

---

# La convezione da cima a fondo

**Edward A. Spiegel**

*Astronomy Department, Columbia University, New York*

---

**Q**uando la densità di un fluido soggetto ad un campo di gravità sviluppa delle disomogeneità (per un qualunque motivo), il fluido tipicamente comincerà a fluire, e le sue porzioni meno dense si muoveranno verso l'alto. Questa descrizione eccessivamente coincisa si applica ad una vasta gamma di manifestazioni di un fenomeno che, per la importanza in natura e nell'industria, è stato largamente studiato da secoli, cominciando con le acute osservazioni di Archimede sul galleggiamento, intorno al 250 a.C. Dovette passare un certo tempo prima che Rinaldini, motivato dallo studio del trasporto di calore, conducesse degli esperimenti sulla convezione presso l'Accademia dei Lincei nel 1657. Il termine "convezione" fu coniato nel 1834 da Pruit, e comunica in modo appropriato l'idea che il fluido, muovendosi, trasporta con sé qualcosa che lo caratterizza.

La proprietà caratterizzante di un fluido che è stata maggiormente studiata negli esperimenti di convezione è la temperatura, le cui fluttuazioni generano fluttuazioni di densità negli oceani, nelle atmosfere, e nelle stelle e in altri scenari cosmici, così come in oggetti fatti dall'uomo come fornaci ed inceneritori. Il ruolo della temperatura è centrale nei processi convettivi che trasporta-

**W**hen a fluid lying in a gravity field develops inhomogeneities of density (by whatever mechanism), it will typically begin to flow with the less dense portions rising. This overly concise characterization covers a very large range of manifestations of a phenomenon whose importance in nature and in industry has caused it to be widely studied for centuries, beginning with Archimedes' penetrating thoughts on buoyancy in about 250 B.C. It was some time before Rinaldini, whose motivation was the study of heat transport, performed convection experiments at the Accademia dei Lincei in 1657. The term "convection" was coined in 1834 by Pruit and it conveys nicely the notion that the fluid motion carries with it some property of the fluid.

The most commonly studied fluid property in convection experiments has been temperature, whose fluctuations engender density fluctuations in oceans, atmospheres, and stars and in other cosmic settings as well as in manmade objects such as furnaces and incinerators. The role of temperature has been central to the convective process by which fluid properties are transported

no e mescolano le proprietà caratterizzanti di un fluido. Ma la temperatura non è l'unica fra queste proprietà le cui fluttuazioni producono le disomogeneità nella densità che guidano i moti convettivi e che, reciprocamente, sono trasportate da essi. Nella moltitudine di tali proprietà le più comunemente studiate sono impurità quali il sale disciolto nel mare, l'elio negli strati ricchi di idrogeno delle stelle, microorganismi che nuotano nell'agar nutriente, ed atomi di ferro nel nucleo liquido della Terra. L'argomento continua ancora oggi ad attrarre l'interesse sia dei teorici che degli sperimentali, ed il ruolo che la convezione deve giocare nello studio del clima aggiunge fascino agli occhi dei tanti studiosi di scienze planetarie che riescono a sfruttare grandi risorse computazionali al fine di elucidare le complessità dei moti convettivi. Questo è particolarmente importante quando le disomogeneità nella densità che guidano il flusso diventano sufficientemente intense da produrre moti turbolenti.

Possiamo considerare, in modo arbitrario, il ventesimo secolo come l'inizio dell'era moderna negli studi sulla convezione, quando H. Bénard osservò celle convettive esagonali scaldando dal basso un sottile strato di fluido. Egli potrebbe non aver colto che la tensione superficiale ebbe una influenza significativa sulle sue prime osservazioni, ma era consapevole delle sottigliezze e dell'interesse del problema che riguarda la formazione di strutture convettive: "Il mio problema sperimentale è stato quello di definire e misurare in uno strato orizzontale di liquido scaldato dal basso quali correnti convettive prevalgono, mantenendole il più vicino possibile al loro stato di maggior stabilità". Una eccellente tesi sulle strutture convettive fu scritta in seguito dal suo studente Dusan Avsec, e si capì che strutture convettive con la forma di rotoli costituiscono la forma geometrica preferita, sotto opportune condizioni, e che esse sono soggette a certi tipi di instabilità che sono state riscoperte solo in decenni recenti. Lo studio delle forme delle celle convettive ha fatto nascere la moderna teoria dei *pattern*, una affascinante branca della matematica applicata.

## Aspetti qualitativi

In questa sede non abbiamo spazio per addentrarci nella teoria matematica della convezione,

and mixed. But temperature is not the only property whose fluctuations lead to the the density inhomogeneities that drive convective motions and that, reciprocally, are transported by those motions. Among the multitude of such properties the most commonly studied are impurities such as the salt dissolved in the sea, helium in the hydrogen-rich layers in stars, swimming microorganisms in nutrient agar, and iron atoms in the earth's liquid core. The subject continues to attract the attention of both experimentalists and theoreticians to this day and the role convection must play in the study of climate adds to its appeal for many planetary scientists who are able to bring large computing facilities to bear on the elucidation of the complexities of convective motions. This is especially important when the density inhomogeneities that drive the flow become large enough to cause the motion to become turbulent.

