

# L'attrattore di Lorenz

**Mario Leo** Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento, Italy

---

**Il sistema dinamico caotico con attrattore strano, proposto da E. Lorenz nel 1963, è analizzato in modo dettagliato e inquadrato nel contesto dello sviluppo storico della teoria dei sistemi dinamici con comportamento caotico. L'importanza del lavoro di Lorenz per la comprensione dei vari aspetti del caos deterministico e dei fenomeni turbolenti viene illustrata nel quadro dei principali contributi, dati negli anni successivi nello stesso settore, da D. Ruelle, F. Takens, M. Feigenbaum e M. Hénon.**



**Figura 1:** *Edward Norton Lorenz*

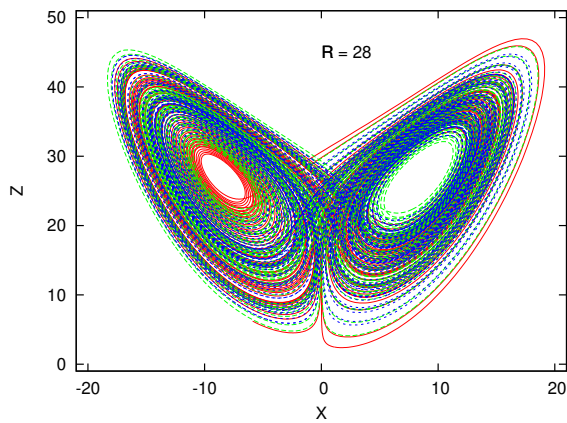
## Introduzione

Alla fine degli anni '50, il matematico e meteorologo statunitense Edward Norton Lorenz (West Hartford, 23 maggio 1917 - Cambridge, 16 aprile 2008; Fig. 1) era impegnato nello sviluppo di modelli matematici per descrivere i movimenti di masse d'aria nell'atmosfera. In quel periodo, con

l'utilizzo dei calcolatori che si andava diffondendo nel settore delle previsioni meteorologiche, da una parte si tentava di fare previsioni del tempo, risolvendo numericamente sistemi di equazioni che presumibilmente governavano le dinamiche dell'atmosfera; dall'altra, si cercava di fare delle previsioni su base statistica, utilizzando osservazioni meteorologiche precedenti.

Scettico su questo secondo metodo, Lorenz decise di lavorarci su e, dopo parecchi tentativi di drastiche semplificazioni delle equazioni che in quel periodo venivano utilizzate per le previsioni del tempo, mise a punto un sistema di dodici equazioni differenziali ordinarie. Gli avevano messo a disposizione un piccolo computer, un Royal McBee, che eseguiva ben (!!!) sessanta moltiplicazioni al secondo e, con questo computer, riusciva, in un minuto, a simulare il comportamento del tempo in un giorno. Dopo vari tentativi ottenne una soluzione periodica, cioè un comportamento del tempo che si ripeteva dopo circa 90 giorni. Cercando di riprodurre questa soluzione con il metodo della regressione lineare, scoprì che ciò non era possibile, a meno che il suo sistema di equazioni non generasse una soluzione non periodica, una che, con la terminologia moderna, chiameremmo caotica. Dopo vari tentativi, riuscì ad ottenere una soluzione inconfondibilmente non periodica e quando applicò il metodo della regressione lineare, trovò che le sue previsioni erano tutt'altro che accettabili.

Continuò allora a generare questo tipo di soluzioni. Come ha raccontato lo stesso Lorenz [1], un giorno del 1961 decise di analizzare più in dettaglio una di queste soluzioni, ma invece di partire dall'inizio dell'elaborazione, utilizzò dei



**Figura 2:** L'attrattore di Lorenz

dati intermedi, ottenuti precedentemente, come dati di ingresso. Quando andò a confrontare le due elaborazioni, si accorse che inizialmente erano quasi simili, ma poi la differenza cresceva più o meno esponenzialmente, quasi raddoppiando ogni quattro giorni simulati, per essere poi completamente diverse dopo due mesi simulati. All'inizio pensò ad un non corretto funzionamento del computer, ma poi si rese conto che il problema era legato al fatto che non aveva immesso le condizioni iniziali con sufficiente precisione. Lorenz aveva programmato il calcolatore per stampare i valori delle dodici variabili tutti su una sola riga e, per ottenere ciò, i valori venivano stampati con sole tre cifre decimali, mentre il calcolatore utilizzava nei calcoli numeri con sei cifre decimali. La simulazione numerica era stata perciò ripetuta con una precisione iniziale ridotta. Una differenza davvero minima aveva prodotto cambiamenti notevoli nell'andamento delle traiettorie.

Lorenz rimase colpito da questo fenomeno, e si rese subito conto che, se l'atmosfera reale si fosse comportata come il suo semplice sistema di equazioni, previsioni del tempo a lungo termine sarebbero risultate impossibili a causa dell'incertezza sui valori di vari parametri, quali la temperatura, la pressione e la velocità dei venti. La dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, connessa alla non-linearità delle equazioni differenziali, era la causa di questo comportamento dei moti non periodici che ora chiamiamo caotici. Successivamente, nel 1963, ottenne risultati simili con un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie, relativo ad un problema classico di fluidodinamica; la convenzione di

Rayleigh-Bénard.

Storicamente era stato il fisico francese Bénard a studiare per primo questo processo [2]. Agli inizi del 1900 egli eseguì i primi esperimenti sulla convezione termica di uno strato di fluido scaldato dal basso e soggetto alla gravità. Bénard lavorò con sottili strati di fluido, dell'ordine del millimetro, giacenti su una piastra metallica mantenuta ad una temperatura uniforme e aventi la superficie superiore libera. In queste condizioni, si accorse che, a secondo del gradiente di temperatura che imponeva al fluido, poteva ottenere differenti condizioni di moto nel sottile strato di fluido. Aumentando il gradiente, si ottenevano dapprima configurazioni stazionarie di quiete e quindi, superato un valore di soglia, configurazioni a celle convettive di varia forma. Con un ulteriore aumento del gradiente, si ottenevano, infine, configurazioni del fluido turbolente.

L'analisi teorica di questo comportamento dello strato di fluido fu sviluppata in seguito da Lord Rayleigh nel 1916 [3], a partire dalle equazioni di Navier-Stokes. L'indagine di Lord Rayleigh portò alla definizione di un numero, detto appunto numero di Rayleigh, ed al calcolo teorico di un valore di soglia, oltre il quale si innescava il movimento del fluido. In termini delle temperature  $T_i$  della piastra inferiore e  $T_s$  della piastra superiore, con l'analisi della stabilità lineare dell'esperimento, si trovò che se la differenza  $T_i - T_s$  superava un valore critico, il sistema diventava instabile, l'instabilità manifestandosi con la formazione di celle convettive. Con l'analisi lineare non era possibile comunque analizzare il comportamento del fluido, aumentando ulteriormente il gradiente di temperatura.

Nel 1962 B. Saltzman [4], considerando variazioni solo in due dimensioni, introducendo uno sviluppo in serie di Fourier e troncando la serie per lavorare con un numero finito di termini, ricavò un set di equazioni differenziali ordinarie nonlineari relativo a 52 variabili. La risoluzione numerica di tale modello evidenziò, comunque, che solo poche variabili dominavano la dinamica del sistema.

Nel 1963 entra in scena Lorenz che, un po' empiricamente, seleziona le tre variabili da lui ritenute fondamentali, ottenendo un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie. Lorenz pubblicò il suo lavoro [5], "*Deterministic Nonperio-*

*dic Flow*", sul Journal of the Atmospheric Sciences, una rivista di Meteorologia dell'American Meteorological Society.

Nonostante l'importanza e la novità dei risultati che Lorenz descrisse nell'articolo del 1963, l'interesse sul suo lavoro crebbe enormemente soprattutto dopo la conferenza tenuta nel dicembre del 1972, al convegno annuale dell'American Association for the Advancement of Sciences a Washington, DC, intitolata: "*Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*" ("*Può il battito di ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?*"). Dopo questo efficace titolo, la metafora della farfalla, soprattutto per merito del già citato libro di J. Gleick, è stata utilizzata in contesti sempre più ampi e il termine *butterfly effect* è diventato un'espressione ricorrente per indicare il fenomeno della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali<sup>1</sup>.

La nozione di effetto farfalla, comunque, come notò lo stesso Lorenz, non era nuova. Essa figurava già, per esempio, nel racconto di Ray Bradbury "*Rumore di tuono*", scritto nel 1952 [6]. In questo racconto, la morte di una farfalla preistorica, e la conseguente sua mancata riproduzione, aveva cambiato l'esito di un'elezione presidenziale.

Il lavoro rimase sconosciuto anche ai Fisici, che notoriamente riservano poca attenzione agli articoli di meteorologia, fino al 1975, anno in cui i fisici J. B. McLaughlin e P. C. Martin ne capirono l'importanza e ne diffusero i risultati e le implicazioni [7].

Ovviamente l'importanza del sistema di equazioni ottenuto da Lorenz trascende ormai il modo in cui questo sistema fu ottenuto, risiedendo essenzialmente nelle proprietà inaspettate delle sue soluzioni, nella loro affascinante novità e nell'impulso che lo studio di questo sistema portò nella comprensione della fisica e della matematica dei sistemi dinamici con comportamento caotico.

Ma qual'era il contesto scientifico, nell'ambito

---

<sup>1</sup>Si racconta che, durante una conferenza di Lorenz, ci fu un intervento di un meteorologo che parlò di battito di ali di un gabbiano. Quando Lorenz decise di partecipare alla conferenza del 1972, si dimenticò di inviare il titolo della Comunicazione. Uno degli organizzatori, Philip Merilees, ricordando quell'intervento, assegnò quel titolo alla comunicazione di Lorenz, sostituendo la farfalla al gabbiano, forse influenzato dal fatto che l'attrattore di Lorenz ha la forma di una farfalla.

dei sistemi dinamici, in cui si inserivano i risultati ottenuti da Lorenz?

## Il contesto scientifico

La teoria dei sistemi dinamici è strettamente connessa con molte aree della Fisica e della Matematica, della Chimica e della Biologia. I suoi metodi e i suoi risultati hanno grandemente stimolato la ricerca in molti settori sia teorici che sperimentali, dando anche origine ad una nuova area di dinamica applicata denominata **dinamica non lineare** o **teoria del caos**.

Un sistema dinamico, grosso modo, è costituito da due ingredienti: una regola, che specifica come evolve un sistema nel tempo e le condizioni iniziali che specificano lo stato iniziale di partenza. Come ben sappiamo, le regole che descrivono i fenomeni naturali sono quasi sempre espresse nella forma di equazioni differenziali o equazioni alle differenze finite.

Ancora all'inizio del secolo scorso, si pensava che l'evoluzione temporale di un qualsiasi sistema fisico potesse essere sempre prevista, una volta assegnate le condizioni iniziali. Tale convinzione era certamente giustificata da indiscutibili successi come, per esempio, la possibilità di prevedere con molti anni di anticipo le eclissi, ed era tanto radicata nel mondo scientifico, che nel Settecento il grande matematico Simon de Laplace era arrivato addirittura ad affermare che, date la posizione e la velocità di tutte le particelle dell'Universo, egli sarebbe stato capace di prevederne l'evoluzione futura per tutta l'eternità [8].

Agli inizi del Novecento si ha, però, il crollo del determinismo di Laplace per due ragioni molto diverse. La prima è connessa con la formulazione della Meccanica Quantistica e il principio di indeterminazione di Heisenberg, secondo il quale c'è una limitazione alla precisione con cui la posizione e la quantità di moto (e quindi la velocità) di una particella possono essere simultaneamente misurate. La seconda è sostanzialmente legata all'impossibilità di prevedere l'evoluzione di certi sistemi, addirittura macroscopici, a causa della sua sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali.

La visione di Laplace potrebbe essere vera nel caso di sistemi dinamici lineari e anche non li-

neari, purché lontani dai regimi di comportamento caotico. Per ogni sistema che evolve in modo regolare, se lo stato del sistema viene leggermente perturbato, ci aspettiamo che il conseguente cambiamento che si osserverà nella sua evoluzione sia anch'esso piccolo, o per lo meno proporzionale alla perturbazione introdotta.

In realtà, già il grande fisico matematico francese Henri Poincaré, fondatore della Teoria dei sistemi dinamici, si era reso conto (1896) che anche sistemi molto semplici, con pochi gradi di libertà, potevano presentare un comportamento aleatorio, nel senso che, pur essendo, in linea di principio, il loro futuro completamente determinato dal passato, in pratica le piccole incertezze sulle condizioni iniziali rendevano il loro comportamento, prevedibile a breve scadenza, alla lunga imprevedibile.

Partendo da un problema apparentemente semplice, il moto di tre corpi che interagiscono tra loro attraverso la forza di gravità, ma che portava ad equazioni del moto non lineari, Poincaré ottenne risultati che lo portarono a descrivere in modo chiaro il fenomeno del caos deterministico. In "Science et méthode" [9] egli scriveva:

*"...Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'Universo all'istante iniziale, potremmo predire esattamente la situazione di quello stesso Universo in un momento successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se una tale conoscenza ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e diremmo che il fenomeno è stato predetto e che è governato dalle leggi. Ma non è sempre così; può infatti accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime in quelle successive. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nelle seconde. La previsione diviene impossibile..."*

La difficoltà, secondo Poincaré, non stava perciò tanto nelle regole, nelle equazioni, ma piuttosto nella difficoltà di formulare, con grande precisione, le condizioni iniziali e nella dipendenza sensibile da queste condizioni iniziali di quei sistemi dinamici che attualmente vengono detti caotici. In questi sistemi, un effetto qualunque, per quanto piccolo, acquista rapidamen-

te proporzioni macroscopiche, condizionando drasticamente la loro evoluzione.

Consideriamo, per esempio, condizioni iniziali molto vicine, rappresentate da due punti separati da una piccola distanza  $d_0$ . Può succedere che in certi sistemi la separazione fra le traiettorie che hanno origine dai due punti aumenti esponenzialmente come  $d_0 e^{\lambda t}$ . Questo significa che, se la distanza iniziale  $d_0$  è più piccola della risoluzione  $\delta$  del nostro apparato di misura, esisterà un tempo  $\bar{t}$ , dato dalla relazione

$$d_0 e^{\lambda \bar{t}} > \delta$$

dopo il quale vedremo due traiettorie distinte corrispondenti alla stessa condizione iniziale. Il teorema di unicità, per la soluzione di un'equazione differenziale, vale se partiamo idealmente da un punto ( $d_0 = 0$ ), ma ciò, in pratica, non è possibile in Fisica [10]. Per esempio, se l'insieme delle condizioni iniziali è dato dai numeri reali tra 0 e 1, di questi possiamo fissare, con un numero finito di cifre, solo i numeri razionali: quelli irrazionali, avendo un numero infinito di cifre decimali, sarebbero determinati solo con un tempo di acquisizione infinito e con una memoria di capacità infinita.

La dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali mette in crisi anche la reversibilità del tempo, nonostante le equazioni mantengano un'invarianza formale per inversione temporale. Se invertiamo il tempo, i numeri di partenza, che esprimono le condizioni iniziali, sono a loro volta troncati, per cui anche l'evoluzione inversa presenterà la stessa dipendenza sensibile e si arriverà, al tempo  $t = 0$ , ad una soluzione diversa da quella con cui si era partiti inizialmente.

