

---

# Meccanica quantistica e *lensing* gravitazionale

**Claudio Corianò, Marta Dell’Atti,  
Luigi Delle Rose, Matteo Maria Maglio**

Dipartimento di Matematica & Fisica “Ennio De Giorgi”,  
Università del Salento

---

**L**a deflessione della luce in un campo gravitazionale è una delle prove sperimentali più rilevanti della relatività generale. In questo contesto si discutono alcuni effetti della meccanica quantistica sulla propagazione dei fotoni in uno spazio-tempo curvo. In particolare si presentano le correzioni quantistiche del Modello Standard delle particelle elementari alla diffusione del fotone da una sorgente gravitazionale.

## Introduzione

Nel 1916 Albert Einstein pubblicò lo scritto *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (fondamenti della relatività generale)* con il quale formulò la teoria della Relatività Generale [1]. Come noto, questa teoria si fonda sul principio di equivalenza tra sistemi di riferimento accelerati, quindi non inerziali, e campo gravitazionale che, nella sua formulazione debole, comporta l’equivalenza tra massa inerziale, quella che compare nella legge di Newton della dinamica, e massa gravitazionale, quella che compare nell’equazione dei gravi, anch’essa formulata da Newton.

È ben noto che la teoria è formulata in modo puramente geometrico ed utilizza gli strumenti matematici tipici della geometria differenziale

di Riemann. Lo spazio-tempo è trattato al pari di una varietà differenziabile, eccetto per quelle soluzioni singolari, quali ad esempio i buchi neri. Lo spazio-tempo è pertanto l’entità fisica e geometrica entro la quale formulare la descrizione dei fenomeni gravitazionali. Esso è descritto da un tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , la cui dinamica è legata alla distribuzione di materia che genera il campo attraverso il suo tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . Lo spazio-tempo, in presenza di materia o di energia, essendo queste equivalenti, tende ad incurvarsi, dando come effetto principale la deflessione delle traiettorie dei raggi luminosi che seguono curve geodetiche.

Il fenomeno della deflessione a causa di lenti gravitazionali rappresenta la prova più diretta, e visiva, di questi effetti di curvatura che riguardano sia galassie che pianeti, coinvolgendo sia distanze galattiche che extragalattiche, quest’ultime dette anche cosmologiche.

Il sistema fisico considerato comprende una sorgente luminosa, una distribuzione di massa, che funge da lente gravitazionale e flette i raggi luminosi, e un osservatore che raccoglie un’immagine a una certa posizione angolare. La Relatività Generale di Einstein permette di collegare l’angolo sotto il quale la sorgente sarebbe vista in assenza della massa deflettente, all’angolo che individua la direzione a cui l’immagine appare. Il legame tra questi due angoli definisce l’equazione della lente gravitazionale. Una descrizione

di questo effetto è discussa nell'articolo di De Paolis et al. in questo numero di Ithaca.

Qui illustreremo invece sommariamente come sia possibile estendere questa equazione includendo correzioni quantistiche al processo di deflessione. Gli effetti quantistici diventano significativi per grandi energie dei fasci luminosi deflessi e in prossimità dell'orizzonte degli eventi di un buco nero. Questo potrebbe portare, in futuro, alla possibilità di effettuare misure sensibili alle correzioni quantistiche dei processi gravitazionali. Questi studi rappresentano un formidabile argomento d'indagine teorica, ma anche un terreno nel quale affinare le nostre conoscenze in fatto di gravità quantistica, che sono quasi nulle sul piano fenomenologico.

Le deflessioni misurate, per fotoni che lambiscono la superficie di una stella come il Sole sono molto piccole, dell'ordine di qualche secondo d'arco. Di tutt'altra grandezza sono invece le deflessioni per fasci fotonici che si avvicinano, per esempio, all'orizzonte degli eventi di un buco nero, che sono classificate come fenomeni di *lensing* gravitazionale forte, *strong lensing*. Queste possono raggiungere decine di arcosecondi o, addirittura, qualche grado. Altri aspetti di enorme interesse concernono il *lensing* gravitazionale debole su strutture di grandissima scala. In questo caso le lenti assumono dimensioni galattiche, così come le rispettive sorgenti. Il *lensing* debole viene utilizzato per lo studio delle distribuzioni di materia, ed eventualmente di materia oscura, su scale cosmologiche. Il fattore di scala che governa la dinamica dell'universo, è in questo caso parte integrante delle equazioni, originariamente scritte da Friedmann.

Nella nostra analisi, procederemo dapprima con una descrizione storica dello studio della deflessione gravitazionale per poi illustrare brevemente come sia possibile definire un approccio semi-classico allo stesso fenomeno.

## La deflessione della luce nella teoria della gravitazione di Newton

Nel 1784 il fisico inglese Henry Cavendish pubblicò un manoscritto [2] nel quale presentava la misura della densità della Terra mediante un

esperimento che successivamente prese il suo nome. In questo manoscritto egli accennava anche al problema riguardante la deflessione della luce per mezzo di un corpo massivo nel contesto della gravità newtoniana.

Successivamente, nel 1804, il fisico tedesco Johann Georg von Soldner pubblicò uno scritto [3] nel quale calcolava la deflessione di un raggio luminoso dovuta ad un corpo massivo quale una stella. Facendo riferimento alle teorie della natura corpuscolare della luce, egli svolse il suo calcolo attribuendo una massa alle particelle luminose. Tuttavia questo calcolo differiva da quello esatto di un fattore 2. Albert Einstein nel 1915, a conclusione del suo lavoro sulla teoria della relatività generale, calcolò il valore esatto dell'angolo di deflessione della luce e della sezione d'urto nei pressi del campo gravitazionale solare.

