
Solitori e Triangolazioni

Triangulations and solitons

Yuji Kodama *Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, USA*

Trovare connessioni tra aree differenti della Matematica è un fatto interessante. In questo articolo mostreremo una connessione elementare, ma notevole, tra la triangolazione di poligoni e le configurazioni di onde prodotte dalle soluzioni solitoniche dell'equazione di Kadomtsev-Petviashvili (KP). L'equazione di KP descrive onde di superficie in acque poco profonde, e la connessione qui analizzata potrebbe fornire una descrizione combinatoriale delle figure a rete che spesso osserviamo su ogni spiaggia con un fondo abbastanza piatto.

L'equazione KP e le soluzioni solitoniche

Cominciamo a dare delle informazioni di base sull'equazione KP e le sue soluzioni solitoniche, chiamate KP-solitoni. L'equazione KP è un'equazione differenziale non lineare dispersiva e bidimensionale data da

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-4 \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

dove $u = u(x, y, t)$ rappresenta l'ampiezza

It is quite interesting to find a connection between several different areas of mathematical sciences. In this paper, we explain an elementary but interesting connection between the triangulations of polygons and wave patterns generated by the soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation. The KP equation describes surface waves in shallow water, and the connection discussed here may provide a combinatorial description of web-like patterns we often observed at any beach with nearly flat bottom.

The KP equation and soliton solutions

Let us first provide a background information on the KP equation and its soliton solutions, called the KP solitons. The KP equation is a two-dimensional nonlinear dispersive wave equation given by

where $u = u(x, y, t)$ represents the wave am-



Figura 1: Onde di superficie, costituite da treni d'onde quasi-solitonici in acque basse. L'interazione di tali onde può essere descritta tramite l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili. Foto scattata al Phares des Baleines, nel punto più occidentale dell' Île de Ré sulla sponda atlantica della Francia. Autore Michel Griffon, 2010-01-02.

d'onda nel piano xy ad un dato tempo t . L'equazione KP fu proposta per la prima volta per studiare la stabilità della soluzione mono-solitonica dell'equazione di Korteweg - de Vries (KdV) sotto l'influenza di una piccola perturbazione trasversale [1]. L'equazione può anche essere derivata dall'equazione di Eulero in 3 dimensioni per un fluido irrotazionale incompressibile, assumendo che si voglia descrivere la propagazione di onde di piccola ampiezza, nelle approssimazioni di grande lunghezza d'onda e di quasi bi-dimensionalità (si veda per esempio [2, 3]).

In questo breve articolo esprimiamo la soluzione u tramite una nuova funzione, chiamata funzione τ (per approfondimenti sul metodo di bilinearizzazione di Hirota si veda ad esempio [4]), nella forma seguente

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau(x, y, t). \quad (2)$$

La funzione τ soddisfa l'equazione bilineare

plitude on the xy -plane for fixed time t . The KP equation was first proposed to study the stability of one-soliton solution of the KdV equation under the influence of weak transverse perturbations [1]. The equation can be also derived from the three-dimensional Euler equation for an irrotational and incompressible fluid under the assumptions that it describes wave propagation of small amplitude, long wavelength and quasi-two dimensional approximations (see e.g. [2, 3]).

In this short note, we consider the solution u in the following form with a new function τ , called the τ -function (see e.g. [4]),

The τ -function then satisfies the bilinear equation

$$P(D_x, D_y, D_t)\tau \cdot \tau := (-4D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 0, \quad (3)$$

dove D_z^n indica la derivata di Hirota, che è definita da

$$D_z^n f \cdot g := \frac{\partial^n}{\partial s^n} f(z+s)g(z-s) \Big|_{s=0}.$$

Osservazione 1 Per piccoli valori di u si può trascurare il termine quadratico in (1) e dalla parte lineare residua si ricava la relazione di dispersione della KP, che si esprime nella forma

$$P(p, q, \omega) = -4p\omega + p^4 + 3q^2 = 0,$$

che viene soddisfatta anche introducendo la parametrizzazione

$$p = \kappa_i - \kappa_j, \quad q = \kappa_i^2 - \kappa_j^2, \quad \omega = \kappa_i^3 - \kappa_j^3, \quad (4)$$

qualunque siano le costanti κ_i and κ_j . È quindi facile vedere che una soluzione dell'equazione (3) è data dalla semplice funzione

$$\tau(x, y, t) = \sum_{i=1}^M a_i e^{\theta_i(x, y, t)} \quad \text{con/with} \quad \theta_i(x, y, t) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t.$$

Si noti che per l'Osservazione 1 si ha

$$P(D_x, D_y, D_t)e^{\theta_i} \cdot e^{\theta_j} = 0.$$

Inoltre e senza perdere di generalità, noi qui assumiamo che i parametri κ_i siano ordinati secondo la relazione

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_M.$$

Notiamo ora che se valesse sempre $a_i > 0$, avremmo $\tau > 0$, cioè la soluzione u è regolare. Nel caso in cui la funzione τ abbia solo due termini esponenziali, cioè $\tau = a_i e^{\theta_i} + a_j e^{\theta_j}$, si ottiene la soluzione mono-solitonica

$$u(x, y, t) = \frac{(\kappa_i - \kappa_j)^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\theta}_{[i, j]}(x, y, t) \right) \quad \text{con/with} \quad \tilde{\theta}_{[i, j]} = \theta_i - \theta_j + \ln \frac{a_i}{a_j}. \quad (5)$$

Denotiamo con $[i, j]$, dove $i < j$, l'indicatore di questo tipo di solitone, che chiameremo $[i, j]$ -solitone. Osserviamo che l' $[i, j]$ -solitone è localizzato lungo la linea $\tilde{\theta}_{[i, j]}(x, y, t) = 0$ nel piano xy .

Per le soluzioni solitoniche generali, la funzione τ è data dal determinante Wronskiano (si veda [4, 5, 6, 7, 8]), quindi

where D_z^n is the Hirota derivative defined by

Remark 1 The dispersion relation of the KP equation is given by

which has the following parametrization

with arbitrary constants κ_i and κ_j .

It is then easy to see that the following simple function gives a solution

Note that

$$P(D_x, D_y, D_t)e^{\theta_i} \cdot e^{\theta_j} = 0$$

from Remark 1.1. Without loss of generality, we here assume the order in the κ_i -parameters as

Note here that if all $a_i > 0$, we have $\tau > 0$ i.e. the solution is regular. One soliton solution is obtained in the case where the τ -function has only two exponential terms, i.e. $\tau = a_i e^{\theta_i} + a_j e^{\theta_j}$,

We let $[i, j]$ with $i < j$ denote the index pair for this type of soliton and call it $[i, j]$ -soliton. Note that the $[i, j]$ -soliton is localized along the line $\tilde{\theta}_{[i, j]}(x, y, t) = 0$ in the xy -plane.

For the general soliton solutions, the τ -function is given by the Wronskian determinant (see e.g. [4, 5, 6, 7, 8]), i.e.,

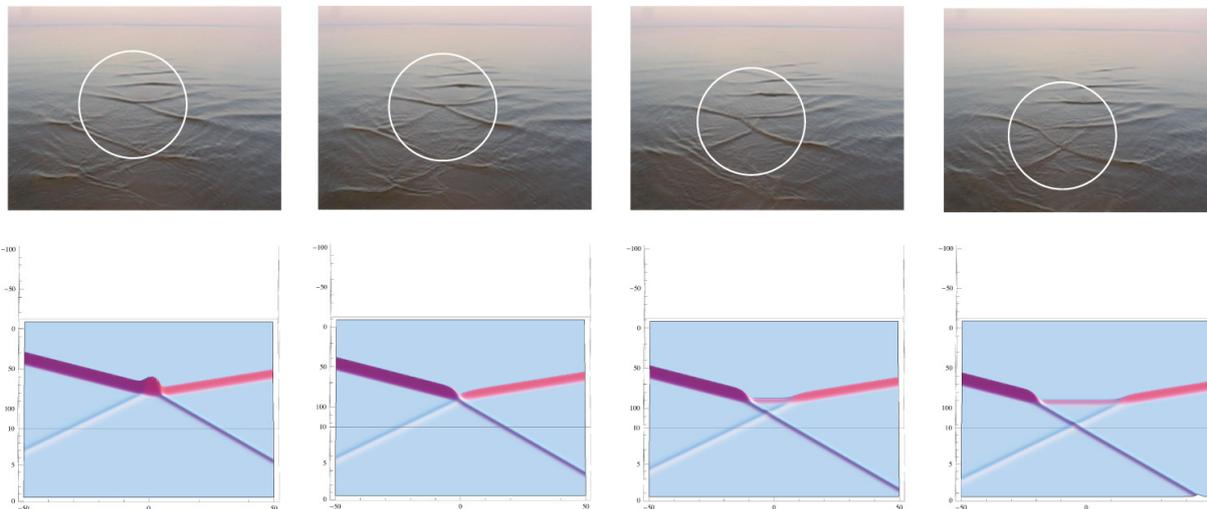


Figura 2: Evoluzione di un gruppo di onde nel lago Peipsi, in Estonia. Tale configurazione ondosa corrisponde ad una soluzione particolare dell'equazione di KP, denominata solitone $Gr(2,4)$ con derangement $\pi = (2413)$ come verrà spiegato nel testo. La sequenza fotografica è tratta da un video ripreso e cortesemente ricevuto dalla Dr.ssa Ira Didenkulova, Università Tecnologica di Tallin (Estonia). *Waves in Lake Peipsi, Estonia and the corresponding KP soliton from $Gr(2,4)$ with the derangement $\pi = (2413)$. (Snapshot from a video courtesy of Ira Didenkulova)*

$$\tau = \text{Wr}(f_1, \dots, f_N) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_N \\ \partial_x f_1 & \dots & \partial_x f_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{N-1} f_1 & \dots & \partial_x^{N-1} f_N \end{pmatrix}$$

dove le funzioni $f_i = f_i(x, y, t)$ sono date da

where $f_i = f_i(x, y, t)$ are given by

$$(f_1, \dots, f_N) = (E_1, \dots, E_M)A^T \quad \text{con/with} \quad E_j = \exp(\kappa_j x + \kappa_j^2 y + \kappa_j^3 t), \quad (6)$$