We may arbitrarily choose the beginning of the twentieth century as the start of the modern era of convection studies when H. Bénard observed hexagonal convective cells upon heating a thin layer of fluid from below. He may not have realized that surface tension had a significant influence on his earliest observations, but he was aware of the subtleties and the interest in the problem of convective pattern formation: "The laboratory problem that I have myself has been to define and to measure in a horizontal liquid layer heated from below, the convection currents that prevail, considered as near as possible to their state of greatest stability." An excellent thesis on convective patterns was later written by his student Dusan Avsec and it was realized that convective rolls were the preferred planform under suitable conditions and that these were subject to certain instabilities that have been re-discovered only in recent decades. The study of the shapes of convective cells has given rise to modern pattern theory, an intriguing branch of applied mathematics.

## Qualitative aspects

We do not have space here to go far into the mathematics of convection theory but a rough and

ma un trattamento veloce e grossolano dell'instabilità convettiva può servire per illustrare il significato fisico dei parametri chiave. A questo scopo immaginiamo uno strato di fluido poco profondo, confinato fra piastre orizzontali mantenute a temperatura uniforme e costante. Quando il fluido è statico, se lo strato è assai sottile, ai fini della nostra discussione qualitativa, la temperatura all'interno dello strato fluido può essere approssimata da una funzione lineare della coordinata verticale  $z$ . Analogamente, possiamo ipotizzare che la densità del fluido,  $\rho_0(z)$ , nello stato stazionario sia (approssimativamente) lineare in  $z$ .

Adotteremo un punto di vista di tipo Lagrangiano<sup>1</sup> e concentreremo la nostra attenzione su di una porzione di fluido che si muove attraverso il mezzo fluido. La porzione di fluido ha una massa  $m$ , volume  $V$ , densità  $\rho$ . Il tempo è  $t$  e la sua posizione verticale è  $z$ . Le forze su tale porzione (che può essere pensato in guisa di una piccola palla sferica piena di fluido come quello circostante) sono la gravità, la spinta di Archimede (che, di fatto, è la pressione), e la frizione viscosa. Pertanto, le equazioni del moto sono

$$m\ddot{z} = -g(\rho - \rho_0)V - \mu\dot{z} \quad (1)$$

dove  $g$ , l'accelerazione di gravità, è costante attraverso lo strato di fluido ed agisce verso il basso (cioè nella direzione negativa dell'asse  $z$ ),  $\mu\dot{z}$  è la frizione viscosa, ed il punto sovrastante la lettera indica la derivata totale rispetto al tempo. Possiamo scrivere la massa della porzione (o particella, nel gergo della dinamica dei fluidi) come  $m = \rho V$ , oppure come  $m = \rho_0 V$ , usando una approssimazione che non è eccessiva se lo strato di fluido è sufficientemente sottile. Questo è il cuore dell'approssimazione che Lord Rayleigh attribuì a Boussinesq, in un articolo ben noto del 1916. In quella sede egli fornì una trattazione della dinamica più precisa del breve schizzo che stiamo per offrire, tenendoci aderenti al saggio detto che "Una piccola imprecisione fa risparmiare tante spiegazioni".

Tutto ciò è relativamente semplice, ma ci aspettiamo anche che la densità della particella di fluidi-

<sup>1</sup>In un approccio *Lagrangiano* si descrive come cambiano le variabili di interesse lungo il moto di una particella di fluido; in uno *Euleriano* si descrivono i cambiamenti delle variabili in una posizione fissa (N.d.T.).

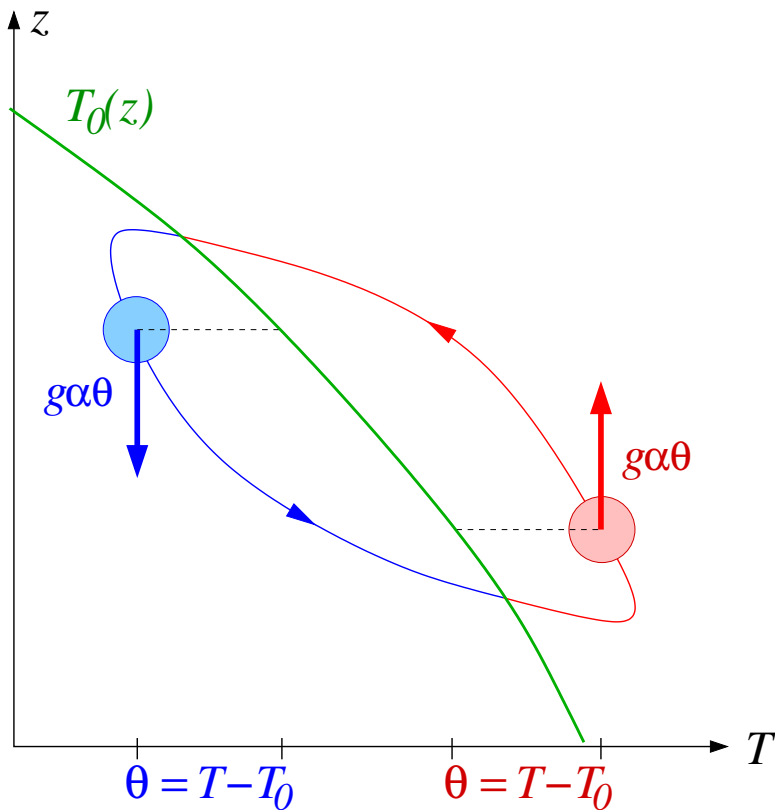
ready treatment of convective instability may serve to elucidate the physical meaning of the key parameters. For this, we imagine a shallow layer of fluid confined between rigid, horizontal plates maintained at fixed, uniform temperatures. In the static state of the fluid, if the layer is quite thin, the temperature in the body of a horizontal fluid layer may be approximated as a linear function of the vertical coordinate,  $z$ , for the purposes of this qualitative discussion. Likewise, we may assume that the fluid density,  $\rho_0(z)$ , in the basic static state is (roughly) linear in  $z$ .