Di seguito illustriamo brevemente il problema della deflessione nel contesto classico non relativistico. Consideriamo il moto di una particella di massa  $m$  in un campo gravitazionale statico ed isotropo generato da un corpo di massa  $M$  posto nell'origine del sistema di coordinate. Il campo ha simmetria sferica, pertanto ogni soluzione delle equazioni del moto deve essere invariante per rotazioni attorno a un asse arbitrario passante per l'origine del campo. Il momento angolare della particella rispetto al centro  $\mathcal{O}$  gravitazionale si conserva, quindi il moto si svolge in un piano ortogonale alla direzione del momento angolare. Utilizzando coordinate polari sferiche  $(r, \theta, \phi)$  la lagrangiana del sistema con simmetria rotazionale è indipendente da  $\theta$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{MmG}{r} \quad (1)$$

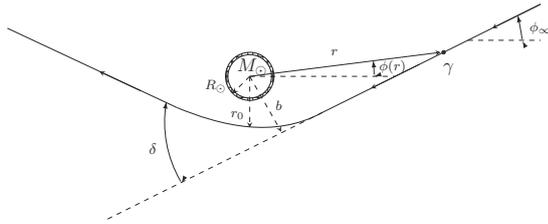
dove l'apice indica la derivata rispetto al tempo. Le equazioni di Eulero-Lagrange indicano che la variabile  $\phi$  è una coordinata ciclica, quindi il momento a lei associato, che è proprio il momento angolare, è una costante del moto. Osserviamo che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo e che l'energia cinetica è una funzione omogenea di secondo grado nelle derivate delle variabili dinamiche, per cui la funzione energia è anch'essa una costante del moto ed è proprio

l'energia totale  $E$  della particella

$$E = \frac{1}{2}mr'^2 + \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{mMG}{r} \quad (2)$$

dove  $l_0$  è il momento angolare della particella con massa  $m$ . Dall'equazione (2), ricordando la notazione  $r' = dr/dt$  otteniamo:

$$dr = dt \left[ \frac{2}{m} \left( E + \frac{mMG}{r} - \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} \right) \right]^{1/2} \quad (3)$$



**Figura 1:** Deflessione della luce dal Sole.

Utilizzando la conservazione del momento angolare e l'Eq. (3) si trova

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{l_0}{mr^2} dt \\ &= \frac{l_0}{mr^2} \left[ \frac{2}{m} \left( E + \frac{mMG}{r} - \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} \right) \right]^{-1/2} dr \quad (4) \end{aligned}$$

e integrando

$$\phi = \arccos \left( \frac{\frac{1}{r} - \frac{m^2MG}{l_0^2}}{\sqrt{\frac{2Em}{l_0^2} + \frac{m^4M^2G^2}{l_0^4}}} \right) \quad (5)$$

dove abbiamo utilizzato l'invarianza traslazionale del sistema imponendo  $\phi_0 = 0$ . Dalla (5) otteniamo

$$r(\phi) = \frac{l_0^2/(m^2MG)}{1 + [2l_0^2E/(m^3M^2G^2) + 1]^{1/2} \cos \phi} \quad (6)$$

Facendo riferimento alla Figura 1 si vede che il valore dell'angolo  $\phi$  che determina gli asintoti della traiettoria e quindi la deflessione del raggio luminoso è data dalla condizione limite per cui il raggio tende all'infinito. Questa condizione è verificata quando il denominatore della (6) è nullo, ossia

$$\phi = \arccos \left[ - \left( \frac{2l_0^2E}{m^3M^2G^2} + 1 \right)^{-1/2} \right] \quad (7)$$

Le relazioni dell'energia e del momento angolare della particella in funzione della sua posizione sono

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}, \quad l_0 = mvr \quad (8)$$

Poiché la posizione della particella varia nel tempo, l'equazione (8) indica che la sua velocità debba variare affinché l'energia e il momento siano costanti. Supponiamo che la particella abbia inizialmente una velocità  $v < 1$  (utilizziamo le unità naturali nelle quali il valore della velocità della luce  $c$  e della costante di Planck  $\hbar$  sono uguali all'unità). La curvatura della traiettoria comporta un'accelerazione della particella, la cui velocità tende, nel punto più vicino alla sorgente gravitazionale  $r = r_0$ , al valore  $v = 1$ . In questa configurazione l'equazione (8) diventa

$$E = \frac{1}{2}m - \frac{mMG}{r_0}, \quad l_0 = mr_0 \quad (9)$$

Inserendo la (9) nella (7), otteniamo

$$\phi = \arccos \left[ - \frac{MG}{r_0} \left( 1 - \frac{MG}{r_0} \right)^{-1} \right] \quad (10)$$

e nel limite di campo debole, quando  $MG/r_0 \ll 1$ , sviluppiamo quest'ultima quantità in serie di potenze

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{MG}{r_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{MG}{r_0} \right)^2 + \dots \quad (11)$$

In accordo con la Figura 1 la deflessione dell'orbita dalla traiettoria iniziale è

$$\delta_{Newtonian} = |2\phi - \pi| \simeq \frac{2MG}{r_0} \quad (12)$$

Assumendo il Sole come sorgente gravitazionale possiamo ricavare il valore dell'angolo di deflessione

$$\delta_{Newtonian} \simeq 0.8755'' \quad (13)$$

noto che la sua massa è  $M = M_\odot = 1.97 \times 10^{33}$  g, quindi  $MG = M_\odot G = 1.475$  km, e il minimo valore di  $r_0$  è  $R_\odot = 6.95 \times 10^5$  km.