mentre $A = (a_{ij})$ è una matrice costante $N \times M$ con $N < M$, con A^T la sua trasposta. Quindi, usando il lemma di Cauchy-Binet per il calcolo dei determinanti e le (6), la funzione τ può essere espressa come somma di termini esponenziali:

where $A = (a_{ij})$ is an $N \times M$ constant matrix with $N < M$, and A^T is its transpose. Then using the Cauchy-Binet lemma for the determinant, the τ -function with (6) can be expressed as a sum of exponential terms:

$$\tau(x, y, t) = \text{Wr}(f_1, \dots, f_N) = \sum_{I \in \binom{[M]}{N}} \Delta_I(A) K_I \exp(\Theta_I(x, y, t)), \quad (7)$$

dove si indica con $I = \{i_1, \dots, i_N\}$ un N -indice e con $\binom{[M]}{N}$ l'insieme di tutti tali sotto-insiemi dell'insieme numerico $[M] := \{1, \dots, M\}$ e, infine, $K_I = \prod_{j>l} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_l}) > 0$. Inoltre il coefficiente $\Delta_I(A)$ è il minore $N \times N$ della matrice A con le colonne fissate dall' N -indice I , mentre l'esponente $\Theta_I(x, y, t)$ è dato da

where $I = \{i_1, \dots, i_N\}$, and $\binom{[M]}{N}$ denotes the set of all N -index subsets of the number set $[M] := \{1, \dots, M\}$, and $K_I = \prod_{j>l} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_l}) > 0$. Here the coefficients $\Delta_I(A)$ is the $N \times N$ minor of the matrix A with the columns labeled by the index set I , and the exponent $\Theta_I(x, y, t)$ is given by

$$\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \theta_i(x, y, t) = p_I x + q_I y + \omega_I t, \quad (8)$$

con/where $p_I = \sum_{i \in I} \kappa_i, \quad q_I = \sum_{i \in I} \kappa_i^2, \quad \omega_I = \sum_{i \in I} \kappa_i^3.$

È stato mostrato in [9] che la funzione τ è positiva per ogni (x, y, t) (quindi la soluzione u è regolare) se e solo se $\Delta_I(A) \geq 0$ per tutti gli N -indici I . In questo caso, la matrice A è detta *totalmente non negativa* (TNN) [10].

Nei precedenti lavori [6, 9, 11, 12], è stato mostrato che la soluzione solitonica (2) della KP con la funzione τ data in (7) consiste in N solitoni distinti quando $y \gg 0$, mentre di soli $M - N$ solitoni come $y \ll 0$. Ognuno di questi solitoni asintotici è parametrizzato in maniera univoca da una coppia $\{\kappa_i, \kappa_j\}$, con $i < j$, e quindi corrisponde all' $[i, j]$ -solitone.

La coppia $\{i, j\}$ è univocamente caratterizzata da una mappa π tale che $\pi(i) = j$ se l' $[i, j]$ -solitone appare a $y \gg 0$, mentre $\pi(j) = i$ se l' $[i, j]$ -solitone si manifesta a $y \ll 0$. Quindi la mappa π risulta essere una permutazione senza punto fisso, o *derangement* (anche dismutazione), dell'insieme di indici $\{1, \dots, M\}$. È stato quindi dimostrato [10] che ogni *derangement* può essere usato per parametrizzare una matrice A di tipo TNN. Quindi anche la struttura asintotica di un solitone KP generato da una matrice A TNN è completamente determinata dal corrispondente *derangement* (si veda [13] per una disanima dell'argomento).

Osservazione 2 L'equazione di KP ammette un numero infinito di flussi in commutazione ed essi definiscono una struttura detta *gerarchia di KP*. Si denotino con $\{t_n : n = 1, 2, \dots\}$ i parametri di flusso. Allora la funzione τ per la gerarchia di KP è data dalla stessa forma che compare nell'equazione (7) (si veda [13, 14]). Ponendo $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t$ e i restanti t_n per i flussi superiori, ognuna delle f_i soddisfa ora il sistema di equazioni lineari

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_n} = \frac{\partial^n f_i}{\partial x^n} \quad \text{per/for} \quad n = 1, 2, \dots$$

It was then shown in [9] that the τ -function is positive for all (x, y, t) (i.e. the solution is regular) if and only if $\Delta_I(A) \geq 0$ for all the N -element subset I . In this case, the matrix A is called a *totally nonnegative* (TNN) matrix [10].

In the previous works [6, 9, 11, 12], it was shown that the KP soliton solution (2) with the τ -function (7) consists of N solitons as $y \gg 0$ and $M - N$ solitons as $y \ll 0$. Each of those asymptotic solitons is uniquely parametrized by a pair $\{\kappa_i, \kappa_j\}$ for $i < j$, and is denoted as the $[i, j]$ -soliton.

The pair $\{i, j\}$ is uniquely characterized by a map π such that $\pi(i) = j$ if the $[i, j]$ -soliton appears at $y \gg 0$, and $\pi(j) = i$ if the $[i, j]$ -soliton appears at $y \ll 0$. The map π turns out to be a fixed-point free permutation or *derangement* of the index set $\{1, \dots, M\}$. It was shown in [10] that each *derangement* can be used to parameterize a TNN matrix A . That is, the asymptotic structure of the KP soliton generated by a TNN matrix A is completely determined by the corresponding *derangement*. (See [13] for a survey of these results.)

Remark 2 The KP equation admits an infinite number of commuting flows, and these flows all together define the *KP hierarchy*. Let $\{t_n : n = 1, 2, \dots\}$ denote the flow parameters. Then the τ -function for the KP hierarchy is also given in the same form as (7) where each f_i now satisfies the linear equations with $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t$ and the rest of t_n 's gives the higher flows. (See e.g. [13, 14].)

Grassmanniane totalmente non negative e grafi solitonici

Totally nonnegative Grassmannian and soliton graphs

Permutazioni

Prendiamo un qualunque insieme costituito da N elementi, che quindi possiamo esprimere come $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$. Una *permutazione* è una applicazione biunivoca $\pi : [N] \leftrightarrow [N]$. Il numero di possibili permutazioni è $N!$. Esse si possono rappresentare in vari modi, ad esempio per $N = 4$ si può avere

$$\pi = (2, 4, 1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La prima forma mette in evidenza la struttura ciclica della permutazione. In questo esempio non ci sono valori per i quali $\pi(n) = n$: si dice che essa è libera da punti fissi, o che è un *derangement* o, anche, una *dismutazione*. Invece la permutazione

$$\pi' = (2, 4, 1)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ha 3 come punto fisso.

Le permutazioni formano un *gruppo* S_N sull'insieme $[N]$, secondo la regola di composizione $(\pi \circ \rho)(n) = \pi(\rho(n))$ con $n \in [N]$. Esso è basilare nella teoria dei Gruppi Finiti e delle loro rappresentazioni.

Per ogni permutazione σ e $n \in [N]$ si chiama *orbita* di n rispetto a σ l'insieme $\{n, \sigma(n), \sigma^2(n), \dots\}$. Pertanto ogni permutazione possiede l'insieme delle sue orbite $Orb(\sigma)$. Ogni orbita è un ciclo. Ogni permutazione è il prodotto dei cicli che costituiscono le sue orbite.

Si può introdurre il concetto di *lunghezza di una permutazione* come $\ell(\sigma) = N - \#(Orb(\sigma))$. Quindi per i due esempi precedenti si ha $\ell(\pi) = 3$ e $\ell(\pi') = 2$. La lunghezza di un ciclo è sempre pari al numero dei suoi elementi $- 1$.

Una *trasposizione* è una permutazione che scambia due elementi e mantiene gli altri fissi. Le trasposizioni tra elementi adiacenti vengono indicate nel testo con $s_i = (i, i + 1)$. Il prodotto di una trasposizione per una generica permutazione produce una divisione di orbite, o una loro fusione, in accordo con l'appartenenza degli elementi trasposti alla stessa orbita oppure no.

Per spiegare la connessione tra derangement e le matrici TNN, ci si consenta di spiegare i risultati riportati in [9] (si veda anche [10]).

In primo luogo osserviamo che l'insieme di funzioni $\{f_i\}_{i=1}^N$ in (6) costituisce una base di un sotto-spazio N -dimensionale di \mathbb{R}^M , poiché l'insieme delle funzioni (di x) $\{E_j\}_{j=1}^M$ sono linearmente indipendenti e spazzano \mathbb{R}^M . Ancora più precisamente si ha la relazione

$$\mathbf{E}_j = (1, \kappa_j, \dots, \kappa_j^{M-1})^T E_j \in \mathbb{R}^M \quad \text{e quindi/ and then} \quad \mathbf{f}_i = (f_i, \partial_x f_i, \dots, \partial_x^{M-1} f_i)^T \in \mathbb{R}^M.$$

Questo implica che ciascuna matrice A può essere considerata come un punto della varietà reale $\text{Gr}(N, M)$, cioè l'insieme di tutti i sotto-spazi N -dimensionali di \mathbb{R}^M . Tale varietà possiede la

To explain the connection between the derangement and the TNN matrix, let us briefly explain the result of [9] (see also [10]). First note that the set of functions $\{f_i\}_{i=1}^N$ in (6) forms a basis of N -dimensional subspace of \mathbb{R}^M since the linearly independent set of functions (of x) $\{E_j\}_{j=1}^M$ spans \mathbb{R}^M . More precisely,

This implies that each matrix A can be considered as a point of the real Grassmannian $\text{Gr}(N, M)$, the set of all N -dimensional subspaces in \mathbb{R}^M , which has the Schubert decomposition given by

Flussi in commutazione

Come tutti i sistemi integrabili con infiniti gradi di libertà, anche KP possiede infinite quantità conservate, che possono assumere valori arbitrari e indipendenti, dai quali la soluzione dipende con continuità. Una forma alternativa per esprimere tale proprietà consiste nel dimostrare l'esistenza di infinite simmetrie continue locali dell'equazione, compresa la stessa KP. Per simmetria locale si intende una equazione del primo ordine in un parametro ausiliario per il campo $u(x = t_0, y = t_1, t = t_2, t_3 \dots, t_n, \dots)$ della forma

$$u_{t_i} = \mathcal{K}(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{x\dots x}), \quad i \geq 1$$

nella quale il secondo membro dipenda solo dal campo e dalle sue derivate rispetto ad x , fino ad un certo ordine finito. Per un sistema integrabile tali simmetrie sono algebricamente calcolabili e la trasformazione che ognuna di esse genera è parametrizzata indipendentemente dalle altre. Tali infinite equazioni di simmetria sono tra loro compatibili, nel senso che lo scambio di ordine tra due di tali trasformazioni sul campo u commutano tra di loro. Questa è quindi una famiglia infinita di flussi in commutazione.