Le considerazioni di Poincaré sfuggirono ai contemporanei; negli Stati Uniti, l'unico matematico a prenderle sul serio fu, negli anni venti e trenta, George D. Birkhoff, che poi avrebbe avuto, fra i suoi allievi al MIT, un certo Edward Lorenz. Solo a partire dalla seconda metà del secolo scorso, le idee di Poincaré hanno avuto un enorme sviluppo, soprattutto quando all'analisi teorica dei sistemi dinamici si è affiancato l'uso massiccio di simulazioni numeriche eseguite con i calcolatori.

L'amplificazione esponenziale degli errori relativi all'indeterminazione con cui si conosce lo

stato iniziale di un sistema è, dunque, la seconda ragione dell'insuccesso di Laplace. Per prevedere allora esattamente l'evoluzione di questi sistemi occorrerebbe un'informazione infinita sulle condizioni iniziali e questo non è possibile.

Del resto, questa impossibilità si evince anche da un altro punto di vista. Per analizzare, con l'ausilio degli strumenti matematici, il comportamento di un sistema fisico, dobbiamo innanzitutto isolarlo e separarlo dalla complessità degli altri fenomeni presenti nel mondo reale. Questo genere di **riduzione**, in cui si considerano solo pochi oggetti, o poche particelle, è caratteristico del modo di lavorare in tutti i settori della ricerca scientifica. Al sistema in esame è associato un set di variabili, che dobbiamo misurare per determinare tutto ciò che vogliamo sapere del nostro sistema in un dato momento. Un set di variabili ci fornisce una **configurazione del sistema**. Per rappresentare l'insieme di tutte le configurazioni possibili, definiamo uno spazio astratto: lo **spazio delle configurazioni**, detto, a secondo del contesto, **spazio delle fasi** o **spazio degli stati**. Ogni punto dello spazio delle configurazioni rappresenta un possibile stato del sistema. L'intera storia di qualunque sistema è quindi contenuta in un'unica curva (o poche curve), congelata nello spazio delle configurazioni.

Tutto si basa sull'ipotesi secondo la quale le leggi della Fisica, più le condizioni iniziali, determinano il futuro del sistema in esame. Ora, a parte il problema relativo al fatto se le leggi che stiamo assumendo rimangano le stesse allo scorrere del tempo se, date le condizioni iniziali, il futuro è determinato, quali sono le limitazioni nell'assegnazione delle condizioni iniziali nell'analisi di un sistema fisico reale o non interamente costruito a tavolino? Se nella trattazione di un sistema fisico reale, il cui comportamento dipende sensibilmente dalle condizioni iniziali, vogliamo aumentare la precisione sui dati iniziali, dobbiamo necessariamente prendere in esame altri fenomeni che hanno concorso a determinare quelle condizioni, per cui siamo costretti ad andare indietro nel tempo e considerare necessariamente regioni dello spazio-tempo sempre più grandi di quella in cui abbiamo isolato, ridotto, il nostro sistema dinamico. E questo non si può fare indefinitamente.

Questa problematica, in un contesto diverso,

era già chiara ad Heisenberg quando, nel 1927, col suo Principio di indeterminazione, dimostrò l'impossibilità, in linea di principio, di seguire *la traiettoria dell'elettrone*, non per la inesattezza di una formula matematica, ma per l'impossibilità di conoscerne con precisione assoluta lo stato iniziale. Scriveva Heisenberg :

*Nella formulazione netta della legge di causalità "se conosciamo il presente, possiamo calcolare il futuro", è falsa non la conclusione, ma la premessa. Noi non possiamo, in linea di principio, conoscere il presente in ogni elemento determinante.*

Neppure l'intelligenza evocata da Laplace potrebbe conoscere, contemporaneamente, la posizione e la velocità di una particella quantistica e prevedere, quindi, il futuro.

Scelto allora un set di condizioni iniziali, fissati i valori di tutti i parametri presenti nel modello che descrive il sistema fisico e integrate le corrispondenti equazioni di evoluzione analiticamente o numericamente, otterremo la configurazione del sistema in funzione del tempo, che sarà sempre la stessa, se integriamo di nuovo il sistema con lo stesso set di condizioni e con gli stessi valori dei parametri. Il comportamento del sistema è perciò **deterministico**.

Se però il nostro sistema dipende in modo sensibile dalle condizioni iniziali, o dal valore di qualche parametro, la sua configurazione finale potrà essere completamente diversa se il set dei dati iniziali o dei valori dei parametri varia anche di pochissimo. In questo senso si usa l'ossimoro di **caos deterministico**, due parole che sembrano contraddirsi a vicenda, ma che descrivono compiutamente il comportamento di questi sistemi, per significare cioè il fatto che, pur avendo un comportamento deterministico, hanno evoluzioni completamente diverse anche per piccole variazioni delle condizioni iniziali. Ciò porta, ad esempio, all'impossibilità di fare previsioni corrette a lungo termine in campo meteorologico: poiché i dati iniziali sono sempre approssimati, come del resto i modelli di calcolo, la soluzione che si calcola può risultare molto diversa da quella reale.

Come puntualizzava Lorenz, qualsiasi proprietà che possiamo stabilire, risolvendo un sistema di equazioni differenziali relativo ad un

modello dell'atmosfera, è una proprietà del sistema. Noi possiamo solo sperare che essa sia anche una proprietà dell'atmosfera [12].

Una causa non prevista, anche irrilevante, può produrre una piccola variazione nelle condizioni iniziali o nei parametri presenti nel sistema e portare quindi a situazioni totalmente imprevedibili. È l'effetto farfalla della conferenza di Lorenz del 1972. Nella metafora dell'effetto farfalla, un semplice movimento di molecole d'aria, generato dal battito d'ali di una farfalla, può causare una catena di movimenti di altre molecole, tale da causare un tornado nel Texas.

Il concetto di caos emerge allora in modo naturale nell'ambito dello studio dei sistemi dinamici. L'evoluzione di questi sistemi viene in genere analizzata nello spazio degli stati, le cui coordinate fissano lo stato del sistema e può essere descritta in funzione di una variabile tempo che può variare in modo continuo o assumere valori discreti. Nel primo caso si parla di **flusso**, nel secondo di **applicazione** o **mappa**. Così, ad esempio, l'evoluzione temporale di un pendolo nello spazio delle fasi è descritta da un flusso, mentre invece la popolazione degli insetti, che nascono ogni anno in una data zona, viene descritta introducendo una variabile discreta.

Un esempio di sistema dinamico molto facile da studiare è offerto proprio dal pendolo semplice. Per descrivere completamente questo sistema dinamico bastano la posizione e la velocità: i loro valori fissano lo stato del sistema nello spazio delle fasi in ogni istante di tempo. Quando il pendolo oscilla, il suo punto rappresentativo si sposta, in questo spazio, descrivendo una curva detta curva di fase o orbita. Nel caso ideale di un pendolo privo di attrito in moto oscillatorio, l'orbita è una curva chiusa; in presenza di attrito, l'orbita del pendolo smorzato è una curva a spirale che converge asintoticamente verso la posizione di equilibrio stabile. Questo punto fisso, verso cui convergono tutte le orbite, è detto **attrattore**.

Gli attrattori sono forme geometriche che caratterizzano il comportamento asintotico di un sistema nello spazio degli stati. Il pendolo con attrito è solo un caso particolare di sistema dissipativo le cui orbite, per effetto della dissipazione, vengono attratte verso un punto fisso dello spazio degli stati, corrispondente ad uno stato di

equilibrio stabile.

Altri sistemi, come ad esempio quello descritto dall'equazione di Van der Pol [11], hanno invece, come attrattore, un'orbita periodica che viene detta **ciclo limite**. Un ciclo limite descrive oscillazioni stabili, come il moto di un orologio a pendolo o il battito cardiaco.

Un'altra forma di attrattore più complicata è il **toro**. Questa forma è associata ad un moto, detto anche **quasi periodico**, dato dalla sovrapposizione di due o più oscillazioni indipendenti. La caratteristica più importante di un moto quasi periodico è che, nonostante la sua complessità, esso è prevedibile. Anche se l'orbita non si ripete mai esattamente, come accade se il rapporto tra le frequenze del moto non è un numero razionale, il moto resta regolare. Le orbite, che inizialmente sono vicine tra loro sul toro, rimangono tali al trascorrere del tempo e la prevedibilità a lungo termine è assicurata.

Possiamo allora definire formalmente un attrattore  $A$  come:

*un insieme chiuso invariante, nel senso che ogni traiettoria con punto di partenza interno ad esso rimane all'interno per  $t \rightarrow \infty$ . Esso inoltre attrae un insieme aperto  $U$  di condizioni iniziali, che costituisce il suo bacino di attrazione; è, inoltre, un insieme minimale, vale a dire non c'è un sottoinsieme proprio di  $A$  che soddisfa le condizioni precedenti.*

Punti fissi stabili con dimensione euclidea  $D = 0$ , cicli limite stabili con dimensione  $D = 1$  e il toro con dimensione  $D = K$ , se  $K$  è il numero di frequenze incommensurabili, sono gli **attrattori classici** associati a moti regolari o ordinati.

Fino ad oltre la metà del Novecento, c'era la tendenza a spiegare moti complicati in termini di moti quasi periodici, con la conseguente ricerca dei **modi normali** e delle **armoniche fondamentali**. Per esempio, la teoria di Landau della turbolenza nei fluidi [13] proponeva che, al crescere di un parametro di controllo, il moto del fluido passasse da un moto indipendente dal tempo, in ogni punto, ad un moto periodico, poi ad un moto quasi periodico a due periodi, poi a tre, quattro, e così via. Quando il numero delle frequenze diventava sufficientemente grande, allora il fluido appariva dotato di un moto irregolare, ovvero turbolento.

Le difficoltà incontrate nel determinare quantitativamente le frequenze in questione hanno condotto ad un ripensamento profondo della spiegazione della turbolenza sulla base dell'ipotesi dei moti quasi periodici. È emersa chiaramente la necessità della presa in considerazione di moti non quasi periodici per la rappresentazione corretta dei fenomeni turbolenti e di altri fenomeni (modelli di evoluzione di popolazioni o di reazioni chimiche, moti di sistemi meccanici semplici).

Questo era più o meno lo stato dell'arte prima del lavoro di Lorenz. Con il suo lavoro entra in scena un moto non quasi periodico, caratterizzato da un tipo diverso di attrattore: un attrattore caotico, che in seguito sarà chiamato **attrattore strano**, caratterizzato da una dimensione non intera.

## Il sistema di Lorenz

Il sistema di Lorenz (SdL), proposto nel 1963, è il primo modello fenomenologico di un processo dinamico, caratterizzato da pochi gradi di libertà, con comportamento caotico, cioè non associato ad un moto quasi periodico. Come abbiamo già detto, questo modello fu derivato da Lorenz imponendo un certo numero di drastiche semplificazioni al problema idrodinamico della convezione termica in un fluido uniforme, soggetto al campo gravitazionale, contenuto in una regione compresa tra due piastre. Esso è descritto dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= Rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (1)$$

dove il punto sopra il simbolo indica la derivata rispetto al tempo.

Le variabili  $x$ ,  $y$ , e  $z$  avevano originariamente il seguente significato:  $x$  era proporzionale alla velocità del flusso del fluido in circolazione;  $y$  era proporzionale alla differenza di temperatura tra gli elementi di fluido in moto ascendente e discendente e  $z$  era proporzionale alla distorsione del profilo della temperatura nella direzione verticale che, in condizioni di equilibrio, era lineare con l'altezza.

I parametri  $\sigma$  ed  $R$  erano proporzionali rispettivamente al numero di Prandtl e al numero di Rayleigh, mentre  $b$  era legato alle dimensioni della cella.

Questo sistema di equazioni non lineari accoppiate, dall'aspetto apparentemente molto semplice, non è integrabile analiticamente. Per comprenderne la dinamica, così come si ottiene con l'integrazione numerica delle sue equazioni, è fondamentale lo studio della stabilità delle sue soluzioni stazionarie:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (0, 0, 0) \\ (x, y, z) &= \\ &(\sqrt{b(R-1)}, \sqrt{b(R-1)}, R-1) \equiv C_1 \quad (2) \\ (x, y, z) &= \\ &(-\sqrt{b(R-1)}, -\sqrt{b(R-1)}, R-1) \equiv C_2 \end{aligned}$$

che si ottengono imponendo le condizioni:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

Per  $0 \leq R \leq 1$ , si ha allora un'unica soluzione stazionaria, l'origine. Per  $R > 1$ , a questa soluzione si aggiungono le due soluzioni  $C_1$  e  $C_2$ . Lo studio della stabilità di queste soluzioni mostra che l'origine è stabile per  $R < 1$  e diventa instabile per  $R > 1$ . Per  $R = 1$  si ha una biforcazione: l'origine diventa instabile e si generano le due soluzioni  $C_1$  e  $C_2$ .

Tutti i risultati numerici che saranno presentati di seguito e la loro discussione sono relativi all'integrazione del SdL con  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ ;  $R$  sarà allora il parametro di controllo.

Una proprietà del sistema di Lorenz è la sua invarianza sotto la trasformazione discreta:

$$x \rightarrow -x \quad y \rightarrow -y \quad z \rightarrow z$$

Questa invarianza implica l'esistenza di soluzioni autosimmetriche (vale a dire soluzioni che sono trasformate in sé stesse dalle relazioni precedenti) e di soluzioni simmetriche a coppia (nel senso che ogni soluzione della coppia è trasformata nell'altra dalla trasformazione). Per esempio, abbiamo visto che per  $R = 1$  si passa da una soluzione autosimmetrica, l'origine, a due soluzioni non più autosimmetriche, ma ottenibili l'una dall'altra con l'operazione di simmetria. Tutto ciò è più evidente quando si considera il

bacino di attrazione delle tre soluzioni stazionarie. Per  $R < 1$ , se si applica la trasformazione di simmetria alla condizione iniziale, la soluzione stazionaria resta sempre l'origine. Per  $R > 1$ , se si applica la trasformazione di simmetria alla condizione iniziale, si passa da  $C_1$  a  $C_2$ . Per  $R = 1$  si ha allora una rottura della simmetria, con passaggio della stabilità da una soluzione autosimmetrica a due soluzioni simmetriche.