## La Gravitazione di Einstein

Consideriamo ora il moto di un fotone in un campo gravitazionale statico e isotropo nel contesto della relatività generale. La corrispondente metrica, soluzione delle equazioni di Einstein, è stata studiata da Schwarzschild nel 1916 [4]. La metrica assume la forma

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (14)$$

dove  $\tau$  rappresenta il tempo proprio, quello misurato da un orologio solidale al sistema di riferimento. Dalla (14) si osserva che la metrica di Schwarzschild possiede una singolarità per  $r = 2MG$ . Il raggio associato a questa singolarità prende il nome di *raggio di Schwarzschild* della massa  $M$ . Questo concetto è strettamente connesso all'esistenza di una regione dello spazio-tempo con un campo gravitazionale così intenso da non lasciar sfuggire nulla dal suo interno verso l'esterno. Nel caso in cui la sua distribuzione di materia sia confinata all'interno di questa regione, si parla di *buco nero*. In altre parole, si può definire il buco nero come un corpo massivo le cui dimensioni siano inferiori al suo raggio di Schwarzschild. La superficie limite associata al raggio di Schwarzschild definisce il cosiddetto *orizzonte degli eventi*. Questa denominazione deriva dal fatto che tutto ciò che avviene ad una distanza inferiore al raggio di Schwarzschild non è visibile ad un osservatore esterno in quanto né la materia né le onde elettromagnetiche, come la luce, riescono a sfuggire al campo gravitazionale generato dal buco nero.

Nello studio della deflessione della luce risulta chiara quindi l'importanza del raggio di Schwarzschild. Se il parametro d'impatto della particella incidente è molto grande rispetto a tale raggio, la deflessione è piccola e vale il limite di campo gravitazionale debole. Viceversa, se il parametro d'impatto è prossimo al raggio di Schwarzschild, la curvatura dello spazio-tempo è considerevole e le equazioni del moto assumono una forma molto più complessa. Nel nostro caso osserviamo che il raggio del Sole è  $10^5$  volte più grande del suo raggio di Schwarzschild,  $R_S(M_\odot) \simeq 2,95$  km. Dal momento che il minimo valore del parametro d'impatto potrà essere prossimo al raggio

solare, allora l'approssimazione di campo debole è valida.

Nell'ambito della teoria della relatività generale, il moto di un fotone nel campo gravitazionale generato da un corpo di massa  $M$  posto al centro delle coordinate è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \quad (15)$$

dove il punto sopra le variabili indica la derivazione rispetto al tempo proprio. Poiché sia  $t$  che  $\phi$  sono coordinate cicliche i loro momenti coniugati sono costanti del moto

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t} \quad (16)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (17)$$

Queste costanti del moto possono essere interpretate fisicamente:  $p_\phi$  è il momento angolare dell'orbita della particella e  $-p_t$  è l'energia della particella misurata da un osservatore posto a distanza infinita dalla sorgente del campo gravitazionale.

Dalla lagrangiana l'equazione del moto per la variabile  $\theta$  è

$$0 = \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \quad (18)$$

Moltiplicando per  $r^2 \dot{\theta}$  e risolvendo l'equazione differenziale a variabili separabili, otteniamo

$$(r^2 \dot{\theta})^2 = -p_\phi^2 \cot^2 \theta \quad (19)$$

Poiché il primo membro è sempre positivo mentre il secondo membro è sempre negativo, ne consegue che debbano essere entrambi nulli. Questa condizione comporta che  $\theta$  sia costante e quindi che l'orbita sia planare. Per comodità, ipotizziamo di trovarci nel piano equatoriale in cui  $\theta = \pi/2$ .

Il fotone, viaggiando alla velocità della luce, ha tempo proprio nullo

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (21)$$

## La sfera fotonica

La sfera fotonica è una regione dello spazio in cui la gravità è così forte che i fotoni sono costretti a viaggiare su orbite circolari. Il raggio della sfera fotonica è il limite inferiore per ogni possibile orbita stabile. Per buchi neri non rotanti il raggio della sfera fotonica è

$$r = \frac{3MG}{c^2} \quad (20)$$

ossia  $3/2$  del raggio di Schwarzschild. Le sfere fotoniche possono esistere nello spazio circostante a oggetti estremamente compatti, come buchi neri o stelle di neutroni. Poiché il raggio della sfera fotonica è maggiore di quello dell'orizzonte degli eventi di un buco nero, i fotoni, viaggiando in prossimità dello stesso, possono sfuggire alla sua attrazione gravitazionale percorrendo una direzione nota come *cono d'uscita* con orbite instabili (Figura 2).

Nel caso di un buco nero rotante si riscontra, inoltre, un fenomeno molto particolare. A causa della rotazione si formano due sfere fotoniche: quella più vicina al buco nero si muove nello stesso verso di rotazione, mentre quella più lontana si muove in verso contrario. Maggiore è la velocità angolare di rotazione, maggiore è la distanza fra le due sfere di fotoni.

che implica per le quadrivelocità  $u^\mu$  la relazione

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0 \quad (22)$$

dove abbiamo indicato con  $g_{\mu\nu}$  il tensore metrico. Dalle due equazioni precedenti, utilizzando  $\theta = \pi/2$ , otteniamo

$$p_t^2 - \dot{r}^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) = 0 \quad (23)$$

da cui segue

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = \frac{E^2}{2} \quad (24)$$

con

$$V(r) = \frac{p_\phi^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \quad (25)$$

$$E = p_t, \quad p_\phi = r^2 \dot{\phi} \quad (26)$$

Combinando la (26) con la (24) otteniamo il valore dell'angolo di deflessione

$$\delta_{Rel} = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{p_\phi}{r^2 \sqrt{E^2 - 2V(r)}} dr - \pi \quad (27)$$