Sato e la sua scuola [14] sintetizzarono tale complessa struttura, calcolando le simmetrie esplicitando un'unica relazione operatoriale formale

$$\partial_{t_n} L = [L_+^n, L] \quad n \geq 1,$$

dove è stato introdotto l'operatore pseudo-differenziale

$$L = \partial_x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \partial_x^{1-m},$$

L_+^n indica la parte differenziale di L^n , le a_m sono funzioni di $(x = t_0, y = t_1, t = t_2, t_3 \dots, t_n, \dots)$. L'operatore ∂_x^{-1} è un inverso opportunamente definito si ∂_x , che soddisfa la regola di Leibniz generalizzata $\partial_x^{-n} f = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(n+l-1)!}{l!(n-l)!} f^{(l)} \partial_x^{-n-l}$, $n > 0$. Infine il simbolo $[\cdot, \cdot]$ denota il commutatore tra operatori differenziali. L'equazione di KP si ottiene combinando le equazioni per $n = 1, 2$ e ponendo $a_1 = u$.

cosiddetta *decomposizione di Schubert*, data da

$$\text{Gr}(N, M) = \bigsqcup_{w \in S_M^{(N)}} \Omega_w,$$

dove Ω_w è chiamata la *cella di Schubert* associata alla permutazione w . Essa è l'insieme delle matrici A la cui forma triangolare superiore ha l'insieme dei pivot pari a $\{w(M-N+1), w(M-N+2) \dots, w(M)\}$. Qui $S_M^{(N)}$ indica quel sottoinsieme del gruppo delle permutazioni S_M tale che ogni elemento (ridotto) $w \in S_M^{(N)}$ deve terminare con il simbolo s_{M-N} , dove $s_i = (i, i+1)$ è la trasposizione di indici adiacenti [15].

Le soluzioni solitoniche regolari di KP sono in corrispondenza con le matrici TNN, dette TNN

where Ω_w is called the Schubert cell associated to a permutation w , and it is the set of A matrices whose row echelon form has the pivot set $\{w(M-N+1), w(M-N+2) \dots, w(M)\}$. Here $S_M^{(N)}$ is the subset of the symmetric group S_M such that every (reduced) element $w \in S_M^{(N)}$ must end with the letter s_{M-N} , where $s_i = (i, i+1)$ is the adjacent transposition of indices [15]. The regular KP soliton solutions are associated with the set of all TNN matrices called the TNN Grassmannian $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$ which admits a finer

Varietà Grassmanniane

Nello spazio vettoriale reale a N dimensioni \mathbb{R}^N si consideri l'insieme di tutti i sottospazi a n dimensioni, cioè di tutti i piani di dimensione n passanti per l'origine O . L'insieme che si ottiene è una varietà (differenziabile) di $n(N - n)$ dimensioni, denotata con $\text{Gr}(N, n)$.

Un modo pratico per rappresentare una varietà Grassmanniana segue dalla rappresentazione matriciale di un sottospazio n -dimensionale W di \mathbb{R}^N , il quale può essere descritto (in una certa base) come una matrice A in $\mathbb{R}^{n \times N}$ di rango massimo. Le sue righe sono le componenti di n vettori indipendenti di \mathbb{R}^N che generano W .

Se esiste una matrice reale $D \in GL_{\mathbb{R}}(n)$ tale che valga $A = D \cdot B$, allora A e B descrivono lo stesso spazio W . In questo modo si può esprimere la Grassmanniana come

$$\text{Gr}(N, n) \cong \frac{\{\text{matrici reali } n \times N \text{ di rango massimo } n\}}{GL_{\mathbb{R}}(n)}. \quad (9)$$

La libertà fornita dalle possibili scelte in $GL_{\mathbb{R}}(n)$ equivale alle operazioni di Gauss sulle matrici. Quindi si può fissare una forma particolarmente utile per lavorare con gli elementi di (9), ad esempio concentrandosi sulla forma triangolare superiore ridotta.

Da un punto di vista geometrico $\text{Gr}(N, n)$ è uno spazio omogeneo e può essere rappresentata in termini di spazio omogeneo (dei coset) per il gruppo ortogonale $O(N)$. Precisamente si ha che

$$\text{Gr}(N, n) \simeq \frac{O(N)}{O(N - n) \times O(n)}.$$

Casi particolari sono gli spazi reali proiettivi a N dimensioni, valendo la relazione $\mathbb{R}P^N = \text{Gr}(N + 1, 1) \simeq \frac{O(N+1)}{O(N) \times O(1)} = \frac{SO(N+1)}{O(N)}$. Queste relazioni dicono che le Grassmanniane costruite su spazi vettoriali reali (o complessi) sono varietà algebriche regolari compatte.

Queste ultime sono descritte in termini di *relazioni di Grassmann-Plücker*. Tali relazioni si possono ricavare a partire da note espansioni dei determinanti come quella di Laplace. In generale, considerando l'algebra esterna $\wedge^n \mathbb{R}^N$, associata a \mathbb{R}^N , si usa l'immersione di Plücker $\tilde{A} = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathbf{Gr}(N, n) \mapsto [\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_n]$.

Grassmanniane $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$, che ammettono una descrizione più fine, chiamata *decomposizione di Deodhar* [16] (see also [9])

$$\text{Gr}(N, M)_{\geq 0} = \bigsqcup_{w \in S_M^{(N)}} \Omega_w^{\geq 0}, \quad \text{con/with} \quad \Omega_w^{\geq 0} = \bigsqcup_{\mathbf{v} \prec w} \mathcal{P}_{\mathbf{v}, w}$$

dove (si veda immediatamente nel seguito la sua definizione) \mathbf{v} denota una sotto-espressione *positiva* di una permutazione v e una coppia di esse (\mathbf{v}, w) determina univocamente la cosiddetta componente di Deodhar $\mathcal{P}_{\mathbf{v}, w}$ [9, 17]. Una sotto-espressione positiva di w si definisce come segue. Prima si scriva w come una espressione ridotta $w = s_{j_1} \dots s_{j_m}$, di lunghezza $\ell(w) = m$. Una sua sotto-espressione $\mathbf{v} = v_1 \dots v_m$ di v è ottenuta scegliendo $v_i \in \{1, s_{j_i}\}$ per ogni i . Definiamo ora $v_{(i)} := v_1 \dots v_i$. Allora una sotto-espressione

decomposition, called a Deodhar decomposition [16] (see also [9])

where \mathbf{v} is a *positive* subexpression of w , and $\mathcal{P}_{\mathbf{v}, w}$ is called the Deodhar component which is uniquely determined by the pair of permutation (\mathbf{v}, w) [17, 9]. A positive subexpression of w is defined as follows: First write w in a reduced expression, $w = s_{j_1} \dots s_{j_m}$, of length $\ell(w) = m$. A subexpression $\mathbf{v} = v_1 \dots v_m$ of w is obtained by choosing $v_i \in \{1, s_{j_i}\}$ for each i . Define $v_{(i)} := v_1 \dots v_i$. Then the subexpression \mathbf{v} is *positive*, if $\ell(v_{(i-1)}) < \ell(v_{(i-1)}s_{j_i})$ for all i . For example, let $w = s_2s_1s_3s_2$ which corresponds to the top cell

\mathbf{v} è detta *positiva*, se $\ell(v_{(i-1)}) < \ell(v_{(i-1)}s_{j_i})$ per ogni i . Per esempio, sia $\mathbf{w} = s_2 s_1 s_3 s_2$, che corrisponde alla cella di vertice di $\text{Gr}(2, 4)$, allora la sotto-espressione $\mathbf{v} = 111s_2$ è positiva, mentre $\mathbf{v} = s_2111$ non lo è (si noti che entrambe le \mathbf{v} producono $v = s_2$).

Nel lavoro [9] è stato dimostrato che ogni coppia (\mathbf{v}, \mathbf{w}) determina la matrice $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$, la quale possiede un numero $\ell(w) - \ell(v)$ di parametri liberi. Il corrispondente derangement π che parametrizza la soluzione solitonica è dato da $\pi = v\mathbf{w}^{-1}$. Questo significa che se noi conosciamo l'insieme dei solitoni asintotici per $|y| \gg 0$, which fornisce un unico derangement π , allora noi potremmo costruire la corrispondente matrice A .

Quindi, la struttura asintotica dei solitoni di KP a grandi $|y|$ può essere classificata da un derangement associata ad una componente di Deodhar della varietà $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$. In particolare noi siamo interessati alle configurazioni bi-dimensionali generati dai solitoni di KP. Per esempio, la Figura 3 mostra l'evoluzione temporale della soluzione associata ad una matrice A di tipo 3×6 con

$(\kappa_1, \dots, \kappa_6) = (-5/2, -5/4, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2)$. In questo caso tutti i minori 3×3 di A sono non nulli (questo tipo di matrice è chiamata *totalmente positiva*).

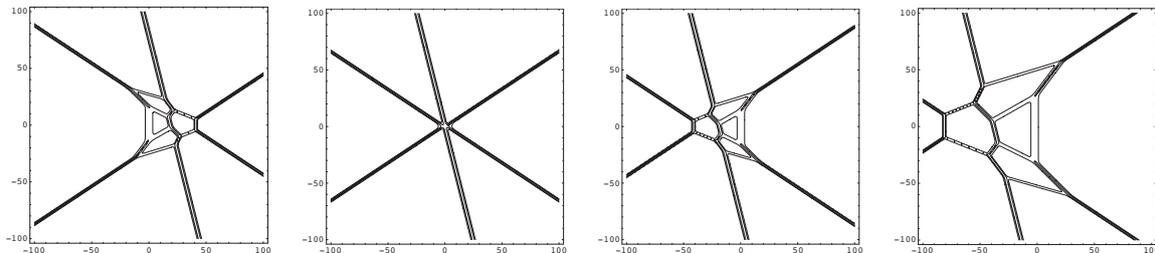


Figura 3: Grafico delle curve di livello per un solitone di KP associato a $\text{Gr}(3, 6)_{>0}$. Nei vari riquadri si mostra l'evoluzione temporale della soluzione $u(x, y, t)$ for $t = -10, 0, 10, 20$ da sinistra. The contour plots of the KP soliton for $\text{Gr}(3, 6)_{>0}$. The panels show the time evolution of the solution $u(x, y, t)$ for $t = -10, 0, 10, 20$ from the left.