La stabilità della soluzione stazionaria  $x = y = z = 0$  si analizza perturbando il sistema nell'intorno dell'origine e linearizzando il sistema ottenuto. Si ha:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = -\sigma(\delta x - \delta y) \\ \delta \dot{y} = -\delta y + R\delta x \\ \delta \dot{z} = -b\delta z \end{cases}$$

Per quanto riguarda le perturbazioni  $\delta Z$ , si vede subito che esse evolvono nel tempo come  $e^{-bt}$ , per cui decadono esponenzialmente a 0. Per analizzare l'evoluzione delle perturbazioni  $\delta x$  e  $\delta y$ , consideriamo soluzioni della forma:

$$\begin{cases} \delta x = e^{\lambda t} u \\ \delta y = e^{\lambda t} v \end{cases}$$

Sostituendo si ha:

$$\begin{cases} (\lambda + \sigma)u - \sigma v = 0 \\ -Ru + (\lambda + 1)v = 0 \end{cases}$$

L'esistenza di una soluzione non banale comporta la condizione:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma \\ -R & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

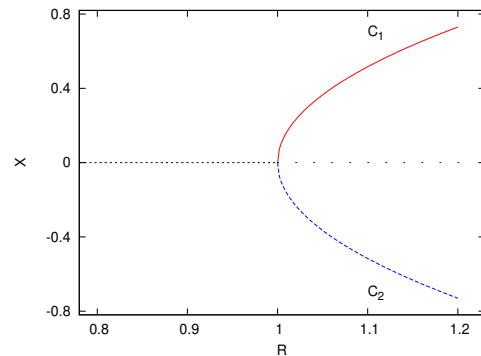
da cui:

$$\begin{aligned} 2\lambda_+ &= -(1 + \sigma) + \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - R)} \\ 2\lambda_- &= -(1 + \sigma) - \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - R)} \end{aligned} \quad (3)$$

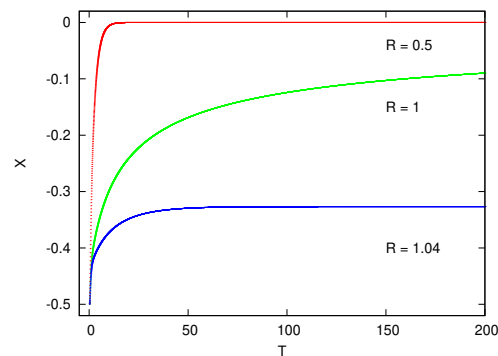
Per  $0 \leq R < 1$ , entrambe le radici sono negative, le perturbazioni  $\delta x$  e  $\delta y$  decadono nel tempo e la soluzione stazionaria  $(0, 0, 0)$  è asintoticamente stabile. Per  $R = 1$ ,  $\lambda_- = -(1 + \sigma)$ , la radice  $\lambda_+$  è nulla e diventa positiva per  $R > 1$ , per cui l'origine è marginalmente stabile e diventa instabile per  $R > 1$ .

Allora, per  $0 \leq R \leq 1$  l'unica soluzione stazionaria è l'origine che è quindi l'unico attrattore

del sistema. La presenza di una radice positiva, per  $R > 1$ , indica che all'origine è associata una varietà stabile bidimensionale ed una varietà instabile unidimensionale. Per  $R > 1$ ,  $C_1$  e  $C_2$  diventano allora, come vedremo, gli attrattori stabili del sistema. Per  $R = 1$  si ha quella che viene chiamata una **biforcazione pitchfork supercritica**, illustrata in Fig. 3.



**Figura 3:** Valori di  $x$  in funzione di  $R$ . Si nota la Biforcazione supercritica per  $R = 1$ . I risultati sono ottenuti con  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ . Questi valori sono stati utilizzati anche per tutti i calcoli i cui risultati sono presentati nelle altre figure.

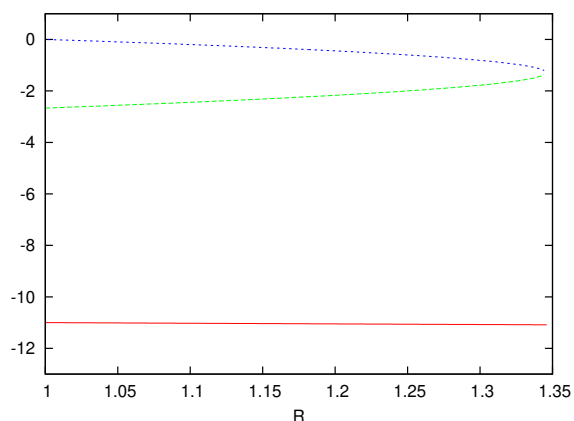


**Figura 4:** Valori di  $x$  in funzione del tempo di integrazione fino ad un massimo valore di 200. Condizioni iniziali:  $X = -0.5, Y = -0.5, Z = 0.5$ . Si noti come nel caso  $R = 1.0$  (stabilità marginale), alla fine del tempo di integrazione, non sia stato ancora raggiunto il punto stazionario, l'origine, a differenza del caso  $R = 0.5$  (l'origine) ed  $R = 1.04$  (il punto  $C_2$  di coordinata  $X = -0.3266$ ).

In Fig. 4 è riportata, in funzione del tempo, la variabile  $X$  nei tre casi:  $R = 0.5, R = 1.0$  ed  $R = 1.04$ .

Analizziamo ora la stabilità delle soluzioni non banali  $C_1$  e  $C_2$ . Consideriamo il punto  $C_1$ . Considerazioni analoghe valgono per il punto  $C_2$ . Perturbando e linearizzando il sistema





**Figura 5:** Le tre radici reali, tutte negative, dell'equazione (4) in funzione del parametro  $R$  tra  $R = 1$  ed  $R = 1.346$ .

nell'intorno della soluzione stazionaria

$$x_0 = y_0 = \sqrt{b(R-1)}, \quad z_0 = R-1,$$

ponendo

$$\begin{cases} \delta x = e^{\lambda t} u \\ \delta y = e^{\lambda t} v \\ \delta z = e^{\lambda t} w \end{cases}$$

e cercando soluzioni non banali per  $u, v$  e  $w$ , si ottiene l'equazione:

$$\lambda^3 + \lambda^2(1+b+\sigma) + \lambda b(R+\sigma) + 2\sigma b(R-1) = 0 \quad (4)$$

Questa equazione di terzo grado, per gli autovalori della matrice Jacobiana associata al sistema linearizzato, ha tre radici reali o una radice reale e due complesse coniugate. Poiché nell'equazione ogni termine è positivo per  $\lambda > 0$  ed  $R > 1$ , si ha che le tre radici reali sono negative, per  $R$  appena maggiore di 1, per cui la soluzione stazionaria è stabile.

Aumentando ulteriormente  $R$ , viene raggiunto il valore  $R_s = 1.3456171$  in cui due degli autovalori di  $C_1$  e  $C_2$  diventano complessi coniugati con parti reali negative. In questo regime, l'orbita tende a  $C_1$  o a  $C_2$ , spiralizzando intorno al punto fisso. Questo comportamento è illustrato nel grafico a sinistra nella Figura 6 dove è mostrato l'andamento oscillante smorzato della variabile  $x$ , il cui valore converge verso quello della coordinata  $x$  del punto fisso  $C_1$ . Fin qui non si osserva alcuna dinamica caotica, né caos transitorio.

Per vedere come si innesca il caos, continuiamo ad aumentare il parametro  $R$ . Quello che

si verifica è che la spirale iniziale, intorno a  $C_1$  ( $C_2$ ), aumenta in dimensione fino a quando, per  $R > R_0 \sim 14.174828815$ , con i punti  $C_1$  e  $C_2$  sempre stabili, si ha un cambiamento radicale del comportamento del flusso. Per  $R > R_0$ , le orbite che hanno origine sulla manifold instabile dell'origine crescono sempre di più e vengono attratte dal punto stazionario presente nell'altro semispazio, come mostrato dai pannelli centrale e destro della Figura 6.

Si noti la sensibile dipendenza dal parametro  $R$ . La variazione di poche unità sulla nona cifra decimale porta il sistema, posizionato asintoticamente sull'attrattore  $C_1$ , a trasferirsi asintoticamente sull'attrattore  $C_2$ .

Aumentando ancora  $R$  si osserva prima un regime di caos transitorio, con  $C_1$  e  $C_2$  unici attrattori ancora stabili e poi un regime in cui, oltre a  $C_1$  e  $C_2$ , appare un attrattore caotico. Si hanno tre bacini di attrazione distinti e lo stato asintotico del sistema dipende dalle condizioni iniziali. La Fig. 7 mostra i tre attrattori per  $R = 23$ .

Con un ulteriore aumento del valore di  $R$ , si raggiunge infine un valore critico  $R_c$ , in corrispondenza del quale le due radici complesse sono immaginarie pure e, per  $R > R_c$ , la loro parte reale risulta positiva: la soluzione stazionaria diventa instabile e si ha un unico attrattore: l'attrattore di Lorenz.

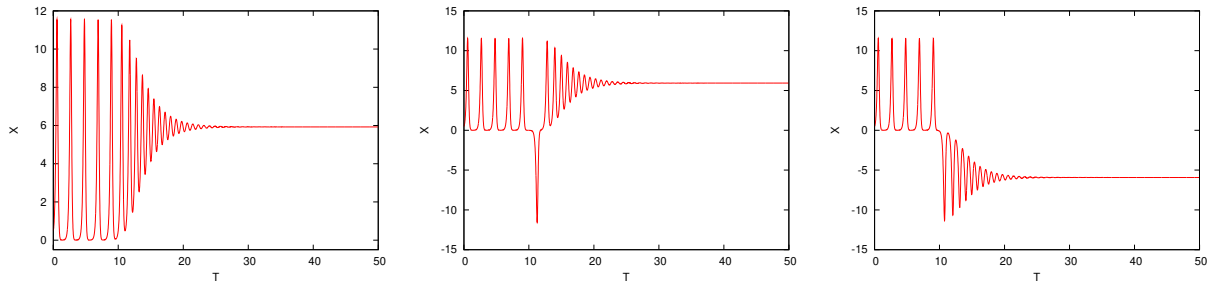
Ponendo nell'Eq. (4)  $\lambda = \pm i\omega$  per  $R = R_c$ , si ottiene:

$$R_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (5)$$

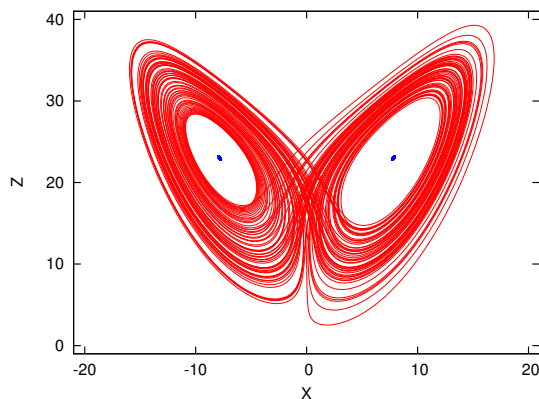
$$\omega^2 = \frac{2\sigma b(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1} \quad (6)$$

Si noti che per  $\sigma < b + 1$ , non esiste alcun valore positivo di  $R_c$  che soddisfa la prima relazione e lo stato stazionario  $C_1$  ( $C_2$ ) è sempre stabile. Se, invece,  $\sigma > b + 1$ , come si ha nel caso  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ , lo stato stazionario è instabile per  $R > R_c$ . In definitiva, i punti stazionari  $C_1$  e  $C_2$  sono sempre stabili nell'intervallo  $1 < R < R_c \simeq 24.73684$  e, per  $R = R_c$ , perdono la loro stabilità attraverso quella che viene chiamata una **biforcazione di Hopf subcritica**. È difficile rendere evidente questa biforcazione in quanto il ciclo limite che esiste prima di essa è instabile.

Nella Fig. 8 sono riportate le tre radici reali, la parte reale e le parti immaginarie delle due radici

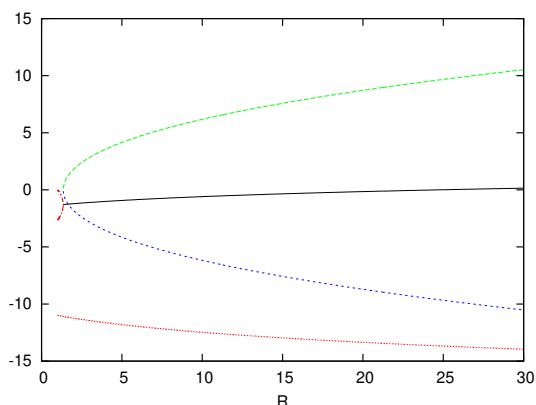


**Figura 6:**  $X$  in funzione del tempo  $T$  per  $R = 14.174828815$  (grafico a sinistra),  $R = 14.174828818$  (grafico centrale),  $R = 14.174828819$  (grafico a sinistra). Condizione iniziale:  $X = Y = Z = 0.5$ .



**Figura 7:** Tre attrattori per  $R = 23$ . Condizioni iniziali:  $x = -5, y = 5, z = 10$  per l'attrattore caotico (colore rosso);  $x = y = z = 0.5$  ( $C_2$ :colore verde);  $x = y = -0.5, z = 0.5$  ( $C_1$ :colore blu).

complesse coniugate dell'Eq. (4) tra  $R = 1.346$  ed  $R = 30$ .



**Figura 8:** Le tre radici reali (colore rosso), la parte reale (colore nero) e le parti immaginarie delle due radici complesse coniugate dell'equazione (4) in funzione del parametro  $R$ , tra  $R = 1$  ed  $R = 30$ .

In Fig. 9 sono infine riportate le proiezioni sui

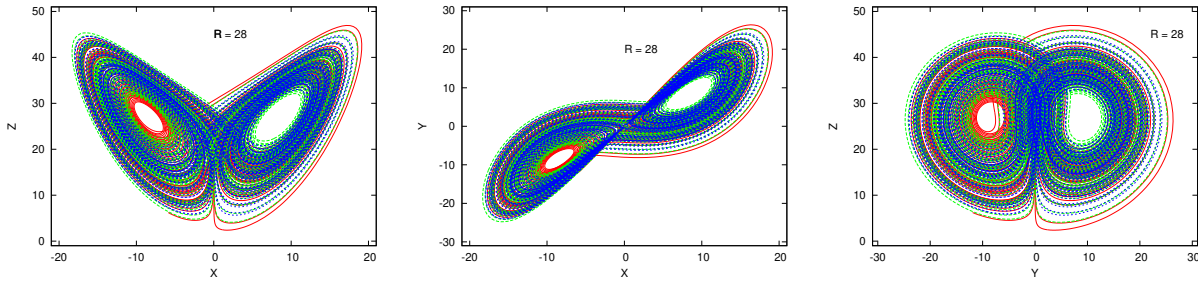
piani  $(x,z)$ ,  $(x,y)$  e  $(y,z)$  dell'orbita per  $R = 28$ . Il sistema di Lorenz è stato integrato per un tempo  $T = 2000$ , con un passo di integrazione  $\Delta t = 0.001$  e con un transitorio uguale a 1990. I tre colori, nella figura, sono relativi a tre attrattori con condizione iniziale  $X = Y = -0.5; Z = 0.5$  e con altre due condizioni iniziali leggermente diverse. I punti di intersezione che appaiono nelle figure sono il risultato della proiezione in due dimensioni: le traiettorie, infatti, non si possono intersecare, come si potrebbe osservare in una rappresentazione tridimensionale.