We adopt a rather Lagrangian viewpoint and focus our attention on the motion of an idealized morsel of the fluid through the ambient fluid medium. The fluid morsel has mass  $m$ , volume  $V$ , density  $\rho(t)$  with time  $t$  and vertical location  $z$ . The forces on such a morsel (which may be thought of as a small, spherical balloon filled with the ambient fluid) are gravity, buoyancy (which is really pressure), and viscous drag. The equation of motion is then

$$m\ddot{z} = -g(\rho - \rho_0)V - \mu\dot{z} \quad (1)$$

where  $g$ , the acceleration of gravity is constant over the thin layer and acts in the downward (or negative  $z$ ) direction,  $\mu\dot{z}$  is the viscous drag and a dot over a letter signifies total time derivative. We can write the mass of the morsel or parcel, in fluid dynamical parlance, as  $m = \rho V$ , or as  $m = \rho_0 V$ , an approximation that is not bad if the layer is thin enough. This is the heart of an approximation that Lord Rayleigh, in a well-known paper of 1916 attributed to Boussinesq. Therein he gave a more precise treatment of the dynamics that we are now only sketching in keeping with the wise dictum, "A little inaccuracy saves a lot of explaining."

This much is relatively simple but we also expect the density of the fluid parcel to depend on the pressure  $p$  and temperature,  $T$ . If the deviations in these quantities are not too extreme and the ambient pressure and temperature are ver-



**Figura 1:** Rappresentazione schematica del semplice modello convettivo presentato nel testo. La linea verde rappresenta la temperatura  $T_0$  del fluido ambiente in funzione dell'altezza  $z$ . La differenza  $\theta$  tra la temperatura ambiente e quella della particella di fluido produce una accelerazione  $g\alpha\theta$  dovuta alla spinta di Archimede.

Schematics of the simple convective model discussed in the text. The green line represents the local ambient temperature  $T_0$  as a function of the height  $z$ . The difference  $\theta$  between the ambient temperature and the parcel temperature engenders the buoyancy acceleration  $g\alpha\theta$ .

do dipenda dalla pressione  $p$  e dalla temperatura,  $T$ . Se le deviazioni di queste quantità non sono troppo violente e la pressione e la temperatura ambiente sono distribuite verticalmente con un profilo simile a quello della configurazione statica, possiamo far ricorso ad una formula termodinamica standard, e cioè

$$\rho = \rho_0[1 + \varkappa(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (2)$$

dove  $\varkappa$  e  $\alpha$  sono i coefficienti, rispettivamente, di comprimibilità isoterma e di espansione termica. Questi ultimi sono dedotti dalle leggi della termodinamica tramite calcoli complicati, ma, in questa sede, ci accontenteremo di considerarli come parametri di ciascun fluido. Per molti fluidi comuni  $\varkappa$  è assai piccolo e può essere trascurato nell'ambito della approssimazione di Boussinesq. In tal caso l'equazione (2) si riduce a

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3)$$

e possiamo portare l'equazione (1) nella forma

$$\ddot{z} = g\alpha\theta - \nu\dot{z}. \quad (4)$$

dove  $\theta = T - T_0$  e  $\nu = \mu/m$ , che è considerato costante nello spirito di questa discussione. Il coefficiente d'attrito  $\nu$  è il reciproco di un tempo e

ticamente distribuita in un modo quasi statico, possiamo far ricorso ad una formula termodinamica standard, e cioè

$$\rho = \rho_0[1 + \varkappa(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (2)$$

where  $\varkappa$  is the isothermal compressibility and  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient. These last two properties from thermodynamics are gotten by serious calculations but, here, we must be satisfied to consider them parameters of the fluid in question. For many ordinary fluids,  $\varkappa$  is quite small and may be neglected in the Boussinesq approximation. In that case, equation (2) reduces to

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3)$$

and we may transform equation (1) to

$$\ddot{z} = g\alpha\theta - \nu\dot{z}. \quad (4)$$

where  $\theta = T - T_0$  and  $\nu = \mu/m$ , is treated as a constant in the spirit of this discussion. The drag coefficient  $\nu$  is an inverse time that gives the rate at which the parcel decelerates as a result of viscous drag. Of course, what also matters for the dynamics of the parcel is the value of  $T_0$  at its vertical location,  $z$ .

specifica il tasso di decelerazione della particella a causa della frizione viscosa. Naturalmente, ciò che anche influisce sulla dinamica della particella è il valore di  $T_0$  all'altezza  $z$ .

Mentre una particella di fluido attraversa il fluido, la sua temperatura, e quindi la sua densità, si riporta verso i valori dell'ambiente circostante. Dobbiamo tener conto di ciò tramite una equazione che descriva la variazione nel tempo della temperatura della particella,  $dT/dt$ , lungo il suo moto in verticale. Un modo comunemente usato per valutare come la temperatura della particella si riporta alla temperatura dell'ambiente è la legge di raffreddamento di Newton, in questa formulazione:

$$\frac{dT}{dt} = -q(T - T_0), \quad (5)$$

dove il termine sulla destra rappresenta il rilassamento della temperatura della particella alla temperatura dell'ambiente locale. Il tasso di questo processo di riaggiustamento è  $q$ . Esprimiamo la temperatura della particella come la temperatura dell'ambiente circostante  $T_0(z(t))$  più la deviazione  $\theta(t)$ , dove  $z(t)$  è la posizione verticale della particella al tempo  $t$ . A questo punto possiamo scrivere  $\frac{dT_0}{dt} = \frac{dT_0}{dz} \dot{z}$  e quindi arrivare a

$$\dot{\theta} = \beta_0 \dot{z} - q\theta. \quad (6)$$

dove  $\beta_0 = -dT_0/dz$ .