Grafi Solitonici

Allo scopo di descrivere queste strutture ondose bi-dimensionali, in ogni punto del piano xy noi abbiamo bisogno di identificare il termine esponenziale dominante $\Delta_I(A)e^{\Theta_I}$, per un certo multi-indice $I = \{i_1, \dots, i_N\}$, della funzione τ . In particolare, noi studiamo tali strutture consi-

of $\text{Gr}(2, 4)$, then the subexpression $\mathbf{v} = 111s_2$ is positive, but $\mathbf{v} = s_2111$ is not positive (note that both \mathbf{v} give $v = s_2$).

It is shown in [9] that the pair (\mathbf{v}, \mathbf{w}) determines the matrix $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ which has $\ell(w) - \ell(v)$ number of free parameters. The derangement π parametrizing the soliton solution is then given by $\pi = v\mathbf{w}^{-1}$. This means that if we know the set of asymptotic solitons for $|y| \gg 0$ which gives a unique derangement π , then we can construct the corresponding matrix A .

Thus, the asymptotic structure of the KP soliton for a large $|y|$ can be classified by the derangement associated to the Deodhar component of $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$. We are interested in the two-dimensional patterns generated by the KP solitons. For example, Figure 3 shows the time evolution of the solution for a 3×6 matrix A and $(\kappa_1, \dots, \kappa_6) = (-5/2, -5/4, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2)$. Here all 3×3 minors of A are nonzero (this type of matrix is called *totally positive* matrix).

Soliton graphs

In order to describe those two-dimensional wave pattern, we need to identify the dominant exponential $\Delta_I(A)e^{\Theta_I}$ for some $I = \{i_1, \dots, i_N\}$ in the τ -functions at each point in the xy -plane. In particular, we investigate these patterns by considering a large scale limit of the variables

Matroidi

Un matroide è una struttura combinatoria che generalizza il concetto di “lineare indipendenza”. Una delle definizioni più ricorrenti assume un insieme di n elementi E e una famiglia non-vuota $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ di sottoinsiemi di E , detta *base*, che gode della seguente *proprietà di scambio*

per ogni coppia di elementi $X, Y \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in X \setminus Y$, esiste un elemento $y \in Y \setminus X$ tale che $X \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Un esempio di tale proprietà si incontra in algebra lineare. Si considerino matrici di dimensioni $k \times n$ (con $k < n$) di rango k . Supponiamo $X = \{x, i_2, \dots, i_k\}$ e $Y = \{j_1, \dots, j_k\}$ siano due di tali matrici. Allora, se x non appartiene a Y , l'assioma di scambio ci dice che esiste una colonna $j_* \in Y$ tale che $\{j_*, i_2, \dots, i_k\}$ è ancora costituita da colonne linearmente indipendenti.

Tuttavia la definizione di matroide si applica a contesti molto più ampi ed esistono, infatti, casi di matroidi non esprimibili come insieme di insiemi di k vettori linearmente indipendenti in un qualche spazio vettoriale (si può citare il *matroide di Vámos*).

Oltre che in algebra lineare, i matroidi sono ampiamente impiegati nella teoria dei grafi e delle reti, in teoria dell'informazione, recenti applicazioni si riscontrano in teoria dei codici e nella computer grafica.

derando il limite di grande scala delle variabili (x, y, t) . Più precisamente, noi riscaliamo le variabili secondo la prescrizione $x \rightarrow x/\epsilon, y \rightarrow y/\epsilon$ e $t \rightarrow t/\epsilon$ mediante un piccolo numero positivo $0 < \epsilon \ll 1$. Quindi la funzione τ si trasforma secondo la relazione

$$\tau_A \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon} \right) = \sum_{I \in \mathcal{M}(A)} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \Theta_I(x, y, t) + \ln(K_I \Delta_J(A)) \right)$$

dove $\mathcal{M}(A)$ è un insieme, detto *matroide*, associato alla matrice A dalla definizione

$$\mathcal{M}(A) := \left\{ I \in \binom{[M]}{N} : \Delta_I(A) > 0 \right\}.$$

Allora è possibile anche definire una funzione lineare a tratti fornita dal cosiddetto *limite tropicale*

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln \tau_A) = \max_{I \in \mathcal{M}(A)} \{ \Theta_I(x, y, t) \}. \quad (10)$$

Dato un valore di t , la funzione $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$ rappresenta il *piano dominante* $z = \Theta_I(x, y, t)$ in \mathbb{R}^3 dove è localizzato il contributo più significativo per t . Noi allora possiamo definire ad ogni istante t il *grafo solitonico* come segue

(x, y, t) . More precisely, we rescale the variables as $x \rightarrow x/\epsilon, y \rightarrow y/\epsilon$ and $t \rightarrow t/\epsilon$ with a small positive number $0 < \epsilon \ll 1$. Then the τ -function becomes

where $\mathcal{M}(A)$ is the matroid associated to the matrix A defined by

Then we define a piecewise linear function given by the limit called a *tropical limit*

That is, $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$ represents a dominant plane $z = \Theta_I(x, y, t)$ in \mathbb{R}^3 for fixed t . We then define the *soliton graph* for each t by

$$\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A)) = \begin{cases} \{\text{il luogo dei punti del piano } xy \text{ nei quali } f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) \text{ non è lineare}\}. \\ \{\text{the locus of the } xy\text{-plane where } f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) \text{ is not linear}\}. \end{cases}$$

Si noti che l'insieme complementare a $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ è un dominio di linearità per $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$, quindi ciascuna di queste regioni è associata a un piano dominante $z = \Theta_I(x, y, t)$ per un certo $I \in \mathcal{M}(A)$. In altri termini il grafo solitonico mostra il tracciato spaziale che identifica il piano dominante in ogni punto del piano xy , ovvero il *piano di posizionamento* \mathbb{R}^3 . Rimane ancora un problema aperto la classificazione completa del grafo solitonico $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ per una assegnata matrice A appartenente alla Grassmanniana $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ per $N \geq 3$ e $M \geq N + 4$.

Note that each region of the complement of $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ is a domain of linearity for $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$, hence each region is associated to a *dominant plane* $z = \Theta_I(x, y, t)$ for a certain $I \in \mathcal{M}(A)$. Then the soliton graph shows the spatial pattern which identifies the dominant plane at each point in the xy -plane, i.e. *plane arrangements in* \mathbb{R}^3 . It is still an open problem to give a complete classification of the soliton graphs $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ for the matrices A from the totally positive Grassmannian $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ for $N \geq 3$ and $M \geq N + 4$.

Dualità tra grafi solitonici e triangolazioni

Per studiare il grafo solitonico, in primo luogo noi definiamo una biiezione, chiamata *mappa di dualità*, tra un piano in \mathbb{R}^3 e un punto in \mathbb{R}^3

$$\mu : (p, q, \omega) \longleftrightarrow \{(x, y, z) : z = px + qy + \omega\}, \quad (11)$$

dove si fissano $p = \kappa_i, q = \kappa_i^2$ ed una certa costante ω (per descrivere solitoni di KP si sceglie $\omega = \kappa_i^3 t$). Il vettore $\langle p, q, -1 \rangle$ è la normale al piano e il vettore $\mathbf{p} = \langle p, q \rangle$ fornisce la direzione di incremento dello stesso, cioè $\nabla z = \langle p, q \rangle$. Per chiarezza si veda la Figura 4. Usando la mappa di dualità, noi possiamo classificare il grafo solitonico $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ tramite le *triangolazioni* di un poligono inscritto in una parabola come vedremo nel seguito.

Duality between the soliton graph and the triangulation

In order to study the soliton graphs, we first define a bijection, called the *duality map*, between a plane in \mathbb{R}^3 and a point in \mathbb{R}^3

where $p = \kappa_i, q = \kappa_i^2$ and some constant ω ($\omega = \kappa_i^3 t$ for the KP soliton). The vector $\langle p, q, -1 \rangle$ is the normal vector of the plane, and the vector $\mathbf{p} = \langle p, q \rangle$ gives the increasing direction of the plane, i.e. $\nabla z = \langle p, q \rangle$. See Fig.4. Using the map, we can classify the soliton graphs $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ via the *triangulations* of a polygon inscribed in a parabola as described below.

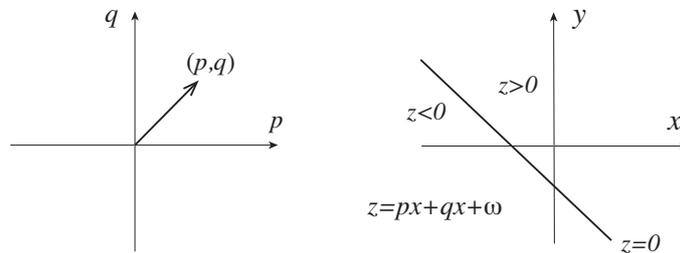


Figura 4: Mappa di Dualità. Il vettore $\hat{\mathbf{p}} = \langle p, q, -1 \rangle$ è la normale del piano $z = px + qy + \omega$ e il vettore $\mathbf{p} = \nabla z = \langle p, q \rangle$ fornisce la direzione di incremento di z .

Duality map. The vector $\hat{\mathbf{p}} = \langle p, q, -1 \rangle$ is the normal vector of the plane $z = px + qy + \omega$ and the vector $\mathbf{p} = \nabla z = \langle p, q \rangle$ gives the increasing direction of z .