Per  $R > R_c$ , un dato iniziale preso a caso, non evolve né verso l'origine, né verso gli altri due punti fissi  $C_1$  e  $C_2$ , che ora rappresentano stati di equilibrio instabili. Uno stato iniziale evolve senza mai fermarsi e il suo moto non è né periodico, né quasi periodico, ma si configura molto irregolare, anche se si svolge asintoticamente su un sottoinsieme dello spazio dei dati che ha misura nulla. Per la divergenza del flusso si ha infatti nel caso del SdL:

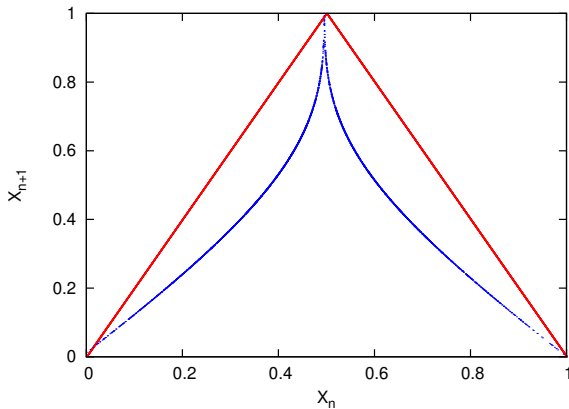
$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) \quad (7)$$

Per il teorema di Liouville il SdL è allora a volume contraente e si può inoltre dimostrare che è anche confinato.

Essendo allora un sistema dissipativo e confinato, il SdL doveva evolvere, nello spazio degli stati e secondo lo schema classico pre-Lorenz, verso una regione avente volume nullo; l'attrattore poteva allora essere un punto fisso o un ciclo limite. Come abbiamo visto, l'integrazione numerica delle equazioni, nel caso particolare di  $\sigma = 10, b = 8/3, R = 28$ , evidenziò invece, la presenza di un attrattore di tipo nuovo:



**Figura 9:** L'attrattore di Lorenz per  $R = 28$ . Proiezioni dell'orbita sui piani  $(x,z)$ ,  $(x,y)$  e  $(y,z)$ .



**Figura 10:** Grafico della mappa a tenda (colore rosso) e della mappa relativa alla variabile  $X$ , costruita con la successione dei valori dei massimi relativi della variabile  $Z$  del SdL

l'attrattore di Lorenz.

In questo moto così irregolare, Lorenz riuscì tuttavia a trovare una sorta di regolarità. Egli infatti osservò che, dopo un transiente iniziale, il valore di una coordinata, Lorenz considerò la  $z$ , rilevata ad istanti  $t_1, t_2, \dots$  scelti in modo che la  $z(t)$  avesse un massimo relativo agli istanti di osservazione, generava successioni  $z_1, z_2, \dots$  molto diverse per diversi valori iniziali, ma legate fra loro, con ottima approssimazione, da una legge della forma  $z_{n+1} = f(z_n)$ , con  $f$  deducibile dall'esame dei dati. Ponendo  $x = (z - z_{min}) / (z_{max} - z_{min})$ , dove  $z_{min}$  e  $z_{max}$  sono rispettivamente il valore minimo ed il valore massimo di  $z$ , la  $f$  può essere considerata come una trasformazione dell'intervallo  $[0, 1]$  in sé stesso.

In prima approssimazione, la funzione  $f$  può essere scritta analiticamente in modo semplice

come:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 2X_n \quad \text{per } X_n \leq \frac{1}{2} \\ X_{n+1} &= 2 - 2X_n \quad \text{per } X_n > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Questa mappa ha un grafico a tenda, (Fig. 10), con una derivata a modulo costante uguale a 2 e discontinua in  $x = 1/2$ , ove cambia segno.

La mappa a tenda ha una dipendenza sensibile dai dati iniziali: la differenza  $x'_n - x$  fra due successioni, con dati iniziali  $x'_0, x_0$ , anche molto vicini, cresce esponenzialmente come  $2^n$ , finché, ovviamente,  $|x'_n - x_n|$  è piccolo, in modo che  $x'_n$  e  $x_n$  cadano nella stessa metà dell'intervallo  $[0, 1]$ .

Inoltre, se si sceglie un dato iniziale a caso  $x \in [0, 1]$ , con distribuzione uniforme, e si considera la storia  $\bar{\sigma}(x_0)$  di  $x_0$  sugli insiemi  $P_1 = [0, 1/2]$  e  $P_2 = [1/2, 1]$ , vale a dire se si definisce la successione  $\bar{\sigma}(x_0) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots)$ , con  $\sigma_i = 1, 2$  tali che  $f^i(x_0) \in P_{\sigma_i}$ , allora la probabilità che il dato iniziale  $x_0$  sia tale che i primi  $k$  elementi della successione  $\bar{\sigma}(x_0)$  coincidano con una stringa arbitrariamente data è  $2^{-k}$ . Questo significa che il moto di un  $x_0$ , scelto a caso in  $[0, 1]$ , con distribuzione uniforme, produce successioni di simboli  $\sigma_0, \sigma_1, \dots$  che hanno la stessa statistica di quelle prodotte dal lancio di un dado perfetto a due facce e sono, perciò, isomorfe ad uno schema di Bernoulli: tali successioni sono ad entropia o complessità positiva [14].

Nonostante il suo carattere deterministico, la divergenza esponenziale delle traiettorie ci dice che per prevedere il valore di  $x_n$  in termini di  $x_0$  e per  $n$  grande è necessaria una conoscenza del dato iniziale  $x_0$  con una precisione in pratica irrealizzabile. Inoltre il moto è talmente caotico da poter essere utilizzato, in linea di principio,

per produrre successioni di numeri a caso, come quelli che si ottengono lanciando un dado perfetto.

Si può dimostrare che un moto quasi periodico non può generare moti che manifestino queste proprietà, per cui il SdL, per  $R$  grande, descrive moti caotici, salvo dati iniziali eccezionali, formanti un insieme di misura nulla nello spazio dei dati iniziali, fra cui i dati con  $x = y = 0$ .

Queste due proprietà di dipendenza sensibile e di divergenza esponenziale si possono intuire direttamente osservando la Fig. 11 che mostra come variano asintoticamente in funzione del tempo le coordinate  $X$  e  $Z$  per  $R = 28$ .

La figura evidenzia delle oscillazioni di ampiezza sempre crescente attorno ad uno stato di equilibrio instabile, fino a che, quando le oscillazioni diventano troppo ampie, il punto rappresentativo inizia ad oscillare attorno all'altro stato di equilibrio instabile. Gli intervalli di tempo durante i quali l'orbita si sviluppa nell'intorno di un punto, prima si sviluppa nell'intorno dell'altro, sono distribuiti casualmente e non c'è alcuna regolarità nel processo.

Questo comportamento è tipico di un sistema dinamico con comportamento caotico ed è legato a due processi fondamentali che subisce l'orbita in funzione del tempo: le operazioni di stiramento e di piegatura che hanno luogo nello spazio degli stati. La divergenza esponenziale, connessa con la sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali, è un fenomeno ovviamente locale in quanto, essendo finita la regione occupata dall'attrattore nello spazio degli stati, due orbite, situate sull'attrattore, non possono divergere esponenzialmente indefinitamente. Ne segue che l'attrattore deve ripiegarsi su se stesso per cui due orbite, pur sviluppandosi in regioni diverse, devono, prima o poi, passare l'una accanto all'altra.

Il processo di stiramento e piegatura può avvenire più volte e può produrre pieghe entro altre pieghe, all'infinito. Per avere un'idea di questo processo di mescolamento delle orbite nello spazio degli stati in un sistema che evolve caoticamente, basta pensare ad un panettiere che impasta il pane e immaginare ciò che accade alle traiettorie vicine, pensando a quello che succede quando si versa nella pasta, per esempio, una goccia di colorante blu. L'operazione di impasto è la combinazione di due azioni: lo stendimento

della pasta, che fa diffondere il colorante ed il ripiegamento della pasta su se stessa. Dapprima la chiazza di colorante semplicemente si allunga, ma poi viene ripiegata e, dopo un tempo piuttosto lungo, si trova stirata e ripiegata molte volte. Osservandolo da vicino, si vede che l'impasto consiste di molti strati, alternativamente blu e bianchi e che la distribuzione del colorante all'interno della pasta appare casuale. Uno studio più accurato metterebbe in evidenza, comunque, una struttura ordinata e ripetitiva: una struttura frattale.

Ebbene, l'attrattore che descrive il moto asintotico nel modello di Lorenz per valori di  $R > R_c$  è un insieme frattale.

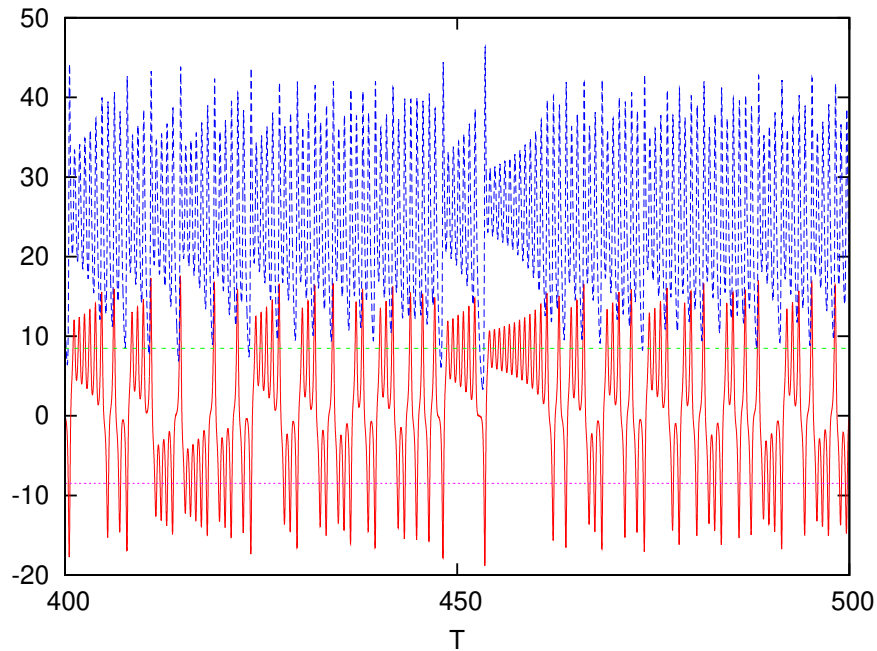
Siamo giunti così a caratterizzare con due proprietà fondamentali l'attrattore di Lorenz: una dinamica, legata alla dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, che si manifesta con la divergenza esponenziale locale, quantificabile con degli esponenti caratteristici detti **esponenti di Lyapunov** introdotti nel 1982 dal fisico e matematico russo A. M. Lyapunov, con lo scopo di determinare criteri di stabilità delle soluzioni di un certo tipo di equazioni differenziali [15]; l'altra geometrica, connessa con la sua struttura frattale e quantificabile con la dimensione frattale.

Ma nel 1963, i frattali non erano ancora nati. Sarebbero stati introdotti solo nel 1975 dal matematico francese Benoit Mandelbrot (1924-2010) nel saggio "*Les objets fractals*" [16].

## L'attrattore strano

Il matematico e fisico belga David Pierre Ruelle (1935) ha dato notevoli contributi alla matematica e alla fisica del caos. Sul fenomeno della turbolenza nutriva dei dubbi sul quadro classico congetturato da Lev D. Landau [13]. Che cosa accade quando ha inizio la turbolenza? Prima che la turbolenza si sviluppi completamente, quali fasi intermedie ci sono?

Secondo l'ipotesi di Landau, quando in un sistema viene immessa energia, compaiono, una per volta, frequenze diverse ed il numero di equazioni che descrivono il moto dovrebbe aumentare corrispondentemente all'aumento dei gradi di libertà e ai moti presenti nel sistema. I Fisici avevano accettato questo quadro, anche se nessuno era in grado di predire quando un aumento



**Figura 11:**  $R = 28.0$ . Le coordinate  $x$  (colore rosso) e  $z$  (colore blu) in funzione del tempo. La linea retta verde  $x = [B(R-1)]^{1/2}$  indica la coordinata  $x$  del punto  $C_1$ ; la linea retta viola  $x = -[B(R-1)]^{1/2}$  indica la coordinata  $x$  del punto  $C_2$ .

di energia avrebbe fatto comparire nella dinamica del sistema una nuova frequenza o quale sarebbe stata la frequenza successiva. Nessuno aveva mai osservato il nascere di queste frequenze, anche perché nessuno aveva mai sottoposto a controllo sperimentale il paradigma di Landau per l'inizio della turbolenza.

Negli anni '70 del secolo scorso, la ricerca sulle transizioni di fase aveva risolto molti problemi. I metodi matematici e le tecniche con cui erano state studiate queste transizioni potevano applicarsi al moto dei fluidi? In una cella di fluido, per esempio, come abbiamo già visto, un liquido riscaldato dal basso passa improvvisamente da uno stato di quiete ad uno di moto. Aveva nulla a che fare questo tipo di transizione con i mutamenti che si verificano in una sostanza in una transizioni di fase? A differenza delle transizioni di fase, comunque, le biforcazioni nei fluidi non comportavano alcun mutamento nella sostanza stessa. Quello che succedeva era semplicemente che un liquido in quiete diventava un liquido in movimento.

Nel 1973 Harry Swinney del City College di New York e Jerry Gollub, un giovane diplomato di Harvard, pensando ad una connessione tra le transizioni di fase e l'instabilità nei fluidi, deci-

sero di esaminare un sistema classico di liquido confinato tra due cilindri verticali. Un cilindro ruotava all'interno dell'altro, trascinando con sé il liquido nella sua rotazione. I cilindri, ruotando, producevano il cosiddetto flusso di Couette-Taylor. Quando la rotazione diventava più veloce, si verificava una instabilità: il liquido formava una configurazione simile ad una serie di tubi sovrapposti. Attorno al cilindro apparivano bande in forma di ciambelle, una sopra l'altra. Questo fenomeno era già stato osservato e misurato da G. I. Taylor nel 1923 [17].

Landau aveva scritto che, al crescere di un flusso, sarebbero apparse in un sistema nuove frequenze, una alla volta. Ma l'esperimento non confermò la teoria. Dall'abstract dell'articolo di Swinney e Gollub [18]:

*" Misure di diffusione della luce sulla velocità radiale locale, dipendente dal tempo, in un fluido rotante rivelano tre distinte transizioni con l'aumento del numero di Reynolds, ognuna delle quali aggiunge una nuova frequenza allo spettro delle velocità. Ad un maggiore, precisamente definito, valore del numero di Reynolds tutti i picchi discreti scompaiono improvvisamente. Le*

*nostre osservazioni contraddicono il quadro di Landau sulla formazione della turbolenza, ma sono, forse, consistenti con le proposte di Ruelle e Takens."*

Non c'era nessuna nuova frequenza, nessun accumulo graduale di complessità. Il flusso diventava improvvisamente caotico.

I risultati dell'esperimento illustravano in qualche modo un fenomeno di turbolenza che Ruelle aveva ipotizzato due anni prima. Pur non avendo alcuna esperienza sul moto dei fluidi, Ruelle aveva sviluppato sulla turbolenza un quadro alternativo a quello di Landau. Insieme al matematico olandese Floris Takens aveva pubblicato nel 1971 un articolo dal titolo "On the nature of Turbulence" [19], un titolo che ricordava quello dell'articolo di Landau "Sul problema della turbolenza". Invece di vedere nella turbolenza un accumulo di frequenze, che conducevano ad un'infinità di moti indipendenti che si sovrapponevano, i due autori avevano ipotizzato che, per generare la complessità della turbolenza, fossero sufficienti solo tre moti indipendenti.