## Dimensioni

Finora abbiamo parlato delle particelle di fluido come se le loro dimensioni fossero irrilevanti. Tuttavia, la frizione che agisce su di un oggetto che si muove all'interno di un fluido deve chiaramente dipendere dalle sue dimensioni. Supponiamo che le particelle di fluido di cui stiamo parlando siano sferiche, con un diametro pari a  $\ell$ . La frizione esercitata su di una particella in moto cresce con le dimensioni della particella proporzionalmente a  $\ell^2$  poiché, approssimativamente, dipende dall'estensione della superficie del fluido ambiente che si oppone al moto della particella. Questa raffigurazione assai fisica della dinamica del fluido è utile per evitare il molti dettagli matematici di un trattamento completo del problema, ma richiede uno spiccato intuito fisico.

As the fluid parcel traverses the layer, its temperature, hence its density, adjusts to those properties of the surroundings. We must allow for this by writing an equation for the time variation of temperature in the parcel,  $dT/dt$ , as it moves vertically. A commonly used way to estimate how the parcel's temperature adjusts to the temperature of its surroundings is Newton's law of cooling, expressed this way:

$$\frac{dT}{dt} = -q(T - T_0), \quad (5)$$

where the term on the right represents the relaxation of the parcel's temperature to the local ambient temperature. The rate of this adjustment process is  $q$ . We write the parcel's temperature  $T$  as the local ambient temperature  $T_0(z(t))$  plus the deviation  $\theta(t)$  where  $z(t)$  is the vertical location of the parcel at time  $t$ . Now, we may write  $\frac{dT_0}{dt} = \frac{dT_0}{dz} \dot{z}$  and so arrive at

$$\dot{\theta} = \beta_0 \dot{z} - q\theta. \quad (6)$$

where  $\beta_0 = -dT_0/dz$ .

## Sizes

So far we have treated fluid parcels as if their sizes did not matter. However, the drag on an object moving through a fluid clearly must depend on its size. Suppose that the fluid parcels under discussion are spherical with diameters  $\ell$ . The drag on a moving parcel grows with parcel size like  $\ell^2$  since that is roughly the area of ambient fluid blocking the parcel's motion. This physically more convenient image of the dynamics of the fluid avoids the many mathematical details in a full treatment of the problem but it does call for the application of physical intuition. In particular, we should improve the description of the viscous drag on a fluid parcel by the replacement of  $\nu$  by  $\hat{\nu}\ell^{-2}$  where the new parameter,  $\hat{\nu}$ , must have the physical dimensions of ( $\ell^2$  times  $1/t$ )

In particolare, è necessario migliorare la descrizione della frizione viscosa a cui è soggetta una particella rimpiazzando  $\nu$  con  $\hat{\nu}\ell^{-2}$  dove il nuovo parametro,  $\hat{\nu}$ , deve avere le unità di misura di ( $\ell^2$  moltiplicato  $1/t$ ), in modo da legare l'intensità della frizione alle dimensioni della particella. Non è una coincidenza che le unità di misura di  $\hat{\nu}$  siano le stesse del coefficiente di viscosità cinematica che si incontra in dinamica dei fluidi. Inatti, la frizione viscosa tende a rallentare il moto della particella in un tempo caratteristico  $\tau_\nu = \ell^2/\hat{\nu}$ .

Ancor più di ciò, proprio l'operatore laplaciano che appare nel progenitore matematico dell'equazione (6), attraverso la diffusione termica, fa sì che le differenze di temperatura tendano a smussarsi nel tempo. Ciò ha un ruolo essenziale nella dinamica della convezione perché fa sì che la spinta di Archimede a cui è soggetta una particella possa aumentare o diminuire grazie allo scambio di calore con l'ambiente circostante. Analogamente a ciò che abbiamo fatto con la viscosità, ora rimpiazziamo  $q$  nell'equazione (6) con  $\hat{q}\ell^{-2}$ . Questa è una approssimazione del tasso a cui la temperatura di una particella stazionaria rilassa verso la temperatura ambiente, dove  $\hat{q}$  è una forma più appropriata del coefficiente di scambio termico, espresso in unità di misura che tengono conto delle dimensioni della particella. Il tempo di rilassamento termico della particella, quindi, è  $\tau_q = \ell^2/\hat{q}$ . Poiché si può pensare che i due processi dissipativi, quello viscoso e quello termico, agiscano in serie, li possiamo combinare insieme in una scala di tempo dissipativa  $\tau_{dis} = \frac{\ell^2}{\sqrt{\tau_\nu\tau_q}}$ .

Una terza importante scala di tempo è dinamica:  $\tau_{dyn} = 1/\sqrt{g\alpha\beta_0}$ . Questo è il tempo di caduta libera di una particella sferica in moto all'interno del mezzo fluido soggetta alla gravità ridotta ( $\approx g\alpha\beta_0 d$ ), dove  $d$  è la profondità del fluido. Se  $\beta_0 > 0$ , spostandosi verso l'alto  $T_0$  diminuisce e quindi, come succede in quasi tutti i fluidi ordinari, la densità risulta maggiore in alto. Ciò produce una stratificazione di densità in cui il fluido più pesante sovrasta quello leggero, il che può essere instabile sotto certe condizioni. Questo è il caso interessante per la nostra discussione, e quindi da ora in poi considereremo  $\beta_0 > 0$ . Quando il tempo dissipativo è molto più breve di quello dinamico, la dissipazione opera molto

to allow for the dependence of drag on parcel size. It is no coincidence that the dimensions of  $\hat{\nu}$  accords with the physical dimensions of the kinematic viscosity of fluid dynamics. In these terms, the viscous drag will tend to slow down the motion of the parcel on a timescale  $\tau_\nu = \ell^2/\hat{\nu}$ .