Ricaviamo il valore dell'energia  $E$  nel punto dell'orbita più vicino alla sorgente,  $r_0$ . Sostituendo

do questo risultato nell'integrale otteniamo

$$\delta_{Rel} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) - \alpha(1-x^3)}} - \pi \quad (28)$$

Sviluppando l'espressione (28) per  $\alpha = 2MG/r_0 \ll 1$ , limite di campo debole, otteniamo il risultato per l'angolo di deflessione

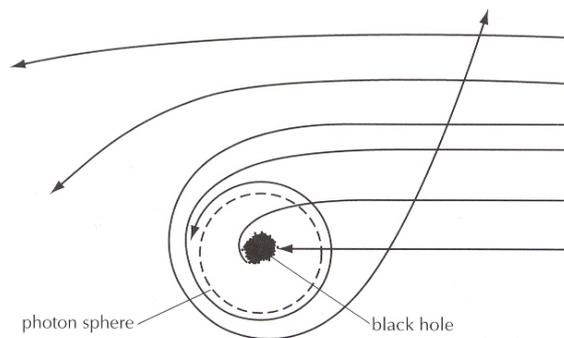
$$\begin{aligned} \delta_{Rel} &= 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} (-2) + \dots \right] - \pi \\ &\simeq 2\alpha = \frac{4MG}{r_0} \end{aligned} \quad (29)$$

Inserendo nell'espressione precedente i valori della massa e del raggio solari si ricava

$$\delta_{Rel} = \frac{4MG_\odot}{R_\odot} = 8.489 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1.75'' \quad (30)$$

Qualsiasi risultato proveniente dalla relatività generale porta con sé un problema fondamentale che riguarda la scelta dei sistemi di riferimento. Ci chiediamo quindi se l'angolo di deflessione  $\delta$  abbia realmente a che fare con le posizioni delle immagini stellari osservate nei laboratori e se sia indipendente dalla scelta del sistema di coordinate. La risposta è semplice in quanto abbiamo a che fare con un'esperimento di diffusione: il raggio luminoso, proveniente da una distanza molto grande, viene deflesso in prossimità del Sole; successivamente viene rilevato sulla Terra ad

una distanza dal Sole di 200 volte il raggio solare. Nei punti di origine del fascio e di rilevazione, la metrica è sostanzialmente Minkowskiana e  $\delta$  rappresenta l'angolo azimutale in un sistema di coordinate nel quale i raggi luminosi definiscono linee che sono essenzialmente rette. Quindi le posizioni delle immagini stellari osservate sono legate al valore di  $\delta$  mediante le equazioni dell'ottica geometrica.



**Figura 2:** Sfera fotonica di un buco nero.

Un altro aspetto di cui tener conto riguarda il comportamento del fotone come una particella a cui si associa una lunghezza d'onda. L'enorme differenza tra le dimensioni della lunghezza d'onda della luce visibile e quelle del campo gravitazionale del Sole, un fattore  $10^{15}$ , permette di descrivere il quanto di luce come una particella che si muove su una precisa traiettoria.

L'angolo di deflessione  $\delta$  è misurato confrontando le posizioni apparenti delle stelle che sono prossime al disco solare, valutate durante un'eclisse, con le loro posizioni misurate sei mesi prima, quando queste stelle si trovano dalla parte opposta rispetto alla Terra, e la loro luce non passa vicino al Sole. L'angolo di deflessione  $\delta$  è la differenza tra queste due posizioni.

La prima misura di  $\delta$  fu effettuata nel 1919. Un gruppo di astronomi si recò in due isole, Sobral (Brasile) e Principe (Golfo di Guinea), per studiare l'eclissi totale di Sole che si verificò in quell'anno. Furono esaminate le posizioni di dozzine di stelle e i risultati sperimentali fornirono valori dell'angolo di deflessione pari a  $(1.98 \pm 0.12)''$  e  $(1.61 \pm 0.31)''$ , in accordo con la previsione teorica di Einstein [5]. Questo risultato pose la relatività generale al centro del dibattito scientifico dell'epoca.

Dal 1919 ad oggi sono state effettuate diverse misure di  $\delta$  e una delle più recenti è quella di

Lebach et al. [6] che differisce dalla previsione di Einstein di circa  $10^{-5}$  arcsec. L'accuratezza della misura può essere migliorata utilizzando le tecniche fotoelettriche per monitorare le posizioni delle stelle senza dover attendere un'eclissi. Lo sviluppo scientifico nella radio astronomia ha reso possibile la misura della deflessione dei radiosegnali dal Sole con un'accuratezza potenzialmente più grande rispetto a quella in ottica astronomica. Una complicazione derivante da questo metodo è la rifrazione dei raggi nella corona solare. Varie collaborazioni sperimentali hanno presentato diverse proposte per migliorare queste misure, fino ad una precisione di un millesimo di arcosecondo. Tale precisione è ottenuta mediante tecniche di interferometria su base molto larga (Very Large Baseline Interferometry, VLBI), ma è limitata allo studio di fasci in frequenze radio.

## La sezione d'urto quantistica

L'analisi svolta finora è classica, nel senso che non si tiene conto della natura quantistica del fotone. Nel contesto della teoria dei campi il fotone interagisce con diverse altre particelle, come per esempio in QED con gli elettroni. Queste interazioni possono contribuire a modificare macroscopicamente il comportamento classico del fenomeno fisico. Per questo siamo interessati a considerare la deflessione a livello quantistico.