A titolo di semplice esempio, consideriamo il caso con tre punti $\hat{\mathbf{p}}_i = (p_i, q_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^3$ essendo $p_i = \kappa_i, q_i = \kappa_i^2$ and $\omega_i = \kappa_i^3 t$. Allora noi abbiamo un triangolo inscritto nella parabola $q = p^2$, i cui vertici sono $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, con assegnato peso ω_i . Per semplicità, prendiamo tutti le $\omega_i = 0$. Allora tutti i piani $z = \theta_i(x, y) = p_i x + q_i y$ si intersecano nell'origine e, in ciascun punto (x, y) , uno dei piani diventa dominante. La Figura 5 mostra la *dualità* tra i triangoli nel piano pq e il grafo solitonico nel piano xy al tempo $t = 0$. La dinamica del punto di intersezione è lineare nel tempo t , essendo data da $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.

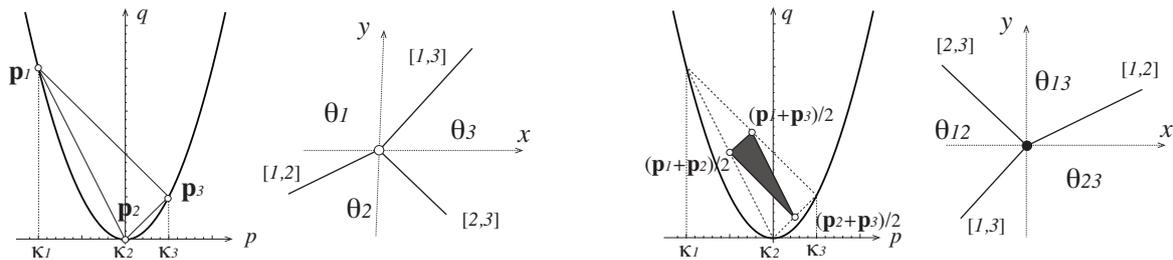


Figura 5: Dualità tra grafo solitonico e triangoli per $Gr(1, 3)_{>0}$ (sinistra) e $Gr(2, 3)_{>0}$ (destra).
Duality between the soliton graphs and the triangles for $Gr(1, 3)_{>0}$ and $Gr(2, 3)_{>0}$.

I due grafici a sinistra mostrano il caso per $Gr(1, 3)_{>0}$, il che vuol dire che abbiamo $\mathcal{M}(A) = \{1, 2, 3\}$ e

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, 0) = \max\{\theta_i(x, y, 0) : i = 1, 2, 3\}.$$

Nel grafo solitonico (la seconda figura da sinistra) ogni regione è contrassegnata dal piano dominante $z = \theta_i(x, y)$. Il triangolo inscritto nella parabola è detto "bianco". In generale, l'insieme degli indici $\{I, J, L\}$ dei vertici per questo tipo di triangoli soddisfano le relazioni $I = I_0 \cup \{i\}, J = I_0 \cup \{j\}$ and $L = I_0 \cup \{l\}$ con un certo $(N - 1)$ -indice comune I_0 . Il punto di intersezione nel grafo solitonico viene simbolizzato con un vertice bianco, *duale* al triangolo bianco. Si osservi che ciascun lato del triangolo, diciamo $\mathbf{p}_{[i,j]} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, è perpendicolare alla retta data da $\theta_i = \theta_j$, che corrisponde all' $[i, j]$ -solitone. Si noti anche che i solitoni asintotici danno luogo alla permutazione $\pi = (3, 1, 2) = s_2 s_1$.

I due grafici a destra descrivono la situazione per $Gr(2, 3)$, quindi avendo $\mathcal{M}(A) = \{12, 13, 23\}$ e

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, 0) = \max\{(\theta_i + \theta_j)(x, y, 0) : 1 \leq i < j \leq 3\},$$

As a simplest example, consider the case with three points $\hat{\mathbf{p}}_i = (p_i, q_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^3$ with $p_i = \kappa_i, q_i = \kappa_i^2$ and $\omega_i = \kappa_i^3 t$. Then we have a triangle inscribed in the parabola $q = p^2$ whose vertices are $\{\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3\}$, and each vertex \mathbf{p}_i has a weight ω_i . For the simplicity, take all $\omega_i = 0$. Then all the planes $z = \theta_i(x, y) = p_i x + q_i y$ intersect at the origin, and at each point (x, y) , one of the plane becomes dominant. Figure 5 below shows the *duality* between the triangles in the pq -plane and the soliton graphs in the xy -plane at $t = 0$. The dynamics of the intersection point is linear in time t as given by $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.

The left two panels show the case for $Gr(1, 3)_{>0}$, that is, we have $\mathcal{M}(A) = \{1, 2, 3\}$ and

In the soliton graph (the second figure from left), each region is labeled by the dominant plane $z = \theta_i(x, y)$. The triangle inscribed in the parabola is defined as "white" triangle. In general, the index set $\{I, J, L\}$ of the vertices of this type of triangle satisfies $I = I_0 \cup \{i\}, J = I_0 \cup \{j\}$ and $L = I_0 \cup \{l\}$ for some common $(N - 1)$ -index set I_0 . The intersection point in the soliton graph is then marked by a white vertex which is *dual* to the white triangle. Notice that each edge of the triangle, say $\mathbf{p}_{[i,j]} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, is perpendicular to the line given by $\theta_i = \theta_j$ which corresponds to the $[i, j]$ -soliton. Also note that the asymptotic solitons gives the permutation $\pi = (3, 1, 2) = s_2 s_1$. The right two panels show the case for $Gr(2, 3)$, that is, we have $\mathcal{M}(A) = \{12, 13, 23\}$ and

Questo triangolo è detto “nero”. In generale, l’insieme di multi-indici $\{I, J, L\}$ per i vertici di questo tipo soddisfano delle relazioni della forma $I = K_0 \setminus \{i\}, J = K_0 \setminus \{j\}$ and $L = K_0 \setminus \{l\}$ per un certo $(N + 1)$ -indice comune K_0 . Nella figura precedente il triangolo nero è l’involuppo convesso dei vertici $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 3\}$, cioè i vertici sono i punti medi dei lati del triangolo bianco nella figura di sinistra. Il punto di intersezione nel grafo solitonico è allora segnato con un vertice nero.

In generale, il grafo solitonico per $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ ha solo vertici trivalenti, che sono colorati o bianchi o neri [12] (il grafico è allora equivalente al *grafo plabico*, cioè *piano e bicolore*, introdotto da [10]). Per esempio, nel caso di $\text{Gr}(2, 4)_{>0}$, si ha

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) = \max\{(\theta_i + \theta_j)(x, y, t) : 1 \leq i < j \leq 4\},$$

La Figura 6 illustra il grafo solitonico a $t < 0$ (sinistra) e a $t > 0$ (destra). Nelle figure il cambiamento del grafo può essere inteso come un ribaltamento della triangolazione del quadrilatero fornito dall’involuppo convesso dell’insieme dei sei punti $\{\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 4\}$ (il ribaltamento corrisponde ad una *mutazione* nella corrispondente *cluster algebra* [12, 18, 19, 20]). Notiamo che il quadrilatero (un parallelogramma) nelle figure è dato dall’involuppo convesso di $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 4\}$.

Nel caso generale di $\text{Gr}(N, M)_{>0}$, noi possiamo dimostrare che l’involuppo complesso dell’insieme di tutti punti $\mathbf{p}_I = (p_I, q_I)$, con $I \in \binom{[M]}{N}$, è un M -gono, denotato da

$$\text{conv}(\mathcal{A}_{N,M}) = M\text{-gono} \quad \text{dove / where} \quad \mathcal{A}_{N,M} := \left\{ \mathbf{p}_I = (p_I, q_I) \in \mathbb{R}^2 : I \in \binom{[M]}{N} \right\}.$$

I vertici dell’ M -gono sono dati da

$$\{\mathbf{p}_{I_j} : I_j = \{j, j + 1, \dots, j + N - 1\}, j = 1, \dots, M \text{ (ordine ciclico / cyclic order)}\}.$$

Per esempio, nel caso di $\text{Gr}(2, 6)_{>0}$, l’involuppo convesso dei 15 punti $\{\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 6\}$ è un *esagono* di vertici

$$\{\mathbf{p}_{1,2}, \mathbf{p}_{2,3}, \mathbf{p}_{3,4}, \mathbf{p}_{4,5}, \mathbf{p}_{5,6}, \mathbf{p}_{1,6}\}.$$

Qui si noti che tutti gli altri 9 punti $\mathbf{p}_{i,j}$ with $|i - j| > 1$ (in ordine ciclico) sono punti *interni* dell’esagono.

This triangle is defined as a “black” triangle. In general, the index set $\{I, J, L\}$ for the vertices of this type of triangle satisfies $I = K_0 \setminus \{i\}, J = K_0 \setminus \{j\}$ and $L = K_0 \setminus \{l\}$ for some common $(N + 1)$ -index set K_0 . In the figure above, the black triangle is the convex hull of the vertices $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 3\}$, i.e. the vertices are the mid points of the edges of the white triangle in the left figure. The intersection point in the soliton graph is then marked by a black vertex.

In general, the soliton graph for $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ has only trivalent vertices which are colored by either white or black [12] (the graph is then equivalent to the *plabic graph* introduced in [10]). For example, in the case of $\text{Gr}(2, 4)_{>0}$, we have

Figure 6 illustrates the soliton graphs for $t < 0$ (left), and for $t > 0$ (right). In the figures, the change of the graphs can be considered as a flip in the triangulation of quadrilateral given by the convex hull of the set of six points $\{\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 4\}$, (the flip corresponds to the *mutation* in the cluster algebra [19, 20, 18, 12]). Note that the quadrilateral (parallelogram) in the figures are given by the convex hull of $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 4\}$.

In general case of $\text{Gr}(N, M)_{>0}$, we can show that the convex hull of the set of all the points $\mathbf{p}_I = (p_I, q_I)$ for $I \in \binom{[M]}{N}$ is an M -gon, denoted by

The vertices of the M -gon are given by

$$\{\mathbf{p}_{I_j} : I_j = \{j, j + 1, \dots, j + N - 1\}, j = 1, \dots, M \text{ (ordine ciclico / cyclic order)}\}.$$

For example, in the case of $\text{Gr}(2, 6)_{>0}$, the convex hull of 15 points $\{\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 6\}$ is a *hexagon* with the vertices

$$\{\mathbf{p}_{1,2}, \mathbf{p}_{2,3}, \mathbf{p}_{3,4}, \mathbf{p}_{4,5}, \mathbf{p}_{5,6}, \mathbf{p}_{1,6}\}.$$

Note here that all other 9 points $\mathbf{p}_{i,j}$ with $|i - j| > 1$ (cyclic sense) are *inner* points of the hexagon.