More than this, that selfsame Laplacian operator in the mathematical antecedent to equation (6), through thermal diffusion, causes temperature differences to decay. This plays a vital role in the dynamics of convection by causing a parcel to lose or gain buoyancy as it exchanges heat with its surroundings. In parallel with what we did with viscosity, we now replace  $q$  in equation (6) by  $\hat{q}\ell^{-2}$ . This is an estimate of the rate at which a stationary parcel's temperature relaxes to the ambient temperature where  $\hat{q}$  is an improved heat exchange coefficient with units that allow for the size of the parcel. The thermal adjustment time of the parcel is then  $\tau_q = \ell^2/\hat{q}$ . Since the two dissipative processes, viscous and thermal, may be thought of as acting in series, we may combine them into the dissipative timescale  $\tau_{dis} = \frac{\ell^2}{\sqrt{\tau_\nu\tau_q}}$ .

A third significant timescale is dynamical:  $\tau_{dyn} = 1/\sqrt{g\alpha\beta_0}$ . This is the free fall time of a roughly spherical parcel moving in the reduced gravity ( $\approx g\alpha\beta_0 d$ ) of the fluid medium where  $d$  is the depth of the fluid. When  $\beta_0 > 0$ ,  $T_0$  decreases in the upward direction so that, as for most ordinary fluids, the density is larger above. This makes for a top-heavy density distribution which may be unstable under certain conditions. That is the interesting case for this discussion so we shall henceforth assume that  $\beta_0 > 0$ . Then, when the dissipation time is much shorter than the dynamical time, the dissipation operates more quickly than the dynamics and it inhibits the onset of convection. This conclu-

più velocemente della dinamica, e ciò impedisce l'innescò della convezione. Questa conclusione può essere espressa in termini del quadrato del rapporto delle scale di tempo dissipativa e dinamica. Ma, poiché  $\ell$  caratterizza una soluzione, e non impone una condizione, non è una quantità adatta per valutare le condizioni che producono una instabilità convettiva. Quindi rimpiazziamo  $\ell$  con  $d$  quando ragioniamo intorno a possibili instabilità che portino a moti convettivi. Pertanto concludiamo che la convezione può scatenarsi quando

$$R > f(a) \quad (7)$$

dove

$$R = \frac{gd^4\alpha\beta_0}{\kappa\nu} \quad (8)$$

è il numero di Rayleigh,  $a = d/\ell$  e  $f$  è una funzione che può essere calcolata con alcune pagine di matematica relativamente semplice. (Una trattazione più elaborata di queste manipolazioni, che tenga traccia delle varie lunghezze, è troppo lunga per essere inclusa in questa sede, ma descritta nelle fonti per l'approfondimento che suggeriamo alla fine di questa introduzione).

All'innescò, il moto inizialmente appare sotto forma di movimenti regolari disposti in celle. In questa sede non siamo in grado di descrivere le celle, ma fondiamo la discussione sul concetto di particella, che si adatta meglio a questo tipo di presentazione. Il numero di Rayleigh è un indicatore dell'intensità della convezione. Quest'ultima si innesca quando  $R$  eccede un certo valore critico. Il numero di Rayleigh critico dipende dalle condizioni dell'ambiente, dalle condizioni al contorno, dalle proprietà che caratterizzano il fluido e da  $a = d/\ell$ . La scelta di  $a$  è in qualche modo arbitraria, ed è legata ai dettagli delle celle presenti nei modelli matematicamente più dettagliati. Nel caso preso in considerazione più frequente, il numero di Rayleigh critico si ha per  $a \approx 2$  ed il suo valore è circa  $10^3$ , sebbene le variazioni possano talvolta essere grandi. All'aumentare del numero di Rayleigh la convezione diventa più vigorosa. I valori di  $R$  che caratterizzano l'atmosfera terrestre ed ancor più quelli delle stelle sono particolarmente elevati, ed un problema interessante consiste nel determinare, sia sperimentalmente sia matematicamente, il flusso di calore verticale in funzione di  $R$  quando  $R$  tende all'infinito.

sion may be expressed in terms of the square of the ratio of the dissipative time to the dynamical time. But, since  $\ell$  characterizes a solution rather than imposing a condition, it is not suitable for stating the conditions for convective instability. Hence we replace  $\ell$  by  $d$  in thinking about the issue of instability to convective activity. We then conclude that convection can break out when

$$R > f(a) \quad (7)$$

where

$$R = \frac{gd^4\alpha\beta_0}{\kappa\nu} \quad (8)$$

is the Rayleigh number,  $a = d/\ell$  and  $f$  is a function that may derived from a few pages of relatively simple mathematics. (A more elaborate treatment of these manipulations, keeping track of the various lengths, is too long for inclusion here but is described in the suggested additional reading at the end of this introduction.)