Secondo Ruelle, inoltre, la dissipazione di energia in un flusso turbolento doveva condurre ad una sorta di contrazione dello spazio delle fasi, ad un'attrazione verso un attrattore. Questo attrattore non poteva essere un punto fisso, in quanto il flusso non si fermava mai. Nel sistema veniva dissipata energia ma, d'altra parte, ne veniva anche immessa. L'altra possibilità era allora che l'attrattore fosse un ciclo limite. Ora gli attrattori, per definizione, sono strutture stabili. Una caratteristica ben nota della turbolenza era la presenza simultanea dell'intero spettro dei cicli possibili. Nella turbolenza non viene mai prodotto alcun ritmo singolo ad esclusione di altri ed in questo senso la turbolenza è come un rumore bianco. Un ciclo limite, quindi, non poteva formarsi.

C'era forse un qualche tipo di attrattore, non ancora noto, stabile, che descrivesse lo stato finale di un sistema dinamico, con un piccolo numero di dimensioni? Quale tipo di orbita poteva essere attratta in uno spazio limitato in modo tale, però, da non ripetersi mai e da non intersecarsi mai? Per produrre poi ogni ritmo, l'orbita avrebbe dovuto essere una linea infinitamente lunga in un'area finita. Insomma, un attrattore

con queste proprietà, che Ruelle e Takens battezzarono **attrattore strano**, avrebbe dovuto essere un frattale, anche se questa parola, nel 1971, non era stata ancora inventata.

Secondo Ruelle e Takens, un attrattore del genere doveva esistere da qualche parte. La reazione della comunità scientifica all'articolo di Ruelle e Takens fu molto fredda, soprattutto perché la nozione di uno spettro continuo, associato a pochi gradi di libertà, sembrava alquanto innaturale. Ma ci furono dei fisici che si resero conto dell'importanza dell'articolo e cominciarono a svilupparne le implicazioni.

In effetti, nel 1971, esisteva già nella letteratura scientifica uno schizzo di questo attrattore. Era l'attrattore dell'articolo di Lorenz del 1963. Certo, non aveva l'aspetto che possiamo ammirare ora nella miriade di rappresentazioni che è possibile avere con gli attuali calcolatori. Nell'articolo di Lorenz era un'immagine con solo due curve a destra, una contenuta nell'altra, e cinque a sinistra. Per tracciare queste sette spire si era reso necessario un enorme lavoro con il calcolatore. Ma sebbene Lorenz ne avesse disegnato un frammento, si poteva intravedere, nello scarno schizzo, più di quello che aveva disegnato: una sorta di doppia spirale, che stilizzava le ali di una farfalla: un'immagine di affascinante bellezza, che raramente è possibile osservare in un articolo scientifico.

L'attrattore era stabile, aveva un piccolo numero di dimensioni, era aperiodico e non poteva mai intersecarsi. Le curve rimanevano sempre all'interno di uno spazio finito ed un numero infinito di traiettorie, al trascorrere del tempo, poteva essere contenuto in uno spazio finito. In altre parole, l'attrattore scoperto da Lorenz era proprio una realizzazione dell'attrattore strano ipotizzato e cercato da Ruelle e Takens ed era un insieme frattale.

Come possiamo allora caratterizzare matematicamente una struttura del genere? Come abbiamo già accennato, un sistema dinamico deterministico si dice caotico se la sua evoluzione nel tempo è caratterizzata da una sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali, cioè se due traiettorie  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{x}'(t)$ , inizialmente vicine, si allontanano esponenzialmente:

$$|\delta\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)| \sim \epsilon e^{\lambda t}$$

Se allora si vuole predire lo stato del sistema con una tolleranza  $\delta$ , non è possibile andare oltre il tempo di predicibilità  $T_p$  dato dalla relazione:

$$T_p \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\delta}{\epsilon}$$

Praticamente,  $T_p$  è determinato essenzialmente dall'esponente di Lyapunov  $\lambda$ . Nei sistemi con una forte dipendenza dalle condizioni iniziali, dopo un tempo  $T_p \sim k/\lambda$ , dove  $k$  dipende, seppure poco, dalle condizioni iniziali, non ha più senso parlare di previsioni dello stato del sistema.

Come è ben noto, è possibile definire tutto uno spettro di esponenti di Lyapunov (EL)  $\lambda_i$ . Si consideri un sistema dissipativo  $d$ -dimensionale. Una sfera  $d$ -dimensionale, con centro in  $\mathbf{x}(0)$  all'interno dell'attrattore, di raggio  $\epsilon$  molto piccolo, si deforma, durante l'evoluzione temporale, in un ellisse il cui volume diminuisce con il tempo. Se al tempo  $t$  l'ellisse ha semiassi  $l_i(t)$ , gli esponenti caratteristici di Lyapunov  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_d$ , per  $t$  molto grande, sono definiti dalla relazione:

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \ln[l_i(t)/\epsilon] \quad (9)$$

Il primo esponente  $\lambda_1$  coincide con il  $\lambda$  introdotto precedentemente e nei sistemi dissipativi si ha sempre  $\sum_i \lambda_i < 0$ .

Gli EL permettono di classificare gli attrattori: (a) per un punto fisso asintoticamente stabile tutti gli EL sono negativi; (b) per un ciclo limite si ha  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_i < 0$  per  $i > 1$ ; il moto su un toro  $k$ -dimensionale avrà  $k$  EL nulli.

Possiamo allora dire che:

**un insieme denso e limitato è un attrattore caotico se è un attrattore e se  $\lambda_1 > 0$ .**

La presenza di stiramento ( $\lambda_1 > 0$ ) provoca la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Se oltre a  $\lambda_1$  ci sono altri EL positivi, si parla di ipercaos. L'attrattore di Lorenz ha un esponente di Lyapunov positivo per cui è un attrattore caotico. Perché viene chiamato strano?

**La sua stranezza attiene alla sua dimensione frattale, che non è un numero intero.**

Come è ben noto, il termine **frattale** fu introdotto nel 1975 dal matematico francese Benoit Mandelbrot (1924-2010) nel saggio "Les objects

*fractals*", per indicare un sistema che gode della proprietà di **autosimiglianza**: una qualunque parte di un sistema che gode di questa proprietà, per quanto piccola, opportunamente ingrandita, rivela una struttura identica a quella dell'intero sistema. In generale, tale proprietà di invarianza di scala dà luogo ad una dimensione non intera.

I concetti di autosimiglianza e di dimensione non intera erano stati discussi da F. Hausdorff nel 1919 ed in una certa misura anche da H. Poincaré nel 1885. Per lungo tempo, però, queste idee furono considerate esclusivamente come delle curiosità matematiche; solo in tempi recenti sono state sviluppate per descrivere strutture fortemente irregolari che sono molto comuni nei fenomeni naturali.

Una proprietà che esprime in termini qualitativi la complessità delle figure frattali è quella della **dimensione frazionaria**, ovvero della **dimensione frattale** o **dimensione di similitudine**. La familiare dimensione topologica (euclidea) di un frattale non coincide con questa dimensione. Mandelbrot suggerì di definire **frattale** un insieme che ha dimensione non intera rispetto ad una qualsiasi definizione di dimensione.

Oltre a quella euclidea, ci sono molte definizioni di dimensione di un insieme di punti. Ricordiamo la **dimensione di Hausdorff**, la **dimensione di ricoprimento** o **box-counting**, la **dimensione di correlazione**, la **dimensione di Lyapunov**, ecc.. Diamo, qui di seguito, la definizione di dimensione di ricoprimento.

"Dato uno spazio metrico  $S$  ed un insieme limitato  $E \subseteq S$ , per ogni numero reale  $\epsilon > 0$ , è possibile ricoprire  $E$  con un numero finito di sfere di raggio  $\epsilon$ . Detto  $N(\epsilon)$  il più piccolo di questi numeri, la quantità :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \quad (10)$$

è detta **dimensione di ricoprimento di  $E$** ."

Si può dimostrare che, per tutte le figure geometriche sufficientemente regolari, la nozione di definizione data coincide con la nozione intuitiva di dimensione e, in particolare, si trova che  $d$  è un numero intero. Esistono tuttavia insiemi la cui dimensione di ricoprimento non è intera. Per esempio, per l'intreccio di Sierpinski, sia la dimensione di ricoprimento, che quella di

Hausdorff sono uguali a  $\ln 3 / \ln 2 = 1.58496$ ; la stessa cosa si verifica per l'insieme di Cantor, con le due dimensioni uguali a  $\ln 2 / \ln 3 = 0.630$  e per l'isola di Koch con entrambe le dimensioni uguali a  $\ln 4 / \ln 3 = 1.2618$ .

In genere, la dimensione di un frattale, maggiore della sua dimensione topologica, è minore della dimensione topologica dello spazio euclideo in cui il frattale è immerso, con qualche eccezione: per la curva di Peano, che è immersa in un piano, la dimensione di ricoprimento è uguale a  $\ln 9 / \ln 3 = 2$ , il valore massimo consentito.

La dimensione di ricoprimento fa parte di un set di dimensioni generalizzate  $D_q$  con  $q$  intero maggiore o uguale a zero, per mezzo delle quali si può caratterizzare un attrattore.

Consideriamo un sistema dinamico dotato di attrattore in  $R^n$  e una successione di  $N$  punti appartenenti all'attrattore ai tempi  $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_{N-1} = (N-1)\Delta t$ . Ricopriamo l'intero attrattore con celle cubiche di lato  $\epsilon$ . Sia  $N(\epsilon)$  il numero di celle contenenti almeno uno degli  $N$  punti. La probabilità  $P_k$  di trovare un punto dell'attrattore nella  $k$ -esima cella (con  $k = 1, 2, \dots, N$ ) si può calcolare tramite la relazione  $P_k = \lim_{N \rightarrow \infty} N_k / N$ , dove  $N_k$  è il numero di punti che cadono nella  $k$ -esima cella. Allora, l'insieme di dimensioni generalizzate  $D_q$ , con cui si può caratterizzare l'attrattore, è definito da:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} P_k^q}{\ln \epsilon} \quad (11)$$

Per  $q = 0$  la (11) fornisce la dimensione di ricoprimento, per  $q = 1$  definisce quella che viene chiamata **dimensione di informazione**:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N P_k \ln P_k}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-S(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (12)$$

dove la quantità  $S(\epsilon) = -\sum_{k=1}^N P_k \ln P_k$  è detta **informazione di Shannon**.

Per  $q = 2$  si ha:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{k=1}^N P_k^2}{\ln \epsilon} \quad (13)$$

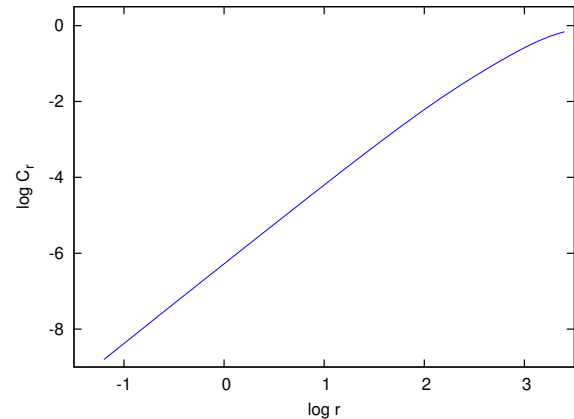
che fornisce la definizione della **dimensione di correlazione**.

Un calcolo concreto della dimensione frattale di un attrattore può essere eseguito utilizzando

il metodo di Grasberger e Procaccia [20]. Per un segnale variabile  $\vec{x}(t_i)$ , si introduce la funzione di correlazione di Grasberger e Procaccia, definita come:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j}^N \theta(r - \|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_j)\|) \quad (14)$$

dove  $N$  è il numero di punti della serie temporale e  $\theta$  è la funzione a scalino di Heaviside.



**Figura 12:** Il logaritmo della funzione di correlazione  $C_r$  in funzione del logaritmo del raggio  $r$ , per  $R = 28$  ed una serie temporale di 30000 punti.

In pratica, per un sistema tridimensionale come quello di Lorenz, si prende un punto della serie temporale e si considera la sfera di raggio  $r$  centrata su questo punto. Si calcola il numero di punti all'interno di questa sfera e si ripete l'operazione per tutti i punti. La somma di tutti i punti interni, divisa per  $N(N-1) \simeq N^2$ , fornisce la funzione di correlazione di Grasberger e Procaccia. Se, per  $r$  piccolo,  $C(r)$  varia secondo la legge di potenza

$$C(r) = \gamma r^{d_c} \quad (15)$$

ovvero se si ha:

$$\log C(r) = \log \gamma + d_c \log r \quad (16)$$

con un fit della curva  $\log C(r)$  in funzione di  $\log r$ , si può calcolare  $d_c$ , che è una buona approssimazione della dimensione frattale  $D_2$ .

Tipicamente il grafico si deforma sia per  $r$  grande, in quanto il numero delle coppie con distanza minore di  $r$  satura, sia per  $r$  piccolo dove le



coppie si rarefanno. La stima della pendenza del grafico va quindi effettuata per valori di  $r$  intermedi. Questo metodo in genere funziona, fornisce cioè la dimensione dell'attrattore, per sistemi che sono sicuramente caratterizzati da caos deterministico, nel caso cioè in cui si sappia preventivamente che esiste un attrattore del sistema in esame.

Nel caso generale di segnali di origine sperimentale, tuttavia, quasi sempre non si sa se il sistema è dominato da processi stocastici o da caos deterministico. In Fig. 12 è riportato il logaritmo della funzione di correlazione in funzione del logaritmo di  $r$ , per  $R = 28$ . Il valore stimato di  $d_c$  è di 2.09. Valori di  $d_c$  circa uguali si hanno per  $R$  compreso tra 25 e 30. Inoltre, un calcolo numerico approssimato della dimensione di ricoprimento  $D_0$  dell'attrattore, per  $R = 28$ , fornisce il valore  $D_0 = 2.92$ .

## Il sistema di Lorenz per grandi valori del parametro $R$ .

Per grandi valori del parametro  $R$ , le coordinate  $x, y$  e  $z$  non sono particolarmente convenienti per l'integrazione numerica in quanto scalano in modo differente; l'integrazione numerica del SdL diventa più agevole introducendo una trasformazione di scala per la variabile indipendente  $t$  e per le variabili dipendenti  $x, y$  e  $z$ .

Consideriamo le trasformazioni di scala introdotte da Howard [22]:  $x = x'/\epsilon$ ;  $y = y'/(\sigma\epsilon^2)$ ;  $z = z'/(\sigma\epsilon^2)$ ;  $t = \epsilon t'$ ;  $\epsilon = 1/(\sqrt{\sigma R})$ .