Cluster Algebra

Le algebre cluster sono state definite da Fomin e Zelevinsky [19, 20] come particolari classi di anelli commutativi, ossia strutture algebriche dotate di due operazioni di *somma* e *prodotto*, che godono delle note proprietà associativa, commutativa e distributiva del prodotto rispetto alla somma. Esistono i corrispondenti elementi neutri, oltre che gli inversi additivi e la legge di annullamento del prodotto. Tali anelli sono generati a partire da un dato iniziale e da una regola di ricorrenza detta *mutazione*.

Per dare un esempio elementare si considerino due interi $a, b \in \mathbb{Z}$ ed un *seme* iniziale $\{x_1, x_2\}$, costituito da due elementi dell'algebra. Questo seme è un *cluster* dell'algebra, che ne genera un altro in accordo alla formula di ricorrenza

$$x_{m-1} x_{m+1} = \begin{cases} x_m^a + 1 & m \text{ dispari} \\ x_m^b + 1 & m \text{ pari} \end{cases} .$$

Iterando queste relazioni ogni x_m si può esprimere come una funzione razionale dei cluster $\dots \leftrightarrow \{x_1, x_2\} \leftrightarrow \{x_2, x_3\} \leftrightarrow \dots$. Quindi l'algebra è un sottoanello finito del campo delle funzioni razionali $Q(x_1, x_2)$.

Rinviando alla letteratura specialistica una definizione generale delle cluster algebre, basti dire che esse codificano l'informazione combinatoria contenuta in grafi orientati (*quiver*). In particolare, gli esempi di algebre cluster legati allo studio dei solitoni nel presente articolo sono riconducibili, con gli associati quiver, a diagrammi di Dynkin relativi ad algebre di Lie di tipo A_m .

La definizione di tali oggetti è stata motivata dallo studio delle algebre quantistiche e delle loro rappresentazioni, ma si è rapidamente estesa in vari ambiti della matematica e della fisica, a partire dalla teoria delle rappresentazioni e dei sistemi di radici, in analogia alla teoria delle algebre di Lie. Le regolarità delle algebre cluster le connettono anche a sistemi integrabili discreti, alle strutture combinatorie, fino alla teoria delle stringhe.

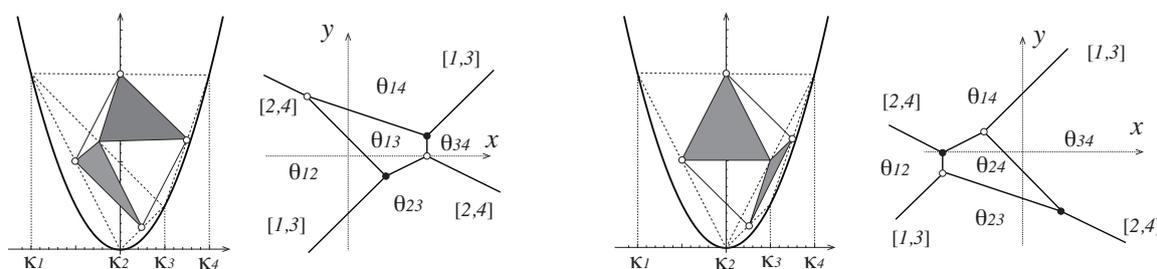


Figura 6: Dualità tra grafi solitonici (a sinistra per $t < 0$ e a destra per $t > 0$) e la triangolazione di quadrilateri per $Gr(2, 4)_{>0}$.
Duality between the soliton graphs (left for $t < 0$ and right for $t > 0$) and the triangulation of quadrilateral for $Gr(2, 4)_{>0}$.

Passiamo allora a considerare una triangolazione di questo M -gono, definita come segue (si veda ad esempio [21] per una informazione generale sulle triangolazioni). Indicato con $P = \text{conv}\{\mathbf{p}_I \in \mathbb{R}^2 : I \in \mathcal{M}\}$ un M -gono associato ad un matroide \mathcal{M} , allora noi definiamo

(a) Q è una “triangolazione” dell’ M -gono P se $\exists \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ con $\sigma_i \subset \mathcal{M}$ tale che $P_{\sigma_i} :=$

Then we consider a triangulation of this M -gon which is defined as follows (see e.g. [21] for the general information for the triangulations): Let $P = \text{conv}\{\mathbf{p}_I \in \mathbb{R}^2 : I \in \mathcal{M}\}$ be an M -gon associated with a matroid \mathcal{M} . Then we define

(a) Q is a “triangulation” of the M -gon P , if $\exists \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ with $\sigma_i \subset \mathcal{M}$ such that $P_{\sigma_i} :=$

$\text{conv}\{\mathbf{p}_I : I \in \sigma_i\}$ soddisfi

- (i) P_{σ_i} è un triangolo, cioè $|\sigma_i| = 3$,
- (ii) $Q = \cup_{i=1}^m P_{\sigma_i}$,
- (iii) $P_{\sigma_i} \cap P_{\sigma_j}$ è uno spigolo comune di questi poligoni.

(b) Una triangolazione Q è "regolare" se $\exists \omega = \{\omega_I : I \in \mathcal{M}\}$ tale che ciascun poligono P_{σ_i} sia ottenuto dalla proiezione delle facce superiori del poligono tri-dimensionale costruito sulla configurazione di punti sollevati con peso ω

$$P^\omega = \text{conv}\{(\mathbf{p}_I, \omega_I) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : I \in \mathcal{M}\}.$$

Ora introduciamo un metodo induttivo per costruire triangolazioni regolari dell' M -gono dato da $\text{conv}(\mathcal{A}_{N,M})$, per un certo insieme di punti $\mathcal{A}_{N,M}$. Per spiegare l'induzione, prendiamo l'esempio di $\text{Gr}(N, 11)_{>0}$ come mostrato nella figura sotto:

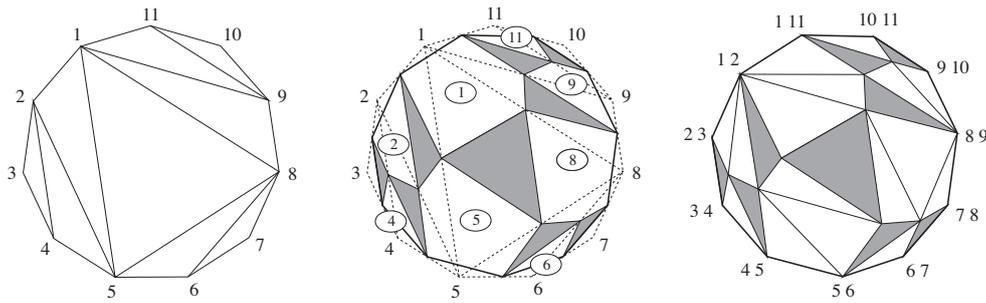


Figura 7: Costruzione per induzione di $Q_{2,11}$ a partire da $Q_{1,11}$. Ciascun poligono bianco nel riquadro mediano ha un indice comune nei vertici $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$ ed è indicato cerchiato.
 Inductive construction of $Q_{2,11}$ from $Q_{1,11}$. Each white polygon in the middle panel has a common index in the vertices $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$ which is shown in the circle.

Noi prima assegnamo un insieme di pesi $\{\omega_i : i = 1, \dots, M = 11\}$. La figura di sinistra mostra una triangolazione regolare di $Q_{1,11}$ dell' 11-gono. La triangolazione si può verificare nel modo seguente: siano $\{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b\}$ con $a < b$ i vertici di una diagonale in $Q_{1,11}$. Allora per ogni coppia di vertici $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}$ con $a < i < b < j$ (in ordine ciclico), il determinante $D_{a,i,b,j}$ deve essere negativo

$$D_{a,i,b,j} := \begin{vmatrix} 1 & p_a & q_a & \omega_a \\ 1 & p_i & q_i & \omega_i \\ 1 & p_b & q_b & \omega_b \\ 1 & p_j & q_j & \omega_j \end{vmatrix} \quad \text{con / with} \quad \hat{\mathbf{p}}_i = (p_i, q_i, \omega_i), \text{ etc.}$$

$\text{conv}\{\mathbf{p}_I : I \in \sigma_i\}$ satisfy

- (i) P_{σ_i} is a triangle, i.e. $|\sigma_i| = 3$,
- (ii) $Q = \cup_{i=1}^m P_{\sigma_i}$, and
- (iii) $P_{\sigma_i} \cap P_{\sigma_j}$ is a common edge of those polygons.

(b) A triangulation Q is "regular", if $\exists \omega = \{\omega_I : I \in \mathcal{M}\}$ such that each polygon P_{σ_i} is given by the projection of the upper faces of the 3-dimensional polytope defined by the lifted point configuration with the weight ω

We introduce an inductive construction of the regular triangulation of the M -gon given by $\text{conv}(\mathcal{A}_{N,M})$, for the point set $\mathcal{A}_{N,M}$. To explain the induction, we take the example for $\text{Gr}(N, 11)_{>0}$ as shown in the figure below:

Questo può essere dimostrato notando che

$$D_{a,i,b,j} = -[(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_a) \times (\hat{\mathbf{p}}_j - \hat{\mathbf{p}}_a)] \cdot (\hat{\mathbf{p}}_b - \hat{\mathbf{p}}_a).$$

Possedendo la triangolazione di $Q_{1,11}$, si può ottenere una suddivisione connettendo i punti medi di tutti i lati di $Q_{1,11}$ come mostrato nella figura mediana. Ciascun triangolo bianco nella figura di sinistra fornisce un triangolo nero per $\text{Gr}(2, 11)_{>0}$, cioè il vertice del triangolo nero è dato da $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$, dove $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}$ sono i vertici del lato in $Q_{1,11}$. La figura di mezzo consiste di triangoli neri e alcuni poligoni bianchi, le cui dimensioni sono determinate dal grado dei corrispondenti vertici in $Q_{1,11}$. Poiché ciascun poligono bianco ha un indice comune, mostrato dal numero cerchiato, esso può essere triangolato come nel caso precedente di $Q_{1,11}$, controllando i corrispondenti determinanti come dati sopra. Noi allora otteniamo $Q_{2,11}$ che è nella figura di destra. Si può continuare con questo processo induttivo per ottenere triangolazioni regolari $Q_{N,11}$ per $N \geq 3$ (si veda [22] per i dettagli). Basandoci sul processo di induzione, noi congetturiamo che nel il caso generale per $\text{Gr}(N, M)_{>0}$: Ogni triangolazione $Q_{N,M}$ è costituita da

- (a) un numero pari a $N(M - N) - M + N$ di triangoli neri,
- (b) un numero pari a $N(M - N) - N$ di triangoli bianchi,
- (c) un numero pari a $N(M - N) + 1$ di vertici.