La moderna descrizione dei fenomeni quantistici è basata su teorie di campo, nelle quali le entità fondamentali sono i campi definiti in ogni punto dello spazio-tempo. Le particelle nascono come eccitazioni di questi campi, e interagiscono tra loro scambiandosi particelle che trasmettono il tipo di interazione, fotoni per l'interazione elettromagnetica,  $W^\pm$  e  $Z^0$  per l'interazione debole, gluoni per l'interazione forte. Molto spesso, però, le interazioni tra le particelle sono così complesse da non permettere una risoluzione esatta delle equazioni che regolano i processi fisici. Nasce la necessità di sviluppare delle tecniche di calcolo che permettano di descriverli con buona approssimazione. Una di queste tecniche è l'approccio perturbativo in cui si considera il potenziale d'interazione come una piccola perturbazione dell'hamiltoniana libera. Le osservabili fisiche si scrivono allora in termini di uno svilup-

po in serie formale in un parametro piccolo, che quantifica la deviazione dal problema “libero”. Questo approccio prende il nome di sviluppo perturbativo.

Attualmente l’unica forza fondamentale non descritta da una teoria quantistica completa è la forza gravitazionale. Molte teorie proposte per descrivere la gravità come una teoria di campo postulano l’esistenza di una particella mediatrice della forza gravitazionale chiamata gravitone. Tuttavia l’esistenza di questa particella non è ancora stata sperimentalmente verificata.

Il campo gravitazionale entra nella trattazione sottoforma di campo esterno, trattato classicamente, e la teoria cui ci si riferisce prende il nome di teoria perturbativa quantistica in uno spazio-tempo curvo. Il termine quantistico si riferisce alla presenza dei campi che rappresentano le altre particelle che tipicamente sono prese in considerazione. Il termine perturbativo si riferisce al fatto che l’effetto della gravitazione è introdotto come una piccola perturbazione dello spazio-tempo di Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

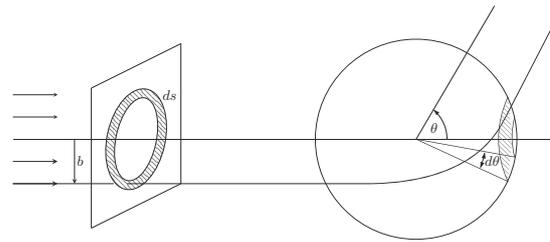
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad (31)$$

dove  $\kappa$  è il parametro d’ordine dello sviluppo e  $h_{\mu\nu}$  rappresenta la perturbazione della metrica.

Il punto di partenza per descrivere una qualunque teoria di campo consiste nella definizione della lagrangiana, che contiene i termini cinetici associati alle particelle coinvolte, quelli di interazione tra le stesse e diversi parametri, le masse e le costanti di accoppiamento alle forze in gioco. Nel nostro caso la lagrangiana comprende i termini che rappresentano le particelle del Modello Standard, la teoria che descrive le particelle elementari ad oggi note e le interazioni elettromagnetica, debole e forte, immerse in un campo gravitazionale esterno. Il termine di interazione che viene introdotto descrive l’accoppiamento della materia alla gravità.

Un aspetto importante del Modello Standard riguarda la rinormalizzabilità della teoria. Nel calcolo dei diagrammi che descrivono i processi tra le particelle si ottengono dei termini che presentano divergenze e che rendono la teoria divergente. Tuttavia essa presenta delle caratteristiche per cui è possibile rinormalizzarla, mediante

una procedura che prevede l’introduzione di parametri regolatori. Esistono diverse procedure di rinormalizzazione delle teorie di campo, ognuna delle quali prevede la necessità di ridefinire le grandezze che entrano nella lagrangiana. Le masse, le costanti di accoppiamento e eventualmente i campi che descrivono le particelle sono ridefiniti inglobando i parametri regolatori. In questo modo si ottiene una lagrangiana rinormalizzata con la quale si eliminano le suddette divergenze. La procedura di rinormalizzazione è volta, quindi, a rendere la teoria non divergente.



**Figura 3:** Urto da un centro diffusore in termini del parametro d’impatto  $b$ .

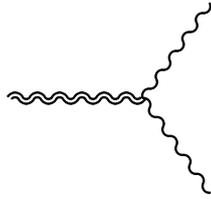
L’introduzione della gravità, anche se introdotta nella teoria come un campo esterno, non solo complica l’analisi dei processi coinvolti, ma compromette la rinormalizzabilità della teoria estesa ad uno spazio-tempo curvo. Nonostante questo aspetto è possibile individuare alcune classi di grandezze osservabili, tra le quali quelle che intervengono nell’analisi della deflessione, che risultano rinormalizzabili [13].

Nella Figura 3 è rappresentato un tipico processo di diffusione classica che, nello scenario considerato, consiste nella diffusione per mezzo del campo gravitazionale. Le due aree infinitesime ombreggiate a sinistra e a destra del centro diffusore devono essere uguali per via della condizione di conservazione del flusso di particelle.

Dalla teoria della diffusione si ottiene una relazione tra il parametro d’impatto del fotone  $b$  e la sezione d’urto

$$\frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (32)$$

dove  $\theta$  è l’angolo di diffusione e  $d\sigma/d\Omega$  è la sezione d’urto, che tiene conto del numero di particelle che vengono diffuse nell’angolo solido infinitesimale  $d\Omega$ .