Nelle nuove variabili  $t', x', y'$  e  $z'$ , ribattezzate per comodità  $t, x, y$  e  $z$ , il SdL si scrive:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon\sigma x \\ \dot{y} &= -xz + x - \epsilon y \\ \dot{z} &= xy - \epsilon bz \end{aligned} \quad (17)$$

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ), queste equazioni si riducono ad un sistema conservativo integrabile, le cui soluzioni possono essere espresse in termini delle funzioni ellittiche jacobiane. Introducendo la variabile  $w = 1 - z$ , nel caso  $\epsilon = 0$ , gli integrali del moto possono essere espressi come:

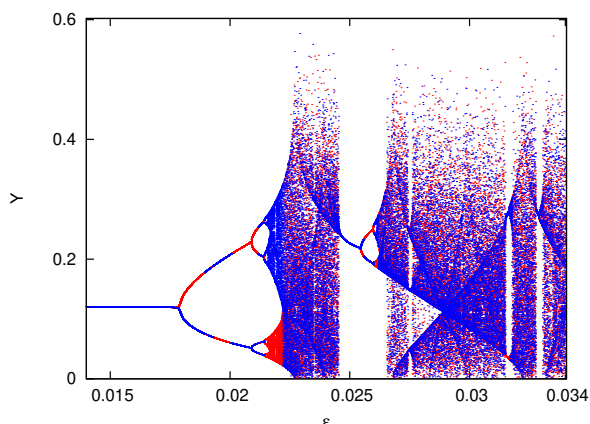
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + w = A \\ y^2 + w^2 = B^2 \end{cases}$$

Questi due integrali primi definiscono una famiglia a due parametri di soluzioni periodiche. Per  $B$  fissato, le soluzioni giacciono su un cilindro di raggio  $B$  disposto lungo l'asse  $x$ . Quando  $A < B$ , c'è una soluzione autosimmetrica, quando  $A > B$  ci sono due soluzioni ottenibili l'una dall'altra tramite l'operazione di simmetria (anche nelle nuove variabili il SdL conserva la simmetria  $(x, y, w) \rightarrow (-x, -y, w)$ ).

Per avere una visione globale del tipo di soluzioni che il SdL ha quando il parametro  $R$  diventa molto grande, al limite infinito, possiamo costruirci una sorta di mappa di Poincaré. Un flusso continuo può generare una mappa discreta in almeno due modi: con una mappa a tempo  $T$  e con una mappa di Poincaré. Una mappa a tempo  $T$  si costruisce campionando il flusso ad intervalli di tempo  $t = nT$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Molto più importante è la mappa di Poincaré. Sia  $\gamma$  l'orbita di un flusso in  $R^n$ . È spesso possibile individuare una sezione trasversale locale  $\Sigma$  intorno a  $\gamma$  di dimensione  $n - 1$ , in modo tale che tutte le orbite in un intorno di  $\gamma$  attraversino  $\Sigma$ . L'esperienza mostra che le proprietà essenziali di un sistema di equazioni differenziali sono riflesse nelle proprietà equivalenti della mappa. Per esempio, un'orbita periodica "semplice" corrisponde ad un punto fisso della mappa; l'orbita periodica è stabile se, e solo se, il punto fisso è stabile. In questo modo le proprietà asintotiche del sistema risultano visibili più chiaramente e più facilmente rappresentabili graficamente. Il problema risulta inoltre più semplice in quanto si ha a che fare con una mappa invece che con un sistema di equazioni differenziali e la dimensione del sistema da studiare è ridotta di una unità. Il tempo di calcolo, comunque, non diminuisce in quanto, in generale, non è possibile ottenere un'equazione esplicita per la mappa.

Per costruirci, allora, una mappa di Poincaré, consideriamo il piano  $x = 0$  e, per ogni valore di  $\epsilon$ , monitoriamo i valori di  $y, w$  e  $t$  quando l'orbita attraversa questo piano per  $x$  crescenti. Grafici di biforcazione possono allora essere costruiti riportando i valori di  $y, w$  o degli intervalli di tempo  $T$  tra due successivi attraversamenti del piano

$x = 0$ , in funzione del parametro di biforcazione  $\epsilon$ . Nella Fig. 13 è mostrata la mappa di Poincaré relativa alla variabile  $y$  per  $\epsilon$  compresa tra 0.014 e 0.034.



**Figura 13:**  $y$  in funzione di  $\epsilon$  sul piano  $x = 0$ . Si è prima realizzata una mappa con la condizione iniziale  $x = y = w = 0.5$  per ogni valore di  $\epsilon$ . Poi si è realizzata un'altra mappa con la condizione iniziale simmetrica  $x = x = -0.5$ ;  $w = 0.5$ . Il grafico di questa figura è il risultato della sovrapposizione delle due mappe di Poincaré.

La mappa di Poincaré è stata realizzata integrando il SdL per un tempo  $T = 2000$  con un passo di integrazione  $\Delta T = 10^{-3}$  e rilevando i dati dopo un transiente uguale a 1000. I valori di  $\epsilon$  tra 0.014 e 0.034 corrispondono ai valori del parametro  $R$  rispettivamente tra  $\sim 510.20$  e  $\sim 86.51$ .

Dall'analisi della mappa, si possono ricavare gli intervalli di  $\epsilon$  all'interno dei quali il SdL ammette soluzioni periodiche. Si possono individuare agevolmente cinque finestre di periodicità più o meno estese, con la prima finestra che si estende da  $\epsilon = 0$  a  $\epsilon \simeq 0.022$ , intervallo corrispondente ai valori di  $R$  da  $\infty$  a  $R \sim 206.61$ .

Una biforcazione, in un sistema che possiede una proprietà di simmetria, si verifica, in genere, con la rottura della simmetria originaria. Nel SdL, per  $\epsilon = 0$  e con le condizioni iniziali che abbiamo fissato, si ha un'orbita autosimmetrica ( $A < B$ ). All'aumentare di  $\epsilon$ , l'orbita si mantiene autosimmetrica fino ad  $\epsilon \simeq 0.018$  ( $R \simeq 308.64$ ), dove si ha una rottura della simmetria.

La transizione con rottura della simmetria è chiaramente evidente nella Fig. 14, dove sono riportate le proiezioni delle orbite sul piano  $(x, z)$ , relative alle 2 condizioni iniziali  $(x, y, w) =$

$(0.5, 0.5, 0.5)$  e  $(x, y, w) = (-0.5, -0.5, 0.5)$  per  $\epsilon = 0.0175$  (prima della rottura) ed  $\epsilon = 0.018$  (dopo la rottura). Le coordinate  $x$  e  $z$  che compaiono nelle due figure sono quelle del SdL originario: prima della rottura della simmetria le orbite si sovrappongono, dopo la rottura si hanno due orbite distinte.

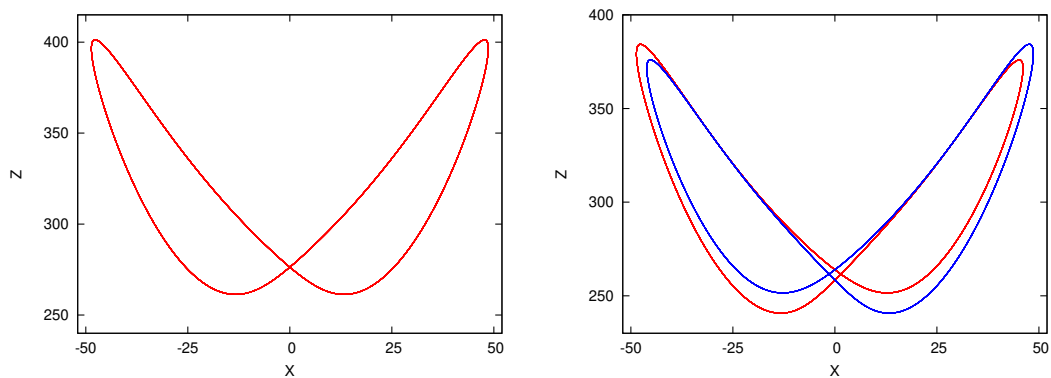
Utilizzando la descrizione simbolica, secondo la quale un'orbita periodica viene indicata con una sequenza delle lettere  $R$  ed  $L$ , a seconda che spirizzi nella regione  $x > 0$ , o nella regione  $x < 0$ , tutte le orbite periodiche della prima finestra presentano una struttura  $RL$ , che si ripete man mano che si verificano le biforcazioni. All'aumentare di  $\epsilon$ , si hanno perciò orbite del tipo  $RL, (RL)^2, (RL)^3, (RL)^4$  e così via fino al valore di accumulazione di  $\epsilon \approx 0.022$ , al di là del quale si ha caos.

Ogni finestra periodica è caratterizzata da una sequenza propria. Così, nella seconda finestra, che si estende da  $\epsilon \approx 0.0245$  ( $R \approx 166.60$ ) ad  $\epsilon \approx 0.0262$  ( $R \approx 145.68$ ), le orbite periodiche hanno una struttura  $R^2L^2$ , nella terza presentano una struttura del tipo  $RLLRLRRL$  ed attraversano in tre punti il piano  $x = 0$ . Nella quarta finestra le orbite hanno una struttura  $RLL$  ( $LRR$  per l'orbita immagine) e la transizione al caos avviene per raddoppiamento di periodo. Infine, la struttura delle orbite nella quinta finestra è del tipo  $RRRLLL$  e anche in questo caso il sistema tende al caos con il raddoppiamento di periodo.

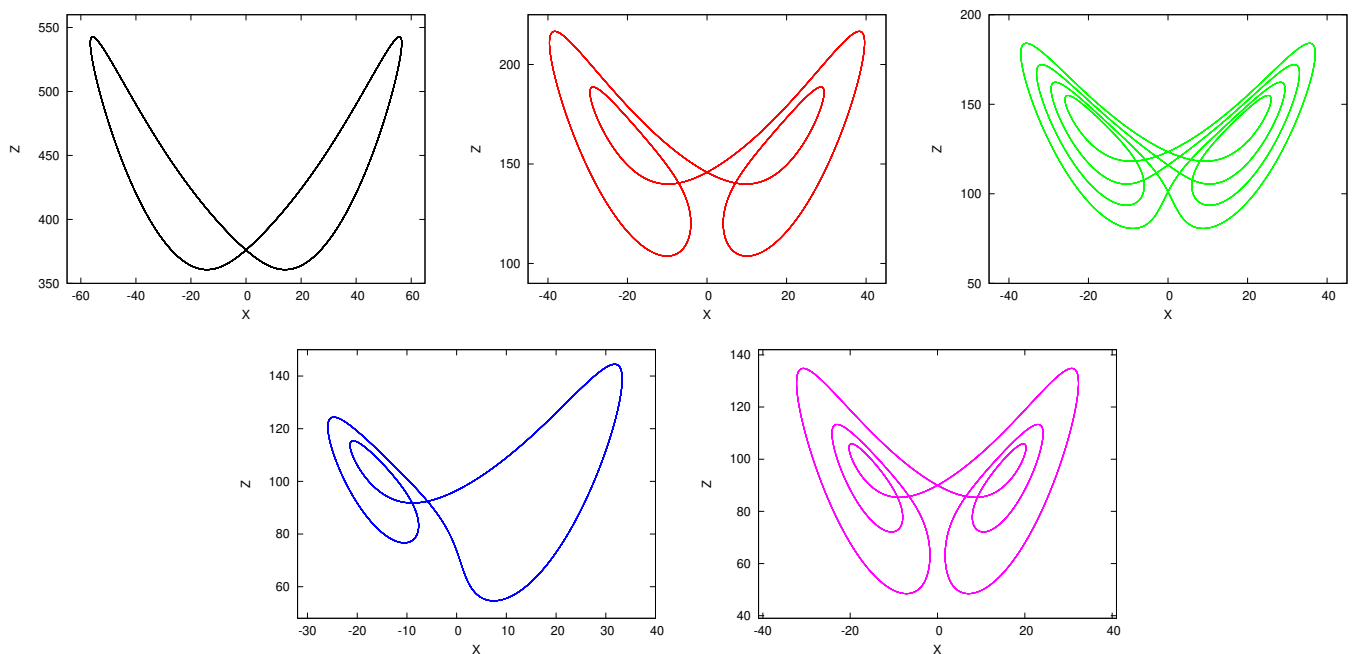
## Da Lorenz a Feigenbaum ed Hénon

Come si è già detto, i risultati ottenuti da Lorenz, non suscitavano nell'immediato molto interesse, ma con il passare degli anni, inevitabilmente, si incrociarono con il lavoro di molti fisici e matematici che, spinti da interessi diversi da quelli di Lorenz, erano approdati allo studio del caos. Uno di questi era il fisico statunitense Mitchell Feigenbaum (1944-2019).

Feigenbaum era giunto al Los Alamos Laboratory nel 1974, assunto per studiare la turbolenza. Era convinto che la ricerca in quel campo non avesse ancora colto gli aspetti fondamentali dei processi non lineari. Fisico delle particelle elementari, conosceva molto bene la teoria del



**Figura 14:** Proiezione delle orbite sul piano  $x, z$  per  $\epsilon = 0.0175$ , prima della rottura della simmetria, e per  $\epsilon = 0.018$ , dopo la rottura della simmetria.



**Figura 15:** Proiezione dell'orbita sul piano  $(x, z)$  per  $\epsilon = 0.015$  (prima finestra periodica, colore marrone);  $\epsilon = 0.025$  (seconda finestra periodica, colore rosso);  $\epsilon = 0.02745$  (terza finestra periodica, colore verde);  $\epsilon = 0.03152$  (quarta finestra periodica, colore blu);  $\epsilon = 0.0328$  (quinta finestra periodica, colore viola). Le coordinate  $x$  e  $z$  sono quelle del SdL nella forma originaria.

gruppo di rinormalizzazione di Kenneth Wilson. Ma cosa poteva dire questa teoria sull'inizio della turbolenza, quando un sistema ordinato diventava caotico? Non c'era alcuna prova che la transizione obbedisse a leggi di scala.

Risolvere un sistema di equazioni differenziali non lineari era nella maggior parte dei casi impossibile. Decise, perciò, di cominciare con lo studio di una mappa simile a quella studiata da Robert May, nel contesto della biologia delle popolazioni:

$$X_{n+1} = \lambda X_n(1 - X_n) \quad (18)$$

Nonostante la sua apparente semplicità, Feigenbaum non riuscì subito a comprendere tutti gli aspetti che questa mappa conteneva in relazione alle dinamiche che hanno luogo in un sistema caotico. Del resto, la stessa cosa era successa ad altri fisici, biologi e ai tre matematici di Los Alamos Metropolis, Paul Stein e Myron Stein che l'avevano studiata insieme ad altre mappe nel 1971 [23].

È comunque strano che nessuno si fosse reso conto allora che già nel 1964 Lorenz aveva considerato la medesima mappa per rispondere ad un preciso interrogativo sul clima: la meteorologia della Terra ha una media a lungo termine? Esiste insomma un clima? Come sottolineò Lorenz, le condizioni meteorologiche medie per gli ultimi 12000 anni sono molto diverse da quelle dei 12000 anni precedenti, quando la maggior parte dell'America settentrionale era ricoperta da ghiacci. C'era un clima che aveva ceduto il posto ad un altro per qualche motivo, oppure un sistema come quello dei fenomeni meteorologici non poteva mai convergere verso una media?

Come May, Lorenz indagò che cosa accadeva iterando la mappa. Quando i valori del parametro di controllo erano piccoli, egli osservò che il sistema raggiungeva un punto fisso stabile e interpretò questo risultato nel modo più semplice possibile: il sistema produceva un clima che non cambiava mai nel tempo. Al crescere del parametro osservò che il sistema oscillava fra due punti. Anche in questo caso il sistema convergeva verso una media. Oltre un certo limite, Lorenz osservò il caos. La media fluttuava in modo instabile. Piccole variazioni del valore del parametro di controllo comportavano variazioni considerevo-

li della media. Per analogia, il clima della Terra non avrebbe mai potuto assestarsi in una posizione di equilibrio con un comportamento medio a lungo termine. Ovviamente, queste analogie non avevano una giustificazione scientifica.