At onset, the initial motion may appear in the form of regular cellular motions. Here, we have no cells but base the discussion on the parcels, which are more adaptable to the character of this treatment. The Rayleigh number is an indicator of the intensity of convection whose onset occurs when  $R$  exceeds a certain critical value. The critical Rayleigh number depends on the ambient conditions, on the boundary conditions, on the properties of the fluid and on  $a = d/\ell$ . The choice of  $a$  is somewhat arbitrary and is related to the details of the cells in the more mathematical model. Under the most commonly considered of these quantities, the critical Rayleigh number occurs for  $a \approx 2$  and is about  $10^3$ , though variations are sometimes large. As the Rayleigh number is increased, the convection grows more vigorous. The values of  $R$  that occur in the earth's atmosphere and especially in stars are particularly large and a problem of interest is that of determining the vertical heat flux as a function of  $R$  as  $R$  tends to infinity experimentally and mathematically.

Anche se il numero di Rayleigh è il più importante parametro che controlla la convezione, altri parametri sono pure significativi: il numero di Prandtl ( $\hat{\nu}/\hat{q}$ ) e la forma e le dimensioni delle particelle di fluido (o delle celle). La convezione per valori molto alti di  $R$  è turbolenta, e questo crea un problema difficile in quanto sono coinvolte particelle che abbracciano un'intera gamma di dimensioni. Inoltre, altri processi possono aver luogo nei fluidi in convezione. Soluti che influenzano la densità, la rotazione, campi magnetici (in mezzi conduttori di elettricità) che influiscono sulla dinamica, e la comprimibilità del fluido, giusto per nominarne alcuni. Questi effetti introducono altri parametri che caratterizzano le condizioni di altre forme di convezione e producono numerose varianti del processo convettivo.

## Retroazione

Finora abbiamo trascurato l'effetto dei moti verticali  $w = \dot{z}$  e della deviazione della temperatura  $\theta$  sullo stato statico dell'ambiente. Ma non appena il fluido comincia a muoversi, esso trasporterà, col moto convettivo, del calore. Ciò porterà a delle modifiche nella temperatura ambiente, e dunque richiede che la sostituzione di  $T_0(z)$  con  $T(z, t)$  e di  $\beta_0$  con  $\beta = -\partial T/\partial z$ . Il flusso verticale di calore, che era proporzionale a  $-\beta_0$ , ora diventa  $-\kappa\beta + w\theta$ , dove  $w$  è un nuovo nome per  $\dot{z}$  e  $\kappa$  è la diffusività termica. La notazione  $w$  intende enfatizzare il ruolo della velocità verticale nel trasportare il calore verticalmente (verso l'alto o verso il basso). I coefficienti in queste espressioni coinvolgono quantità fisiche quali i calori specifici e le conduttività termiche. In questo interludio qualitativo, li tratteremo come dei parametri costanti, da menzionare esplicitamente solo se assolutamente necessario. Al di là di questi dettagli, osserviamo che il cambiamento nel flusso di calore verticale prodotto dalla convezione è la differenza fra i flussi nei due casi. Tale differenza è, approssimativamente  $c[w\theta - \kappa(\beta - \beta_0)]$ , dove  $c$  denota il calore specifico combinato con ciascuno altra quantità ad esso connessa. (Lo studio di tali dettagli per ora non è di nostro interesse).

A questo punto la domanda importante è in qual modo i cambiamenti del flusso di calore producono dei cambiamenti nella struttura verticale del campo di temperatura. Senza preoccuparsi

While the Rayleigh number is the most important of the control parameters of convection, there are other significant parameters: the Prandtl number ( $\hat{\nu}/\hat{q}$ ) and the shapes and sizes of the fluid parcels (or cells). The convection at very large  $R$  is turbulent and this presents a difficult problem with parcels of a range of sizes involved. Moreover, other processes occur in convecting fluids such as solutes that affect the density, rotation and magnetic fields (in conducting media), which affect the dynamics, and compressibility, to name a few. These effects bring in other parameters characterizing the conditions in those other forms of convection and give rise to numerous variations on the convective process.

## Feedback

So far, we have neglected the effects of the vertical motion  $w = \dot{z}$  and of the temperature perturbation  $\theta$  on the background static state. But once the fluid starts moving, it will transport, or convect, heat. This will lead to modifications in the background temperature and requires that we now replace  $T_0(z)$  by  $T(z, t)$  and  $\beta_0$  by  $\beta = -\partial T/\partial z$ . The vertical heat flux, which was proportional to  $-\beta_0$  now becomes  $-\kappa\beta + w\theta$  where  $w$  is a new name for  $\dot{z}$  and  $\kappa$  is a thermal diffusivity. The notation  $w$  is introduced to emphasize the role of the vertical velocity in transporting heat vertically (up or down). The coefficients in these expressions involve physical quantities such as specific heats and thermal conductivities. In this qualitative interlude, we treat them as constant parameters to be mentioned explicitly only when absolutely necessary. Such details aside, we see that the change in vertical heat flux engendered by the convection is the difference between the fluxes in the cases. That difference is approximately  $c[w\theta - \kappa(\beta - \beta_0)]$ , where  $c$  stands for specific heat combined with any other of its usual concomitants. (Study of such details need not be of concern for now.)

The important question at this point is how does the change in heat flux cause changes in the vertical structure of the temperature field. Without worrying unduly about the thermodynamic



troppo delle complessità della termodinamica (ma sfruttando qualche conoscenza che arriva da approcci più formali al problema) possiamo affermare che il gradiente verticale della temperatura risponde ai cambiamenti nel flusso di calore nel modo seguente:

$$\dot{\beta} = w\theta - \kappa(\beta - \beta_0) \quad (9)$$

e pertanto osserviamo che il cambiamento del flusso conduttivo di calore è un aspetto centrale della variazione temporale nella struttura verticale del campo di temperatura descritto dal termine che contiene  $\beta - \beta_0$ . Se ora riscriviamo l'equazione (6) nella sua forma pienamente nonlineare

$$\dot{\theta} = \beta w - q\theta \quad (10)$$

e riutilizziamo l'equazione (4) nella forma

$$\dot{w} = g\alpha\theta - \nu w \quad (11)$$

possiamo concludere che le equazioni (9)-(11) costituiscono un sistema chiuso nelle incognite  $(w, \theta, \beta)$ . Questa non è una coincidenza, in quanto questo insieme di equazioni differenziali ordinarie, con qualche piccola differenza nella notazione, furono dedotte nel contesto della convezione termica così come lo furono le equazioni di Lorenz, le cui soluzioni sono state ampiamente utilizzate come esempio di dinamica caotica.