**Figura 4:** Il vertice d'interazione all'ordine principale dello sviluppo perturbativo tra un gravitone e due fotoni.

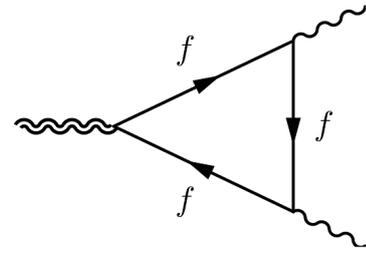
tesimo  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ . Il parametro d'impatto misura la distanza del fotone dal centro diffusore gravitazionale quando il fotone è molto distante dalla regione di diffusione. Dall'espressione (32) si ottiene una relazione che lega il parametro d'impatto  $b$  all'angolo  $\theta$ , in cui si inserisce la sezione d'urto quantistica. In questo senso si parla di approccio semi-classico: introduciamo una quantità quantistica nella descrizione classica della teoria della diffusione, come discusso in [7].

Il calcolo della sezione d'urto costituisce la parte più critica della trattazione, perché sono coinvolti svariati processi che comprendono le interazioni tra il gravitone e le particelle del Modello Standard. Con gli strumenti delle teorie di campo, è possibile calcolare le sezioni d'urto associate ai processi contemplati dalla teoria considerata e rappresentati dai diagrammi di Feynman.

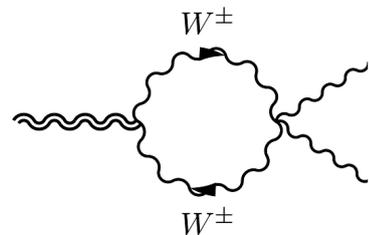
La Figura 4 rappresenta il termine principale nello sviluppo perturbativo. Il gravitone, rappresentato dalla doppia linea ondulata, interagisce direttamente con due fotoni, rappresentati dalla linea ondulata. La sezione d'urto differenziale corrispondente è

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} = (GM)^2 \cot^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (33)$$

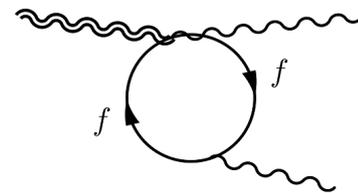
Quello appena considerato non è il solo diagramma che coinvolge un singolo gravitone, ma, al primo ordine perturbativo, occorre considerare altri diagrammi di Feynman che descrivono i processi d'interazione che coinvolgono tutte le particelle del Modello Standard. Alcuni di questi processi sono illustrati nella Figura 5. Le linee interne rappresentano alcune delle particelle del Modello Standard che interagiscono con i fotoni



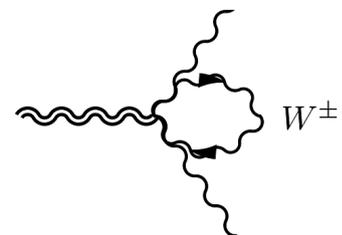
(a)



(b)



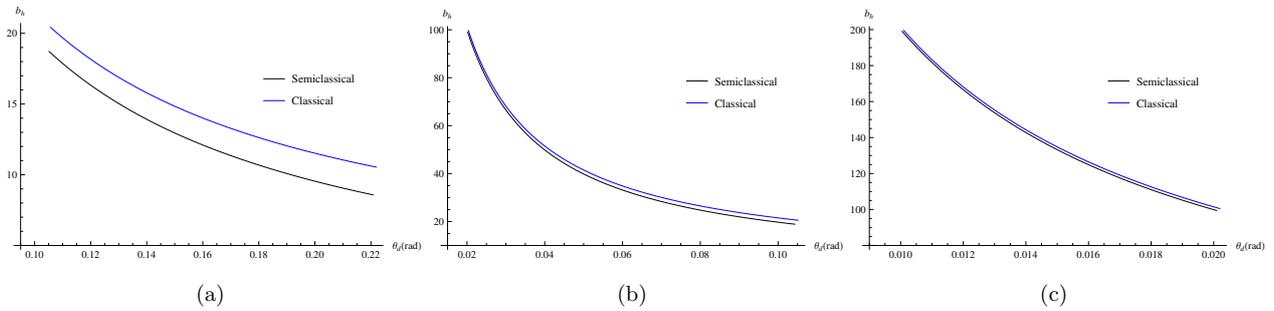
(c)



(d)

**Figura 5:** Sviluppo perturbativo al primo ordine dell'interazione di un gravitone con due fotoni.

e con il gravitone. In Figura 5 le linee semplici orientate con una freccia e etichettate con  $f$  si riferiscono genericamente ai fermioni della teoria, come gli elettroni, mentre con le linee ondulate orientate si indicano i bosoni vettori massivi carichi  $W^\pm$ , che mediano l'interazione debole. Sottolineiamo che negli esempi riportati, così come per tutti gli altri diagrammi che si possono definire, il gravitone compare sempre solo come



**Figura 6:** Parametro d'impatto  $b_h$  in unità di raggi di Schwarzschild in funzione dell'angolo di diffusione  $\theta_d$ . Le linee blu indicano il risultato classico, mentre quelle nere includono le correzioni quantistiche nel nostro approccio semiclassico. (a) è la regione vicina, (b) è quella intermedia e (c) quella lontana. La differenza tra la soluzione classica e quella semiclassica diventa significativa per parametri d'impatto inferiori a 20 volte il raggio di Schwarzschild, molto prossimi alla superficie dell'orizzonte di un buco nero (a).

una linea esterna, perché nella nostra trattazione il campo gravitazionale è appunto esterno.