Si osservi che $N(M - N)$ è la dimensione di $\text{Gr}(N, M)_{>0}$. In particolare, l'affermazione (c) è connessa al numero delle *collezioni massimali debolmente separate* in $\binom{[M]}{N}$, e quelle suddivisioni con poligoni colorati chiamati in combinatoria le *tassellature plabiche* [28, 29]. La Figura 8 mostra le triangolazioni di $\mathcal{A}_{3,6}$ per la Figure 3: sinistra per $t < 0$, la media per $t = 0$ e la destra per $t > 0$.

Allo scopo di classificare tutti i possibili grafi solitonici noi consideriamo la gerarchia di KP con variabili multi-temporali $\mathbf{t} = (t_3, t_4, \dots, t_{M-1})$. Allora la funzione lineare a tratti $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, \mathbf{t})$ si esprime come

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, \mathbf{t}) = \max_{I \in \mathcal{M}(A)} \left\{ \Theta_I(x, y, \mathbf{t}) = \sum_{i \in I} \theta_i(x, y, \mathbf{t}) \right\}$$

This can be shown by noting that

Having the triangulation $Q_{1,11}$, one can obtain a subdivision by connecting mid-points of all the edges in $Q_{1,11}$ as shown in the middle panel. Each white triangle in the left panel gives a black triangle for $\text{Gr}(2, 11)_{>0}$, that is, the vertex of the black triangle is given by $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$ where $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}$ are the vertices of the edge in $Q_{1,11}$. The middle panel consists of the black triangles and some white polygons whose sizes are determined by the degrees of the corresponding vertices in $Q_{1,11}$. Since each white polygon has a common index shown in the number in the circle, it can be triangulated as in the previous case of $Q_{1,11}$ by checking the corresponding determinants given above. We then obtain $Q_{2,11}$ which is in the right panel. One can continue this induction process to obtain the regular triangulation $Q_{N,11}$ for $N \geq 3$ (see [22] for the details). Based on the induction process, we conjecture the following for the general case for $\text{Gr}(N, M)_{>0}$: Each triangulation $Q_{N,M}$ consists of

- (a) $N(M - N) - M + N$ number of black triangles,
- (b) $N(M - N) - N$ number of white triangles, and
- (c) $N(M - N) + 1$ number of vertices.

Notice that $N(M - N)$ is the dimension of $\text{Gr}(N, M)_{>0}$. In particular, the item (c) is related to the number of *maximal weakly separated collections inside* $\binom{[M]}{N}$, and those subdivisions with colored polygons are called the *plabic tilings* in the combinatorics [28, 29]. Figure 8 shows the triangulations of $\mathcal{A}_{3,6}$ for Figure 3: Left for $t < 0$ and middle for $t = 0$ and right for $t > 0$.

In order to classify all possible soliton graphs, we consider the KP hierarchy with multi-time variables $\mathbf{t} = (t_3, t_4, \dots, t_{M-1})$. Then the piecewise linear function $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, \mathbf{t})$ is given by

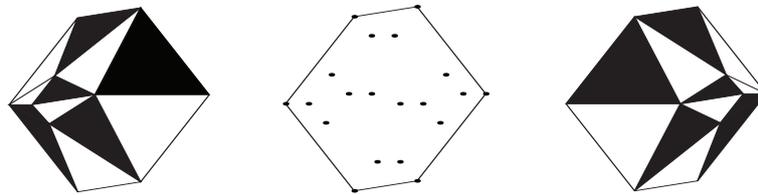


Figura 8: La triangolazione per i grafi solitonici della Fig.3. I punti a $t = 0$ (figura centrale) mostrano tutti i punti $\mathcal{A}_{3,6}$.
The triangulations for the soliton graphs in Fig.3. The dots at $t = 0$ (middle figure) show all the points in $\mathcal{A}_{3,6}$.

dove $\theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \omega_i(\mathbf{t})$ con $\omega_i(\mathbf{t}) = \sum_{k=3}^{M-1} \kappa_i^k t_k$ (si veda l'Osservazione 2). Notiamo che con un insieme di pesi $(\Omega_1, \dots, \Omega_M) \in \mathbb{R}^M$, si può identificare un unico punto (t_0, x, y, \mathbf{t}) , dove $t_0 + \theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \Omega_i$ per $i = 1, \dots, M$. In altri termini si può assegnare un ordine dominante per i piani $z = \theta_i(x, y, \mathbf{t})$ in ogni punto (x, y, \mathbf{t}) . Quindi noi costruiamo una triangolazione regolare per ogni $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$, che fornisce un unico grafo solitonico grazie alla mappa di dualità (11). La Figura 9 illustra la triangolazione per il caso $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$ con i parametri κ pari a $(\kappa_1, \dots, \kappa_5) = (-2, -1, 0, 1, 2)$.

where $\theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \omega_i(\mathbf{t})$ with $\omega_i(\mathbf{t}) = \sum_{k=3}^{M-1} \kappa_i^k t_k$ (see Remark 2). Notice that with a set of weights $(\Omega_1, \dots, \Omega_M) \in \mathbb{R}^M$, one can identify a unique point (t_0, x, y, \mathbf{t}) where $t_0 + \theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \Omega_i$ for $i = 1, \dots, M$. That is, one can assign an dominant order for the planes $z = \theta_i(x, y, \mathbf{t})$ at each point (x, y, \mathbf{t}) . Then we construct the regular triangulation for each $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$ which gives a unique soliton graph via the duality map (11). Figure 9 illustrates the triangulation for the case of $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$ with the κ -parameter $(\kappa_1, \dots, \kappa_5) = (-2, -1, 0, 1, 2)$.

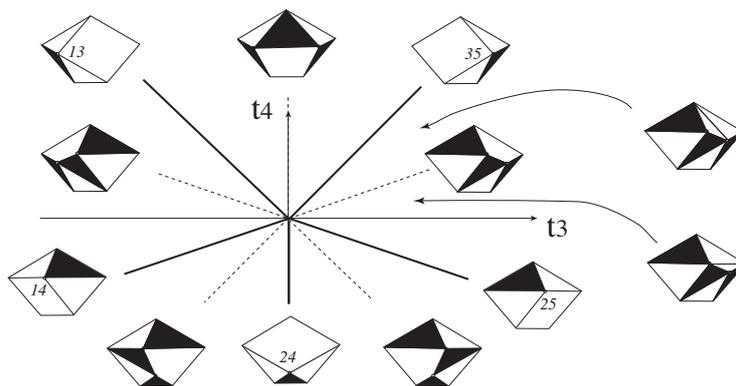


Figura 9: La struttura di cluster algebra dei grafi solitonici di $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$. Ogni suddivisione regolare del pentagono è data dalla proiezione dell'involuppo convesso dell'insieme di punti $\{(\kappa_i, \kappa_i^2, \omega_i(\mathbf{t})) : i = 1, \dots, 5\}$ con $\omega_i(\mathbf{t}) = \kappa_i^3 t_3 + \kappa_i^4 t_4$. Le linee continue indicano la mutazione (o ribaltamento) della triangolazione, mentre le linee tratteggiate marciano la triangolazione dei poligoni bianchi. I grafi solitonici sono dati tramite la mappa di dualità (11).

A cluster algebra structure of the soliton graphs of $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$. Each regular subdivision of pentagon is given by the projection of the convex hull of the set of points $\{(\kappa_i, \kappa_i^2, \omega_i(\mathbf{t})) : i = 1, \dots, 5\}$ with $\omega_i(\mathbf{t}) = \kappa_i^3 t_3 + \kappa_i^4 t_4$. The solid lines show the mutation (or flip) of the triangulations, and the dotted lines shows the triangulations of the white polygons. The soliton graphs are given via the duality map (11).

Si può identificare un'unica triangolazione regolare per ciascun punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$ [22]. Lo spazio dei tempi \mathbb{R}^{M-3} si divide allora in diversi coni poliedrici (si veda la Figura 9), mentre i polipodi duali ai coni producono un *associaedro* generalizzato. Nel caso di $\text{Gr}(2, M)$, si può mo-

One can identify a unique regular triangulation for each point $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$ [22]. The time space \mathbb{R}^{M-3} is then divided into several polyhedral cones (see Fig.9), and the dual polytope of the cones gives a generalized *associahedron*. In the case of $\text{Gr}(2, M)$, one can show that the dual

Associaedri

Il concetto di *associaedro* deriva dalla struttura che descrive i possibili ordinamenti che si devono adottare tra $n - 1$ elementi da *associare* con una operazione binaria. Quindi, dati $n - 1$ simboli ordinati $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, si intende descrivere tutti i possibili modi di aprire e chiudere parentesi per svolgere una data operazione binaria. Ad esempio, nel caso $n = 5$ otteniamo i casi $((a_1 a_2) a_3) a_4$, $(a_1 (a_2 a_3)) a_4$, $a_1 ((a_2 a_3) a_4)$, $a_1 (a_2 (a_3 a_4))$ e $(a_1 a_2) (a_3 a_4)$. La struttura algebrica che descriva questo insieme è un associaedro.