## Convection eolica

Sebbene la convezione generalmente è forzata da spinte di Archimede che agiscono lungo la verticale, molti studi trovano che le scale orizzontali e quelle verticali sono di lunghezza comparabile. Recentemente, sempre più attenzione è stata data allo sviluppo nella convezione di Rayleigh-Bénard di correnti orizzontali relativamente intense. Si può pensare a questi flussi come a dei venti, e la convezione che li genera è stata chiamata convezione ventosa. Qui la chiameremo eolica, da Eolo, l'antico dio greco del vento. Un simile nome potrebbe suggerire che siano i venti a generare la convezione, ma cediamo alla tentazione e usiamo questo nome per suggerire che i venti sono generati dalla convezione. Dopo tutto, Ithaca è un'isola greca.

Per mantenere le cose semplici in questo fina-

intricacies (but with some hindsight from more mathematical studies of the problem) we may surmise that the vertical temperature gradient responds to changes in heat flux in this manner:

$$\dot{\beta} = w\theta - \kappa(\beta - \beta_0) \quad (9)$$

and we see that the change in conductive heat flux is a central aspect of the temporal variation in the vertical structure of the temperature field as expressed by the term in  $\beta - \beta_0$ . If we now rewrite equation (6) in its fully nonlinear form

$$\dot{\theta} = \beta w - q\theta \quad (10)$$

and bring back equation (4) in the form

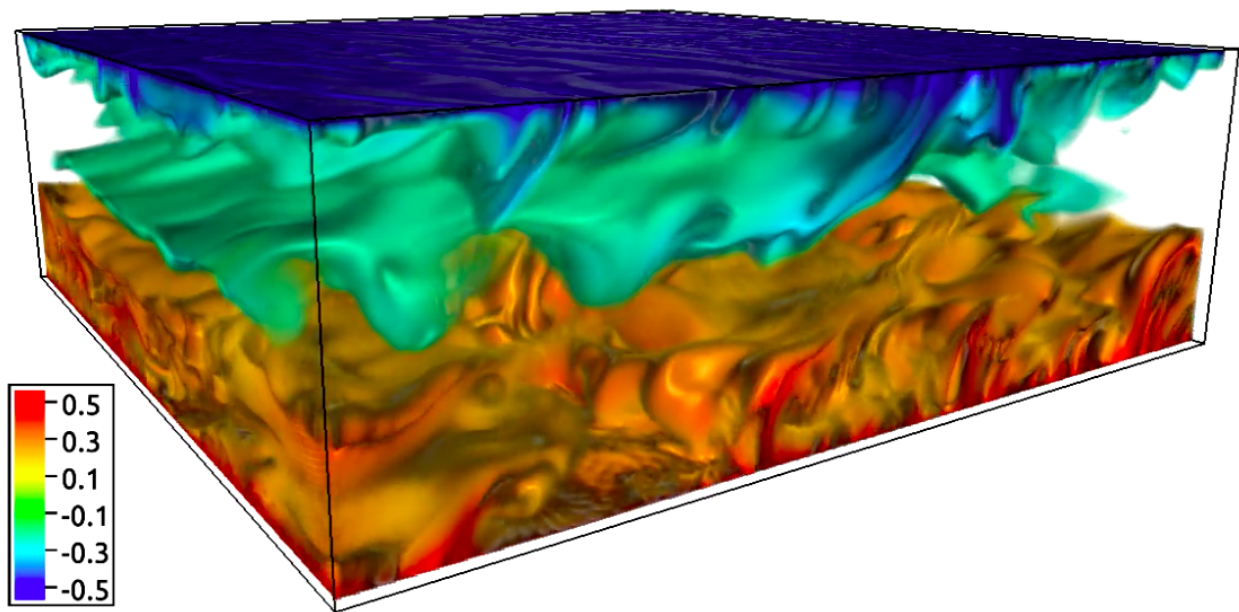
$$\dot{w} = g\alpha\theta - \nu w \quad (11)$$

we see that equations (9)-(11) form a closed system for  $(w, \theta, \beta)$ . This is no coincidence since this set of ordinary differential equations, apart from minor changes in notation, were derived in the context of thermal convection as were the Lorenz equations whose solutions have been widely used to exhibit chaotic behavior.

## Aeolian convection

Although convection typically is driven by vertical buoyancy forces, in many studies of convection the horizontal and vertical scales of motion are comparable. But increasing attention has lately been paid to the development of relatively strong horizontal currents in Rayleigh-Bénard convection. These flows may be thought of as winds and the convection that drives them has been called windy convection. Here, we call them Aeolian convection for aeolus, the ancient Greek god of the wind. That name might normally suggest that the winds drive the convection but here we yield to temptation and use the name to suggest that the winds are driven by the convection. After all, Ithaca is a Greek island.