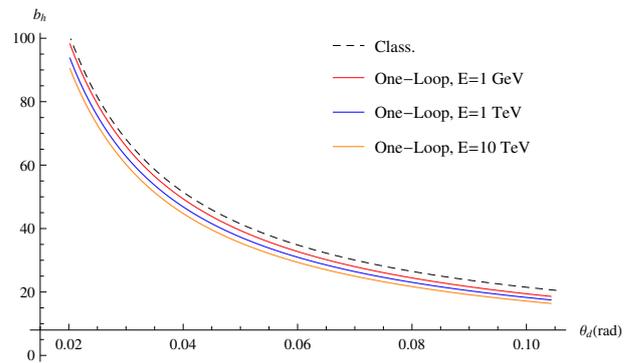
Ognuno di questi diagrammi contribuisce alla sezione d'urto totale che descrive il processo di diffusione del fotone sul campo gravitazionale. Con gli strumenti delle teorie di campo è possibile calcolare i vari contributi, quindi sommarli per produrre il risultato completo. Possiamo esprimere la sezione d'urto al primo ordine perturbativo [10, 11, 12, 13] nella forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (GM)^2 \cot^4 \frac{\theta}{2} (1 + \alpha \varphi(E, \theta)) \quad (34)$$

dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine e  $\varphi(E, \theta)$  è la correzione derivante dai contributi quantistici e funzione dell'energia del fotone e dell'angolo di deflessione [13]. Sottolineiamo che la differenza più importante con il risultato all'ordine principale (33) consiste nella dipendenza dall'energia del fotone. Questo comporta che fasci di fotoni di differente energia subiscono deflessioni diverse.

Inserendo la sezione d'urto nella (32) si ottiene l'espressione  $b(\theta)$ , che collega il parametro d'impatto alla deflessione angolare [7]. Nel limite di piccole deflessioni ( $\theta$  piccolo) la suddetta relazione è in accordo con i risultati previsti dalla relatività generale. Per angoli di deflessione generici identifichiamo tre regioni nello spazio dipendenti dal valore che assume il parametro d'impatto: una vicina, una intermedia e una lontana dalla sfera fotonica.

In Figura 6 si riporta il confronto qualitativo tra l'approccio classico e quello semi-classico all'ordine perturbativo principale (33). È piuttosto chiaro che i due approcci prevedono deflessioni



**Figura 7:** Confronto tra la soluzione classica e semiclassica al primo ordine perturbativo per tre diversi valori dell'energia del fotone.

simili per le regioni intermedia e lontana, con differenze che diventano rilevanti solo quando il parametro d'impatto è molto vicino all'orizzonte del buco nero e quindi in una situazione di deflessione molto forte. Questo avvalorava la trattazione semi-classica non solo per piccole deflessioni, ma anche per la regione intermedia.

In Figura 7 si confronta il risultato classico con quelli derivanti dall'analisi quantistica al primo ordine perturbativo (34) per diversi valori dell'energia del fotone nella regione intermedia. All'aumentare dell'energia la correzione diventa sempre più rilevante e il fascio risente meno dell'influenza gravitazionale: a parità di parametro d'impatto l'angolo di deflessione si riduce.

## Conclusioni e Sviluppi Futuri

Il fenomeno della deflessione gravitazionale della luce costituisce una delle prove più evidenti della relatività generale di Einstein e merita,

quindi, di essere analizzato sotto ogni suo aspetto. Lo studio degli effetti della meccanica quantistica sulla deflessione dei fotoni, benché sia ancora un filone di ricerca recente e per lo più inesplorato, ricopre senza alcun dubbio un ruolo molto importante per una futura comprensione di una teoria quantistica unificata della gravità e delle interazioni subatomiche. Oltre all'aspetto puramente teorico, tali analisi risultano interessanti anche da un punto di vista più fenomenologico. Infatti l'enorme interesse della comunità scientifica, rivolto allo studio dei fenomeni dell'Universo, potrebbe portare, in tempi molto brevi, ad affinare le odierne tecniche di misura sperimentali per poter raggiungere una sensibilità tale da apprezzare gli effetti quantistici. Un'eventuale osservazione di tali correzioni rappresenterebbe un enorme successo in campo astrofisico.

È chiara, quindi, la necessità di un'analisi teorica mirata ad individuare quelle regioni cinematiche e quelle configurazioni fisiche in cui gli effetti quantistici diventano importanti. Dalla breve discussione presentata nelle sezioni precedenti appare chiaro che le correzioni quantistiche elettromagnetiche ed elettrodeboli sulla deflessione della luce risultano significative per fotoni di alta energia o in regime di *strong lensing*. Inoltre, in quest'ultimo caso, se la lente è un buco nero, la deflessione dei fasci luminosi, avvicinandosi all'orizzonte degli eventi dello stesso, porterebbe preziose informazioni sulle singolarità della metrica di Schwarzschild.

Non meno importante è l'effetto di natura puramente quantistica, non previsto dalla relatività di Einstein, noto come *arcobaleno gravitazionale*. Esso descrive una dipendenza dell'angolo di deflessione dall'energia, ossia una dispersione angolare di un fascio luminoso costituito da fotoni di diversa lunghezza d'onda. L'impatto degli effetti quantistici sulla deflessione gravitazionale della luce è stato studiato quantitativamente utilizzando un approccio semi-classico al fenomeno fisico. Alcuni dei risultati ottenuti sono stati brevemente presentati in questo articolo e sono frutto di un'analisi critica del problema. In particolare abbiamo verificato la consistenza dell'approccio semi-classico mediante il confronto tra i risultati della relatività generale e quelli quantistici all'ordine principale dello sviluppo perturbativo. Il contesto in cui sono sviluppati i

due approcci è quello dell'approssimazione di campo debole che, come abbiamo visto, è valida fino a regioni prossime all'orizzonte degli eventi della lente. L'accordo dei risultati si ottiene non solo in regioni molto lontane, ma anche in regioni intermedie. Questo ci permette di estendere l'analisi quantistica all'ordine perturbativo successivo nelle suddette regioni. Abbiamo mostrato che le correzioni quantistiche della sezione d'urto al primo ordine perturbativo sono considerevoli e diventano significative all'aumentare dell'energia.