Gli associaedri sono estremamente importanti in ambito combinatorio, ove si possono citare gli alberi binari con $n - 1$ foglie, o i cammini su reticolo che non oltrepassino mai la diagonale principale. Tali corrispondenze danno una rilevanza peculiare al numero di triangolazioni ottenibili da n punti, che è pari al $(n - 2)$ -esimo *numero di Catalan*

$$C_{n-2} = \frac{1}{n-1} \cdot \binom{2n-4}{n-2}. \quad (12)$$

È da rimarcare il fatto che tanto la Grassmanniana totalmente positiva quanto l'associaedro rientrano nei più recenti studi sulle ampiezze di scattering in teorie quantistiche di campo particolarmente rilevanti, attraverso la nozione di *amplituedro* introdotta da Arkani-Hamed e Trnka

strare che il politopo duale è un associaedro in \mathbb{R}^{M-3} , i vertici del quale corrispondono ad un'unica triangolazione di un M -gono, o equivalentemente un grafo solitonico. Allora il numero di grafi solitonici per questo caso è dato dal numero di Catalan $C_{M-2} = \frac{1}{M-1} \binom{2M-4}{M-2}$. L'associaedro è un esempio di ciò che viene chiamato un *politopo secondario* in geometria combinatoria [21, 23, 24]. Notiamo anche che ogni vertice dell'associaedro corrisponde ad un insieme di variabili di cluster per il tipo A_{M-3} [19, 20, 12]. La struttura di cluster algebra su un grafo solitonico per $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ è un interessante problema aperto (si veda [25]). Un altro importante problema aperto riguarda la classificazione di tutti i grafi solitonici della gerarchia di KP per le Grassmanniane TNN, usando diversi strumenti della geometria combinatoria, quali la *trasformata di Gale* [23, 24] (un risultato parziale è dato in [22]). Questi risultati saranno utilissimi per lo studio di configurazioni ondose complesse che noi spesso osserviamo sulla superficie di acqua bassa (ad esempio si veda [2, 26, 27]). Per esempio, la Figura 10 mostra un risultato sperimentale e il corrispondente solitone di KP che è la più complicata struttura ondosa ottenuta nel caso $\text{Gr}(2, 4)_{\geq 0}$.

polytope is the associahedron in \mathbb{R}^{M-3} whose vertices correspond to a unique triangulation of M -gon, equivalently the soliton graph. Then the number of soliton graphs for this case is given by the Catalan number $C_{M-2} = \frac{1}{M-1} \binom{2M-4}{M-2}$. The associahedron is an example of *secondary polytope* in the geometric combinatorics [21, 23, 24]. We also note that each vertex of the associahedron corresponds to a set of cluster variables for the type A_{M-3} [19, 20, 12]. A cluster algebra structure on the soliton graph for $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ is an interesting open problem (see [25]). It is also an important open problem to classify all the soliton graphs of the KP hierarchy for the TNN Grassmannian using several tools from geometric combinatorics, such as the *Gale transform* [23, 24] (a partial result is given in [22]). The result will be very useful for the study of complex wave patterns we often observe on the surface of shallow water (see e.g. [2, 26, 27]). For example, Fig.10 shows the experimental result and the corresponding KP soliton which is the most complicated wave pattern obtained in the cases of $\text{Gr}(2, 4)_{\geq 0}$.



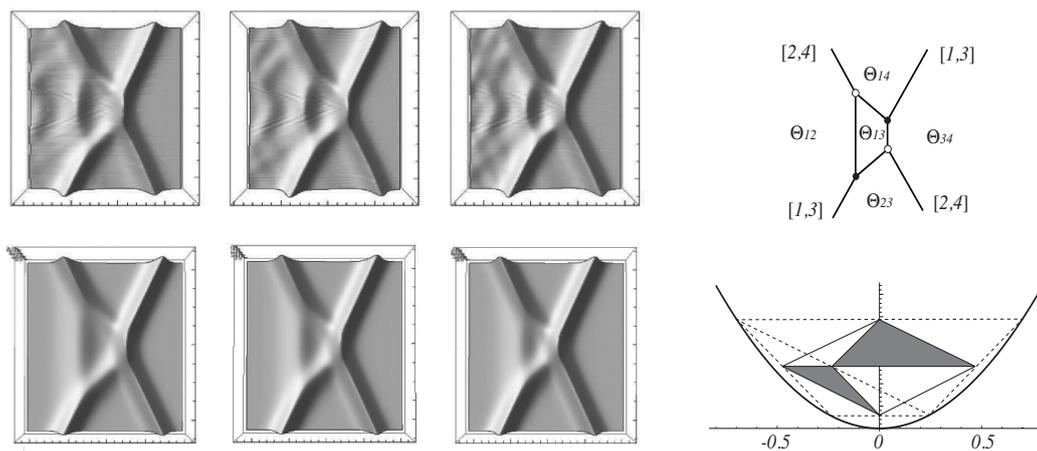


Figura 10: Configurazione ondosa generata in un contenitore d'acqua da Yeh e suoi collaboratori all' Oregon State University. Il riquadro superiore raffigura il risultato sperimentale. Si noti che oscillazioni di piccola ampiezza si stanno separando dalla struttura principale. Nel riquadro inferiore è riportato il corrispondente solitone di KP per un punto particolare della Grassmanniana $TNN Gr(2, 4)_{>0}$. A destra si mostra il grafo solitonico e la corrispondente triangolazione (si veda la Figura 6).

Wave pattern generated in the water tank by Yeh and his collaborator at Oregon State University. The upper panels show the experimental results. Note that the radiations are clearly separating from the main pattern. The lower panels show the corresponding KP soliton from a point of TNN Grassmannian $Gr(2, 4)_{>0}$, and the right panel shows the soliton graph and the corresponding triangulation (see Fig.6).

- [1] B. B. KADOMTSEV AND V. I. PETVIASHVILI: "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media", *Sov. Phys. - Dokl.* **15** (1970) 539-541.
- [2] Y. KODAMA: " KP soliton in shallow water", *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 434004.
- [3] Y. KODAMA AND H. YEH: " The KP theory and Mach reflection", *J. Fluid Mech.* **800** (2016) 766-786.
- [4] R. HIROTA: *The Direct Method in Soliton Theory.* Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [5] N. FREEMAN AND J. NIMMO: " Soliton-solutions of Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations: the Wronskian technique", *Phys. Lett. A* **95** (1983) 1-3.
- [6] S. CHAKRAVARTY AND Y. KODAMA: " Soliton solutions of the KP equation and application to shallow water waves", *Stud. Appl. Math.* **123** (2009) 83-151.
- [7] J. SATSUMA: " A Wronskian representation of N -soliton solutions of nonlinear evolution equations", *J. Phys. Soc. Japan* **46** (1979) 356-360.
- [8] M. SATO: " Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold", *RIMS Kokyurok (Kyoto University)* **439** (1981) 30-46.
- [9] Y. KODAMA AND L. WILLIAMS: " The Deodhar decomposition of the Grassmannian and the regularity of KP soliton", *Adv. Math.* **244** (2013) 979-1032.
- [10] A. Postnikov Total positivity, Grassmannians, and networks, ArXiv Mathematics e-prints, math/0609764 <http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0609764> (2006).
- [11] S. CHAKRAVARTY AND Y. KODAMA: " Classification of the line-solitons of KP II", *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 275209.
- [12] Y. KODAMA AND L. WILLIAMS: " KP solitons and total positivity for the Grassmannian", *Invent. Math.* **198** (2014) 637-699.
- [13] Y. KODAMA: *KP solitons and the Grassmannian.* Springer Briefs in Mathematical Physics vol.22, Springer, Berlin (2017).
- [14] T. MIWA, M. JIMBO AND E. DATE: *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite-dimensional algebras.* Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [15] A. BJÖRNER AND F. BRENTI: *Combinatorics of Coxeter groups.* Springer Verlag, New York (2005).
- [16] V. DEODHAR: "On some geometric aspects of Bruhat orderings I. A finer decomposition of Bruhat cells", *Invent. Math.* **79** (1985) 499-511.
- [17] R. MARSH AND K. RIETSCH: " Parametrization of flag varieties", *Representation theory* **2** (2004) 212-242.
- [18] Y. KODAMA AND L. WILLIAMS: "KP solitons, total positivity, and cluster algebras", *PNAS* **108** (22) 2011.8984-8989
- [19] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY: "Cluster Algebras I: Foundations", *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002) 497-529.
- [20] S. FOMIN, A. V. ZELEVINSKY: "Cluster algebras II: Finite type classification", *Invent. Math.* **154** (2003) 63-121. <http://www.math.lsa.umich.edu/fomin/cluster.html>

- [21] J. A. DELOERA, J. RAMBAU, F. SANTOS: *Triangulations, Algorithm and computation in Mathematics*. Springer, Berlin (2010).
- [22] J. Huang, *Classification of soliton graphs on totally positive Grassmannian*, PhD thesis, The Ohio State University (2015).
- [23] I. M. GELFAND, M. M. KAPRANOV, A. V. ZELEVINSKY: *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser, Boston (1994).
- [24] R. R. THOMAS: "Lectures in geometric combinatorics", *Student mathematical library: IAS/PARK city mathematical subseries* **33** (2006) AMS.
- [25] J. SCOTT: "Grassmannians and cluster algebras", *Proc. London Math. Soc.* **3** (2006) 345–380.
- [26] H. Yeh "Laboratory realization of Kodama's KP-solitons" Lectures delivered at the NSF/CBMS Regional Conference in the Mathematical Sciences Solitons in two-dimensional water waves and applications to tsunami UTPA, May 20-24 2013 <http://faculty.utpa.edu/kmaruno/nsfcbms-tsunami.html>
- [27] S. CHAKRAVARTY, Y. KODAMA: "Construction of KP solitons from wave patterns", *J.Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 025201.
- [28] B. LECLERC, A. ZELEVINSKY: "Quasicommuting families of quantum Plücker coordinates", *AMS Transactions* **181** (1998) 85-108.
- [29] S. OH, A. POSTNIKOV AND D. E. SPYER: "Weak separation and plabic graphs", *Proc. London Math. Soc.* **110** (2015) 721-754.
- [30] H. YEH, W. LI AND Y. KODAMA: "Mach reflection and KP solitons in shallow water", *Eur. Phys. J. Special Topics* **185** (2010) 97-111.



Yuji Kodama: Y. Kodama è Full Professor presso The Ohio State University, Columbus (OH) , USA. Ha ottenuto il PhD in Fisica alla Nagoya University (Giappone) nel 1978 e in Matematica presso la Clakson University di New York nel 1980. Ha scritto oltre 200 articoli scientifici e diversi libri. Le sue citazioni ammontano a oltre 11mila. I suoi interessi scientifici spaziano in tutta la Fisica Matematica, in particolare i sistemi integrabili e le equazioni alle derivate parziali nonlineari, l' Algebra e le applicazioni all'Ingegneria.