Lorenz, se da una parte era conscio che non poteva in alcun modo giustificare l'uso di una mappa tanto semplice per trarre conclusioni sul clima terrestre, dall'altra era intimamente convinto che l'equazione alle differenze finite cogliesse molti aspetti, matematici e fisici, delle transizioni da un regime di flusso ad un altro e del fenomeno dell'instabilità. Lorenz pubblicò i risultati della sua ricerca su *Tellus* [24], una rivista svedese di meteorologia. Nessuno legge *Tellus*, ebbe a dire un fisico [1] e questo è forse il motivo per cui Feigenbaum non sapeva nulla del lavoro di Lorenz.

Nell'estate del 1975, ad un convegno ad Aspen, nel Colorado, Feigenbaum aveva assistito ad una conferenza di Steve Smale sulla mappa quadratica alle differenze finite. Secondo Smale, c'erano questioni interessanti ancora aperte sul comportamento della mappa nel suo passaggio dal regime periodico a quello caotico. Feigenbaum decise allora di concentrarsi sulla regione di confine tra ordine e caos nella mappa quadratica, sperando che il comportamento della mappa in questa regione potesse suggerirgli qualcosa sulla transizione in un fluido da un regime di flusso regolare ad uno turbolento. Scopri che nell'evoluzione verso un comportamento caotico, questa regione era caratterizzata da una cascata di raddoppiamenti di periodo al variare del parametro di controllo. Calcolando, con la sua calcolatrice, i valori  $\lambda_n$  del parametro in cui si verificavano questi raddoppiamenti, Feigenbaum fece la scoperta straordinaria di una regolarità: i raddoppiamenti di periodo si verificavano sempre più rapidamente ed i valori manifestavano una convergenza geometrica, per  $n \rightarrow \infty$ , verso il valore critico  $\lambda_c = 3.5700$ . Feigenbaum calcolò il rapporto di convergenza e trovò un numero: 4.669:

$$\delta_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4.669 \dots \quad (19)$$

Si trattava di una scoperta importante, in quanto la convergenza geometrica significava che qual-

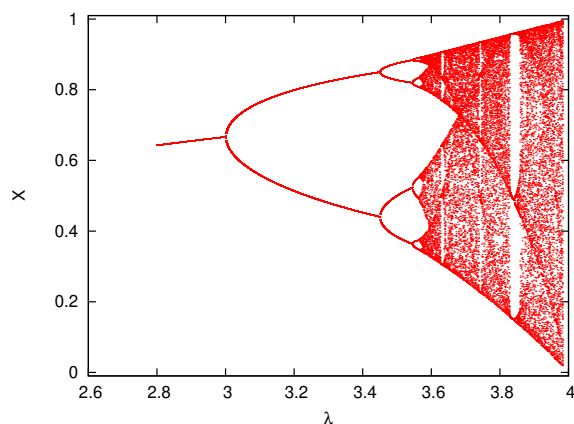
cosa nell'equazione presentava un'invarianza di scala e l'invarianza di scala è un marchio della teoria della rinormalizzazione.

Ma la cosa ancora più sorprendente era che altre equazioni alle differenze finite, di forma e significato diversi, manifestavano la convergenza verso lo stesso numero che, con un calcolo più preciso, fatto dallo stesso Feigenbaum, era diventato 4.6692016090. Questo risultato fu dimostrato, per una larga classe di famiglie di sistemi dinamici, da P. Callet, J. P. Eckmann ed O. E. Lanford III nel 1980 [25]. Quadratica o trigonometrica che fosse la mappa, il risultato era sempre lo stesso. Emergeva un ordine, che sembrava non avere una connessione con la mappa originaria. Non aveva nulla a che fare con parabole, con seni o con nessuna particolare funzione. Questa universalità, che Feigenbaum aveva scoperto, era simile a quella degli esponenti critici nelle transizioni di fase. Pur essendo possibile trovare esempi in cui il rapporto nell'Eq. (19) era diverso da  $\delta_F$ , tuttavia  $\delta_F$  era il valore normale.

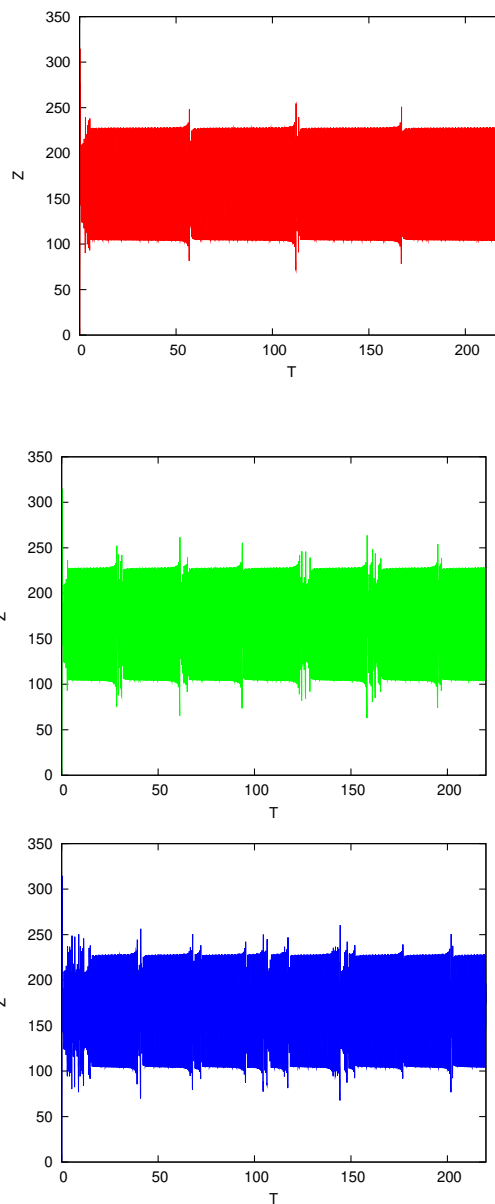
L'universalità faceva sperare che risolvendo un problema facile, i fisici potessero risolvere problemi molto più difficili. Inquadrando inoltre la sua teoria nella cornice del gruppo di rinormalizzazione, Feigenbaum la rese uno strumento di calcolo per i fisici.

L'evoluzione verso il caos, caratterizzata dal meccanismo del raddoppiamento di periodo e dalla sua proprietà di universalità, costituisce il cosiddetto **scenario di Feigenbaum**.

In Fig. 16 è riportato il grafico di biforcazione della mappa quadratica (18).



**Figura 16:** Diagramma di biforcazione della mappa quadratica.



**Figura 17:**  $z$  in funzione del tempo  $T$  per  $R = 166.07$  (colore rosso),  $R = 166.09$  (colore verde) ed  $R = 166.10$  (colore blu).

Altri scenari sono possibili. I risolti nel campo sperimentale del lavoro di Lorenz e successi-

vamente di quello di Ruelle e Takens furono molto importanti, nel senso che spinsero a realizzare molti esperimenti per controllare l'impossibilità, nella maggior parte dei sistemi, dei moti quasi periodici con più di tre frequenze. Questi esperimenti riguardavano sistemi dissipativi reali, reazioni chimiche, oppure simulazioni numeriche con i calcolatori. Nel giro di pochi anni risultò evidente che lo schema sviluppato da Ruelle e Takens, il cosiddetto **scenario di Ruelle e Takens**, era corretto: nello scenario di Ruelle e Takens rimangono, della teoria di Landau, solo le prime tre transizioni: la transizione da punto fisso a ciclo limite, quella da ciclo limite a traiettoria con due frequenze e quella da traiettoria con due frequenze a traiettoria con tre frequenze. Dopo, si ipotizza la transizione ad un moto caotico caratterizzato da un attrattore strano. Mentre lo scenario di Landau richiede un gran numero di gradi di libertà, quello di Ruelle e Takens ammette il caos anche in un sistema con soli tre gradi di libertà.

Un altro scenario molto comune, oltre a quello di Ruelle e Takens e a quello di Feigenbaum è lo **scenario dell'intermittenza**. In questo scenario l'attrattore, inizialmente costituito da un'orbita periodica, si avvicina, al crescere del parametro di controllo  $R$ , ad un'orbita periodica simile instabile, fino a confondersi con essa, per  $R = R_c$ , per poi sparire per  $R > R_c$ : una **collisione** fra orbite periodiche di opposta stabilità, con successiva **annichilazione**. Se  $C$  è la curva descritta dall'orbita periodica stabile per  $R = R_c$ , per  $R > R_c$  resta comunque una traccia di questa orbita, cosicché un punto dell'orbita che venga a trovarsi nelle vicinanze di  $C$ , tende a rimanervi a lungo seguendo da vicino la curva  $C$ , tanto più a lungo quanto più  $R$  è vicino ad  $R_c$ ; successivamente si allontana, spendendo altrove un intervallo di tempo più o meno lungo, per ritornare poi di nuovo nelle vicinanze della curva  $C$  e ripetere un'evoluzione simile. Quello che si osserva è allora un moto che sembra periodico per un tempo abbastanza lungo (**fase laminare**), cambiando poi qualitativamente carattere per un intervallo di tempo di lunghezza casuale. Si ha dunque un regime intermittente in cui si alternano fasi laminari e fasi non laminari.

I tre scenari descritti, i più comuni, possono apparire simultaneamente in uno stesso modello

in diverse regioni di variabilità del parametro di controllo. Non esauriscono, comunque, tutte le possibilità. La transizione al caos nel SdL, per  $R = R_c \sim 24.74$ , non rientra, per esempio, in uno di essi e fornisce un quarto scenario. Nel SdL, il punto di equilibrio stabile,  $C_1$  o  $C_2$ , perde la stabilità per  $R = R_c$ , ma per  $R > R_c$  non si osserva un attrattore periodico con periodo uguale a  $2\pi/\omega$ , se  $\pm\omega$  è la parte immaginaria dei due autovalori, ma appare direttamente un moto caotico.

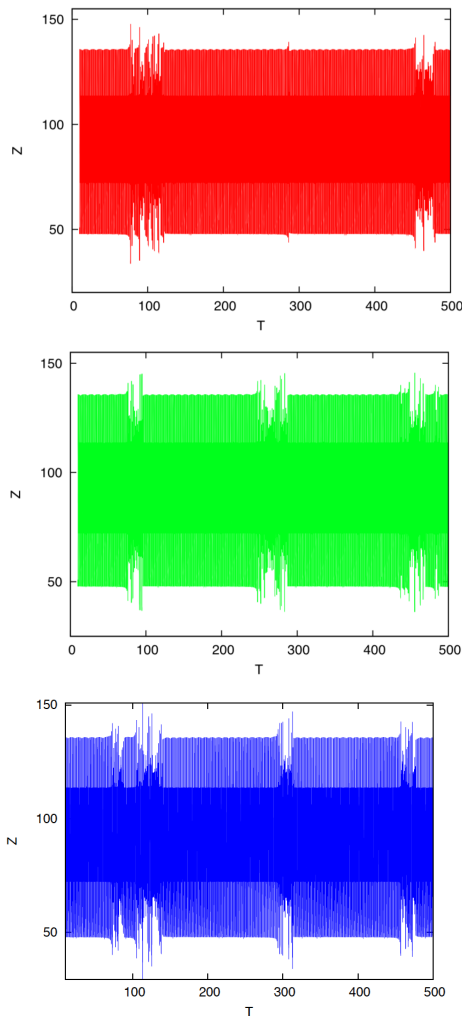
Lo scenario dell'intermittenza nel SdL appare comunque per grandi valori del parametro  $R$  al confine tra una finestra periodica e il caos. Consideriamo, per esempio, la finestra periodica che si estende da  $R = 146$  a  $R = 166$  con orbite del tipo  $R^2L^2$ . In Fig. 17 è riportata, in funzione del tempo, la variabile  $z$  per  $R = 166.07$ ,  $R = 166.09$  ed  $R = 166.10$ . La figura evidenzia chiaramente l'alternanza di fasi laminari con fasi non laminari. L'alternanza risulta più frequente e più complessa, ma mano che ci si allontana dal bordo superiore della finestra periodica.

Uno scenario di intermittenza si manifesta anche sul bordo superiore della quinta finestra periodica per  $R = 93.1585$ . In Fig. 18 è mostrato questo scenario per tre valori di  $R$ .

L'impulso allo studio dei moti caotici dato dai lavori di Lorenz, di Ruelle e Takens contribuì a chiarire questioni molto importanti relative alla dinamica del caos nei sistemi dinamici. Da una parte si cercò di visualizzare gli attrattori strani. L'attrattore di Lorenz era un attrattore tipico? Quali altri tipi di attrattore erano possibili? Dall'altra si cercò sperimentalmente di confermare o confutare l'idea dell'applicabilità degli attrattori strani al caos in natura.

In Giappone, lo studio dei circuiti elettrici condusse Yoshisuke Ueda a scoprire una serie molto bella di attrattori strani [26]. In Germania, Otto Rössler, un medico che non esercitava la professione, propose, nel 1976 [27], un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie, molto simile al SdL, che esibiva una dinamica caotica caratterizzata da un attrattore con una struttura frattale.

Ma forse, l'esempio più significativo di attrattore strano fu fornito da uno scienziato molto lontano dalla fisica e dalla matematica della turbolenza e dalla fluidodinamica: l'astronomo del-



**Figura 18:** La variabile  $z$  in funzione del tempo  $T$  per  $R = 93.158515$  (colore rosso),  $R = 93.158520$  (colore verde) ed  $R = 93.158550$  (colore blu).

l'Osservatorio di Nizza Michel Hénon. La meccanica celeste differisce da quella della maggior parte dei sistemi terrestri. I sistemi astronomici non sono dissipativi e in assenza di dissipazione lo spazio delle fasi non si contrae, né si piega o si stira per produrre una struttura frattale. Un attrattore strano non può formarsi. Hénon si era interessato della stabilità e dell'evoluzione degli ammassi globulari, aggregazioni dense di stelle. Le orbite stellari all'interno delle galassie, su una scala di tempo di 200 milioni di anni, assumono un carattere tridimensionale, anziché descrivere perfette ellissi. Per semplificare il problema, Hénon usò perciò una tecnica paragonabile alla realizzazione di una mappa di Poincaré. Immaginò un piano posto ad un lato della galassia, in

modo tale che ogni orbita lo attraversasse e andò a studiare la configurazione di punti che in questo modo veniva a formarsi.

Prima di Hénon, una generazione di astronomi aveva osservato e calcolato centinaia di orbite, interessandosi però solo a quelle che si rivelavano periodiche; lo stesso Hénon si aspettava che tutte le orbite dovessero essere regolari. All'Università di Princeton, dove si era recato in visita nel 1962 e dove, per la prima volta, ebbe accesso ai computers, insieme al suo allievo Carl Heiles, osservò invece qualcosa di totalmente nuovo quando si aumentava l'energia nel loro sistema astratto: un disordine diffuso, mescolato a strutture ordinate che suggerivano **isole e catene di isole** [28]. Difficile dare una descrizione matematica di una configurazione simile di punti ed Hénon passò ad altri problemi.