Sono possibili varie e interessanti estensioni dello studio che abbiamo brevemente descritto. Ad esempio, per migliorare l'accordo tra i due approcci spingendosi fino alla sfera fotonica della lente, si può usare lo sviluppo post-newtoniano della metrica gravitazionale. Un altro ambito di ricerca riguarda lo studio della deflessione di altri tipi di particelle, come i neutrini.

Il fenomeno della deflessione gravitazionale può, inoltre, essere utilizzato per studiare distribuzioni di materia oscura o di buchi neri nell'Universo. In questo articolo abbiamo presentato le caratteristiche di una distribuzione di materia statica e isotropa, per cui lo spazio-tempo circostante è descritto dalla metrica di Schwarzschild, ma si possono analizzare altri tipi di distribuzioni, come sorgenti rotanti e/o cariche.



- [1] A. EINSTEIN: "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie", *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **142** (1917) 142–152.
- [2] H. CAVENDISH: "Three Papers Containing Experiments on Factitious Air, by the Hon. Henry Cavendish", *Philosophical Transactions (1683-1775)* **56** (1766) 141-184.
- [3] J. G. VON SOLDNER: "Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung", *Annalen der Physik* **65** (1801) 593–604.
- [4] KARL SCHWARZSCHILD: "On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory", *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse* **1916** (1916) 424-434.
- [5] F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON AND C. DAVIDSON: "Deflection of light by sun's gravitational field. Total eclipse of May 29, 1919", *Phil. Trans. Roy. Soc. of London ser. A* **220** (1920) 291–333.
- [6] D. E. LEBACH, B. E. COREY, I. I. SHAPIRO, M. I. RATNER, J. C. WEBBER, A. E. E. ROGERS, J. L. DAVIS AND T. A.

- HERRING: "Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry", *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1439-1442.
- [7] C. CORIANÒ, L. DELLE ROSE, M. M. MAGLIO AND M. SERINO: "Electroweak Corrections to Photon Scattering, Polarization and Lensing in a Gravitational Background and the Near Horizon Limit", *J. of High Energy Physics* **1501** (2014) 1–39.
- [8] F. A. BERENDS AND R. GASTMANS: "Quantum Electrodynamical Corrections to Graviton-Matter Vertices", *Annals of Physics* **98** (1976) 225–236.
- [9] G. DEGRASSI, E. GABRIELLI, AND L. TRENTADUE: "Flavor Changing Fermion-Graviton Vertices", *Phys.Rev. D* **79** (2009) 053004.
- [10] C. CORIANÒ, L. DELLE ROSE, E. GABRIELLI, AND L. TRENTADUE: "Fermion Scattering in a Gravitational Background: Electroweak Corrections and Flavour Transitions", *J. of High Energy Physics* **1403** (2014) 1–37.
- [11] C. CORIANÒ, L. DELLE ROSE, E. GABRIELLI, AND L. TRENTADUE: "One loop Standard Model corrections to flavor diagonal fermion-graviton vertices", *Phys. Rev. D* **87** (2013) 054020.
- [12] C. CORIANÒ, L. DELLE ROSE, E. GABRIELLI, AND L. TRENTADUE: "Mass Corrections to Flavor-Changing Fermion-Graviton Vertices in the Standard Model", *Phys. Rev. D* **88** (2013) 085008.
- [13] C. CORIANÒ, L. DELLE ROSE, AND M. SERINO: "Gravity and the Neutral Currents: Effective Interactions from the Trace Anomaly", *Phys. Rev. D* **83** (2011) 125028.
- [14] R. DELBOURGO AND P. PHOCAS-COSMETATOS: "Radiative corrections to the photon graviton vertex", *Phys.Lett. B* **41** (1972) 533–535.
- [15] E. GOLOWICH, P. GRIBOSKY, AND P. PAL: "Gravitational scattering of quantum particles", *American Journal of Physics* **58** (1990) 688–691.
- [16] A. ACCIOLY AND R. PASZKO: "Photon mass and gravitational deflection", *Phys.Rev.D* **69** (2004) 107501.

---

∞ + ∞

**Claudio Corianò:** si è laureato in Fisica presso l'Università di Torino ed ha ricevuto il Master of Arts ed il Ph.D. in Fisica dalla State University di New York a Stony Brook (1992). Dal 1992 al 1999 ha svolto ricerca post-dottorale presso l'Università di Stoccolma, l'Argonne National Laboratory, l'Università della Florida a Gainesville ed il Thomas Jefferson Laboratory in Virginia. È attualmente Professore associato in fisica teorica delle interazioni fondamentali presso l'Università del Salento.

**Luigi Delle Rose:** si è laureato in Fisica nel 2009 ed ha conseguito il dottorato di ricerca nel 2012, entrambi presso l'Università del Salento, dove svolge attualmente attività di ricerca post-dottorale in fisica delle interazioni fondamentali, teoria dei campi ed astrofisica particellare.

**Marta Dell'Atti, Matteo Maria Maglio:** sono studenti del corso di laurea specialistica in fisica presso il Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento. I loro interessi scientifici sono indirizzati presso la fisica delle interazioni fondamentali, la teoria dei campi e la cosmologia.