To keep things simple in this coda, we confine



**Figura 1:** Campo di temperatura in una simulazione orizzontalmente periodica di convezione eolica, con bordi superiori e inferiori privi di attrito,  $R = 10^7$ , e  $Pr = 0.71$ . Il vento è evidente nelle distorsioni del campo di temperatura in prossimità dei bordi. In questo esempio tridimensionale la simmetria assiale è rotta dall'effetto della rotazione intorno ad un asse orizzontale con velocità angolare  $2\Omega = 10^4$  in unità adimensionali.

*Temperature in a horizontally periodic simulation of Aeolian convection with free-slip top and bottom boundaries,  $R = 10^7$ , and  $Pr = 0.71$ . The wind is evident in the distortion of the temperature field close to the boundaries. In this three-dimensional example the vertical axial symmetry is broken by the effect of rotation around a horizontal axis with dimensionless angular velocity  $2\Omega = 10^4$ .*

le, limiteremo la discussione al caso della convezione in due dimensioni. In tal caso, quando il numero di Rayleigh è grande e la convezione è vigorosa, i venti si formano spontaneamente e diventano dominanti: l'energia cinetica della velocità orizzontale può diventare di molto maggiore dell'energia associata ai moti verticali. Il motivo per l'apparente facilità con cui i venti si formano nel caso bidimensionale è la forte anisotropia nel piano orizzontale del caso bidimensionale. Affinché la convezione tridimensionale possa generare dei venti, è necessario rompere la simmetria di rotazione intorno ad un asse verticale.

Quasi tutto ciò che si sa riguardo alla convezione eolica è dovuto a simulazioni numeriche, ma i venti possono anche essere facilmente prodotti sperimentalmente. Una pentola piena d'acqua posta su di un fornello contenente alcuni grani di pepe nero per visualizzare il flusso può mostrare dei forti venti vicino al bordo quando arriva all'ebollizione. Tuttavia, nelle simulazioni è necessario specificare condizioni al contorno che

the discussion to the case of two-dimensional convection. Then, when the Rayleigh number is large and the convection is vigorous, the winds form spontaneously and become prominent: the kinetic energy in the horizontal velocity can become far larger than the energy in the vertical motions. The reason for the apparent ease with which winds form in the two-dimensional case is that two-dimensional convection is highly anisotropic in horizontal planes. For three-dimensional convection to generate winds, the rotational symmetry about a vertical axis in the ambient conditions must be broken.

Most of what is known of Aeolian convection comes from numerical simulations but the winds can be easily produced experimentally. A pot of water on a hot stove with some small bits of black pepper to mark the flow can reveal strong boundary winds when the pot is boiling. However, for simulations one must specify boundary conditions that permit constant flow in the wind direction. Various special conditions are then

permettano un flusso costante del vento nella direzione orizzontale. Possono essere impiegate diverse condizioni speciali, come quelle periodiche nella direzione del vento. Dettagli tecnici di questo genere sono affrontati quotidianamente dagli analisti numerici, e qui non c'è bisogno di soffermarsi.

Sebbene sia necessario un maggiore sviluppo teorico riguardo alla formazione dei venti, ciò che già è emerso fa sorgere la domanda se qualcuno dei venti noti sia il prodotto di una forte convezione. Il terzo più esterno del sole (radialmente) è pienamente convettivo ed al suo fondo esiste uno strato soggetto a sforzi di taglio che, si ipotizza, sia causato dalla convezione. Ma nessun altro strato analogo è stato identificato quale prodotto di attività convettive. Siamo quindi testimoni di ciò che potrebbe essere la nascita di un nuovo filone di investigazione. Ciò che ora è necessario è accertare dei criteri che permettano di decidere quando un vento orizzontale può essere il prodotto della convezione.

Poiché questo lavoro non intende essere una rassegna ma una introduzione, non riportiamo una bibliografia completa. Di seguito si trovano alcuni suggerimenti per l'approfondimento.

called for, such as periodic boundary conditions in the wind's direction. Such technical matters are routinely dealt with by numerical analysts and need not be spelled out here.

Though more theory of the wind formation is needed, what has emerged already raises the question of whether any known winds may result from strong convection. The outer third (in radius) of the sun is fully convective and there is a shearing layer at the bottom of the so-called convection zone that has been ascribed to convection. But no other such layer as been has attributed to convective activity. We witness here what may be the birth of a new line of investigation. What is needed now are criteria for deciding when a horizontal wind may be driven by convection.

As this is not meant as a review but an introduction, we do not give full bibliography. Here with a few suggestions for further reading.



- [1] S. CHANDRASEKHAR: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, ristampa Dover Publications, New York (1961–2013).
- [2] J. S. TURNER: *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1973).
- [3] N. O. WEISS E M. R. E. PROCTOR: *Magnetoconvection*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2014).



**Edward A. Spiegel:** è il professore Rutherford di Astronomia, emerito, presso la Columbia University di New York. Il prof. Spiegel ha conseguito la laurea presso la UCLA ed il dottorato presso l'Università del Michigan. Ha ricoperto posizioni di ricerca presso l'Università di Princeton, la NYU e l'Università di Cambridge. I suoi interessi di ricerca si focalizzano in modo particolare sugli aspetti matematici della meccanica dei fluidi, ed in particolare della convezione, applicati a problemi di natura astrofisica.

**Edward A. Spiegel:** is the Rutherford Professor emeritus of Astronomy at Columbia University in New York. Professor Spiegel received his B.A. from UCLA and his Ph.D. from the University of Michigan. He held research positions at Princeton University, NYU, and Cambridge University. His research interests focus on the mathematical aspects of fluid mechanics, and in particular of convection, applied to astrophysical problems.

