185.
- [61] D. Aerts, J. Argüelles, L. Beltran, L. Beltran, M. Sassoli de Bianchi, S. Sozzo, T. Veloz, Towards a quantum World Wide Web, *Theoretical Computer Science* 752 (2018) 116–131.

e informatiche. Sandro Sozzo è autore di un centinaio di pubblicazioni su riviste internazionali e ha tenuto lezioni nel Regno Unito (Oxford), Unione Europea, Stati Uniti, Canada, Cina e Nuova Zelanda. È inoltre segretario dell'associazione *International Quantum Structures Association* e direttore editoriale della rivista *Foundations of Science* della *Springer Nature*. Nel 2014, Sandro Sozzo ha fondato il *Centre for Quantum Social and Cognitive Science* (IQSCS), che attualmente dirige. Nell'ambito delle attività del centro, è uno dei responsabili del consorzio QUARTZ, finanziato dal programma *Horizon 2020* dell'Unione Europea.

Sandro Sozzo: Fisico (laurea e dottorato conseguiti presso l'Università di Lecce), è *Associate Professor* presso la *School of Business* della *University of Leicester*. I suoi interessi di ricerca riguardano principalmente i fondamenti delle scienze naturali e cognitive. In particolare, ha fornito contributi noti a livello internazionale nello sviluppo di modelli fisico-matematici in psicologia cognitiva, con applicazioni nelle scienze economiche