Ma quattordici anni dopo, quando sentì parlare per la prima volta degli attrattori di Ruelle e Lorenz, sebbene i sistemi dissipativi non fossero il suo campo di ricerca e tenendo forse presenti quelle strutture complesse di punti e isole che aveva ottenuto numericamente con Heiles, pensò di sviluppare una sua idea sul caos. Invece di lavorare con equazioni differenziali, decise di considerare equazioni alle differenze finite e partì dall'idea che la chiave, per comprendere il caos, doveva risiedere nei ripetuti stiramenti e piegamenti dello spazio delle fasi alla maniera di un pasticcere che ripetutamente stira e piega l'impasto. Il risultato di questa sua convinzione fu la mappa che ora ha il suo nome, appunto la mappa di Henon:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 + Y_n - A X_n^2 \\ Y_{n+1} &= B X_n \end{aligned} \quad (20)$$

In Fig. 19 sono riportati l'attrattore che Henon ottenne ponendo  $A = 1.4$  e  $B = 0.3$  e il grafico di biforcazione della sua mappa in funzione del parametro  $A$ . Come nell'attrattore di Lorenz, sempre più particolari possono essere osservati con una serie di immagini di ingrandimento progressivamente crescente. I punti vagano in modo casuale e, dopo un certo numero di iterazioni, si materializza l'attrattore mostrato in figura. Le varie dimensioni dell'attrattore di Henon (correlazione, Hausdorff, ricoprimento, Lyapunov...)

sono tutte maggiori di uno e variano tra  $\approx 1.23$  (correlazione) e  $\approx 1.27$  (ricoprimiento).

## Conclusioni

Il SdL è stato il primo sistema dinamico continuo a pochi gradi di libertà caratterizzato da un comportamento caotico con attrattore strano. Lorenz mostrò che i fenomeni atmosferici non possono essere previsti, con precisione fissata, oltre un tempo in pratica assai breve, anche se da un punto di vista matematico essi sono descritti da equazioni deterministiche. Il suo grande merito fu quello di mostrare che, sebbene le equazioni che descrivevano il suo sistema, dal punto di vista quantitativo, non potessero essere considerate una buona approssimazione del problema fisico reale, pur tuttavia esse potevano essere utilizzate, in generale, per comprendere proprietà significative di molti sistemi reali aventi un comportamento caotico.

Con il suo lavoro chiarì inoltre che non erano necessari molti gradi di libertà per osservare fenomeni molto disordinati, quali la turbolenza. Sistemi deterministici, anche molto semplici, possono essere caratterizzati da moti caotici e da una varietà di scenari nella loro evoluzione verso il caos, da renderli addirittura possibili generatori di numeri a caso. Non è inoltre necessario, perché si inneschi in questi sistemi un comportamento caotico, alcun rumore di fondo, ovvero una perturbazione stocastica agente sul sistema, anche se, ovviamente, un rumore di fondo può rendere caotico un moto non caotico. In questo caso, però, il disordine diminuirà al diminuire del rumore, mentre l'effetto di un rumore di fondo, su un moto intrinsecamente caotico di un sistema deterministico, è invece trascurabile, beninteso se il rumore è piccolo.

Il SdL evidenzia inoltre in modo significativo la differenza tra il caos deterministico e il caos di Boltzmann. In Boltzmann, la stocasticità fa muovere il sistema su una regione dello spazio delle fasi che ha la stessa dimensionalità  $N$  di tutto il sottospazio permesso dagli integrali primi del moto; nel caos deterministico dei sistemi dissipativi, non si conserva il volume nello spazio delle fasi e asintoticamente, e indipendentemente dalle condizioni iniziali, il sistema sarà confinato

in una regione di dimensioni  $D$  minori di  $N$  e l'attrattore sarà un frattale.

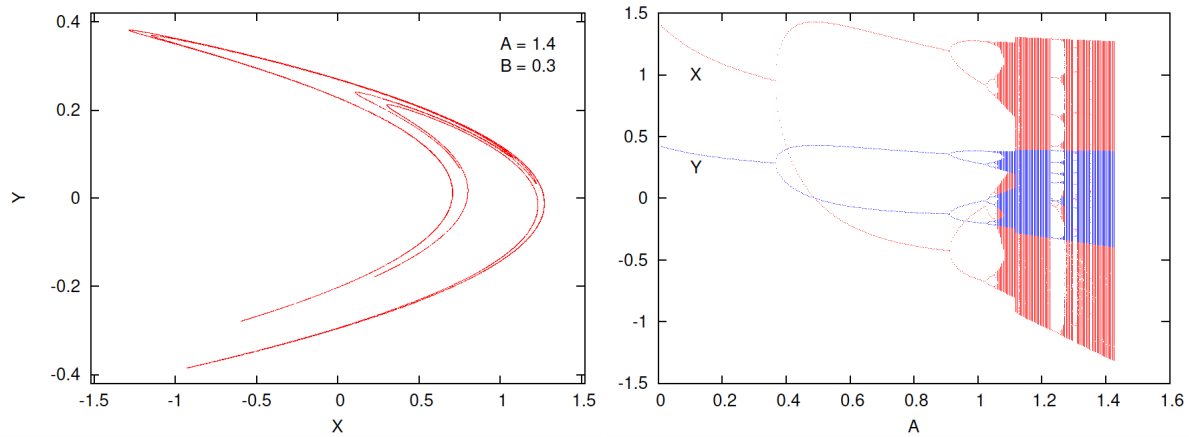
La scoperta di Lorenz è inoltre notevole, sotto un altro aspetto non meno importante, quando si vanno a considerare gli enormi sforzi e investimenti finanziari profusi in tutto il mondo per la realizzazione di programmi sempre più sofisticati per le previsioni meteorologiche. Negli anni Cinquanta e Sessanta fu messo a punto un programma internazionale che utilizzava le nuove tecnologie del computer digitale e del satellite artificiale. Sotto la guida di von Neumann, fu addirittura costruito un computer per permettere **il controllo del tempo**. Negli anni Ottanta, per realizzare il programma di von Neumann, al National Meteorological Center degli Stati Uniti fu utilizzato il supercomputer Control Data Cyber 205, che poteva effettuare milioni di operazioni al secondo, da confrontare con le sessanta moltiplicazioni al secondo del Royal McBee, il computer di Lorenz. Il modello di Lorenz era costituito da dodici equazioni, quello che risolveva il supercomputer ne conteneva centinaia di migliaia, che tenevano conto di migliaia e migliaia di dati in input. L'Europa non era da meno, con il suo European Centre for Medium Range Weather Forecasts, nei pressi di Londra.

Dati sperimentali venivano immessi nel computer come condizioni iniziali delle equazioni differenziali dei vari modelli e se qualche modello prevedeva un risultato bizzarro, i programmatori correggevano le equazioni per indirizzare i risultati verso previsioni più ragionevoli. Si diceva che l'European Centre facesse risparmiare miliardi di dollari ogni anno grazie alle sue previsioni.

Ma nel programma di von Neumann e in quelli elaborati successivamente non si teneva conto dell'insorgere del caos, dell'effetto farfalla. Al di là di due o tre giorni, anche le più accurate previsioni diventavano poco attendibili e dopo una settimana risultavano inutili.

Lorenz scopri per caso, nel 1961, l'effetto farfalla e da allora rivolse sempre più la sua attenzione alla matematica dei sistemi che non si posizionavano mai in uno stato stazionario, sistemi che, nel corso del tempo, quasi si ripetevano, ma mai in modo completo. I fenomeni meteorologici sono un sistema del genere e questo fatto aumenta le difficoltà della loro previsione da parte dei me-





**Figura 19:** L'attrattore di Henon per  $A = 1.4$  e  $B = 0.3$  e il diagramma di biforcazione di  $x$  (colore rosso) ed  $y$  (colore blu) in funzione del parametro  $A$ .

teorologi. L'effetto farfalla, inoltre, costituisce un fenomeno essenziale e non marginale, per produrre la complessità della meteorologia terrestre. Se le piccole perturbazioni, pensava Lorenz, restano piccole, invece di crescere a dismisura in certe circostanze, allora, il tempo si evolverebbe più o meno sempre allo stesso modo. L'effetto farfalla, cui successivamente sarebbe stato dato il nome tecnico di **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, costituisce allora il meccanismo essenziale per spiegare l'aleatorietà a lungo termine delle previsioni meteorologiche.

Nella sua versione in miniatura, a dodici equazioni, dei fenomeni meteorologici, Lorenz era riuscito mirabilmente a simulare sia l'aperiodicità, sia la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Poi, da matematico, lasciò stare le previsioni del tempo e andò alla ricerca di un sistema ancora più semplice, che producesse lo stesso comportamento complesso e, ispirato da un problema classico di fluidodinamica, la convezione termica, giunse alla formulazione del suo famoso sistema di tre equazioni. Del modello originario, non era rimasto quasi nulla, solo la nonlinearietà. Chissà quanti Fisici e Matematici hanno pensato di poterlo risolvere negli anni successivi!

Benché il SdL non fornisse un modello completo della convezione, risultò che descriveva esattamente altri sistemi reali. Le sue equazioni descrivono esattamente, per esempio, una vecchia dinamo, nella quale la corrente elettrica scorre attraverso un disco che ruota in un campo magnetico. In certe condizioni la dinamo può invertirsi e alcuni fisici suggerirono che il comportamento

di tale dinamo potesse fornire una spiegazione per un altro fenomeno di inversione, quello del campo magnetico terrestre [29].

Nel 1972, il fisico matematico Willem Malkus [30] fece vedere che un caso speciale delle tre equazioni del SdL descriveva anche un particolare tipo di ruota idraulica, costituita da una ruota a cui sono appesi dei secchi bucati sul fondo, che gira sotto la spinta di un getto d'acqua continuo. Questo particolare tipo di ruota è allora un sistema dissipativo al quale viene fornita continuamente energia. Il getto d'acqua, che proviene dall'alto, riempie i secchi, che fanno girare la ruota. I secchi, essendo bucati, si riempiono e si svuotano, a seconda della quantità d'acqua, dando origine ad un movimento irregolare e imprevedibile.

Ci vollero molti anni prima che tutte le proprietà del SdL, con la sua meravigliosa doppia spirale simile ad una farfalla, fossero pienamente comprese. Questo si verificò quando altri fisici, matematici, biologi ed astronomi, partendo da ambiti culturali diversi, si imbarcarono nel caos dei sistemi dinamici. Solo allora si resero conto delle straordinarie novità contenute nell'articolo di un meteorologo, pubblicato anni prima su una rivista di meteorologia.



- [1] J. Gleick, *Caos - La nascita di una nuova scienza*, BUR Le scoperte, Mondadori Libri S.p.A. (2018).
- [2] H. Bénard: "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide", *Rev. Gen. Sci. Pures Appl.* **11** (1900) 1261.

- [3] Lord Rayleigh, "On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side", *Phil. Mag.* **32**, 529 (1916).
- [4] B. Saltzman, "Finite Amplitude Convection as an Initial Value Problem", *J. Atm. Sci.*, **19**, (1962) 329.
- [5] E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow", *J. Atm. Sci.* **20**, (1963) 130.
- [6] R. Bradbury, *Rumore di tuono*, in *Fantastiche vacanze. 33 "viaggi alieni" proposti dai migliori autori di SF*, Arnoldo Mondadori Editore (1989).
- [7] J. B. McLaughlin, P. C. Martin, "Transition to turbulence in a statically stressed fluid system", *Phys. Rev. A* **12**, (1975) 186.
- [8] P. S. de Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, M.me Ve. Courcier, 2<sup>a</sup> ed., Paris, (1814), p.3.
- [9] H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris (1908).
- [10] F. T. Arecchi, "Ordine", *Enciclopedia delle Scienze Fisiche*, **IV**, Treccani, Roma (1994), p. 307.
- [11] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'ordre dans le caos*, Hermann, Paris, (1988).
- [12] Dal manoscritto letto in occasione del Conferimento della Laurea "Honoris Causa" a Lorenz, da parte dell'Università del Salento, Lecce (1992).
- [13] L. Landau, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URRS **44**, (1944) 311. L. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, London, England (1959).
- [14] G. Gallavotti, "Caos", *Enciclopedia delle scienze fisiche*, **I**, Treccani, Roma (1992), p. 493.
- [15] A. M. Lyapunov, *Problème Général de la Stabilité du Mouvement* (transl. from Russian); Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **9**, pp. 203-475, 1907. Riprodotto in Ann. Math. Study, vol. 17, Princeton 1947. Anche *The General Problem of the Stability of Motion*, Taylor and Francis, London (1992).
- [16] B. Mandelbrot, *Les objets fractals, form, hasard et dimension* (1975). *The fractal geometry of nature*, H. Freeman and Company, San Francisco (1982).
- [17] G. I. Taylor, "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders", *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **A 223**, (1923) 289.
- [18] J. P. Gollub and H. L. Swinney, "Onset of turbulence in a rotating fluid", *Phys. Rev. Lett.*, **35**, (1975) 927.
- [19] D. Ruelle, F. Takens, "On the nature of turbulence", *Comm. Math. Phys.*, **20**, (1971) 167.
- [20] P. Grasberger, I. Procaccia, "Characterization of strange attractors", *Phys. Rev. Lett.* **50**, (1983) 346.
- [21] J. Eckmann, D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Rev. Mod. Phys.*, **57**, (1985) 617.
- [22] L. N. Howard - *Notes on the 1974 Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics* - at WHOI, Woods Hole Oceanographic Inst., Woods Hole, Ma.
- [23] N. Metropolis, M. L. Stein, and P. R. Stein, "On Finite Limit Sets for Transformations on the Unit Interval", *Jour. of Combin. Theory (A)* **15**, (1973) 25.
- [24] E. Lorenz, "The problem of Deducing the Climate from the Governing Equations", *Tellus* **16**, (1964) 1.
- [25] P. Callet, J. P. Eckmann, O. E. Lanford III, "Universal Properties of Maps on an Interval", *Comm. Math. Phys.*, **76**, (1980) 211.
- [26] Y. Ueda, "Random Phenomena Resulting from Non-linearity in the System Described by Duffing's Equation", *Int. Jour. of Non-Linear Mechanics*, **20**, (1985) 481.
- [27] O. E. RöSSLer, "An Equation for continuous chaos", *Phys. Lett. A*, **57**, (1976) 397.
- [28] M. Hénon, C. Heiles, "The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments", *Astr. Jour.*, **69**, (1964) 73.
- [29] K. A. Robbins, "A Moment Equation Description of Magnetic Reversals in the Earth", *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, **73**, (1976) 4297.
- [30] W. V. R. Malkus, "Non-periodic convection at high and low Prandtl number", *Mem. Soc. R. Sci. Liege Collect.*, **IV**, (1972) 125.

---

**Mario Leo:** è stato Professore associato di Fisica Generale presso il Dipartimento di Fisica dell'Università del Salento, dove ha svolto la sua attività didattica e di ricerca fin dal 1968, dopo aver conseguito la laurea in Fisica nel 1967 presso l'Università di Roma "La Sapienza". È attualmente in pensione. Ha tenuto corsi di Fisica dei reattori nucleari, Laboratorio, Fisica Generale e Fisica dei sistemi dinamici. La sua attività di ricerca ha riguardato la Fisica dei fasci di particelle negli acceleratori, del free electron laser, del klystron ottico, effetti non lineari nelle celle solari e in semiconduttori amorfi, le equazioni di evoluzione non lineari e la Fisica e la Matematica dei solitoni, caos, la Fisica del sistema Fermi-Pasta-Ulam.