
Bosoni, Fermioni e ...

Luigi Martina

Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento

La nozione di spin è basilare per comprendere il mondo che ci circonda. Essa emerge in maniera naturale dalle proprietà di simmetria che modellano le teorie fisiche. Tuttavia una certa classe di fenomeni sembra aggirare le loro costrizioni. Solo un'attenta analisi delle condizioni geometriche e della loro realizzazione fisica spiega come cambiare le regole del gioco.

Spin

L'avvento della Meccanica Quantistica (MQ) negli anni '20-'30 del secolo scorso introdusse il concetto di quantizzazione del momento angolare a partire da principi primi molto generali, non più in maniera euristica come aveva fatto Bohr. Come si ricorderà tale impostazione derivava dalla necessità di interpretare i dati della spettroscopia atomica [1]. Dallo studio dell'equazione di Schrödinger per la particella libera nello spazio tridimensionale, oppure per problemi a potenziali centrali, derivava in maniera diretta che lo spettro del momento angolare quadro dovesse essere della forma $\ell(\ell + 1)\hbar^2$, con $\ell \in \mathbb{N}_0$, ovvero ℓ è un intero positivo o nullo. Inoltre la sua terza componente deve assumere solo valori pari ad $m\hbar$, con $-\ell \leq m \leq \ell$, dove si è utilizzata la costante di Planck ridotta $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ J sec}$ (esistono numerose trattazioni sull'argomento, a titolo indicativo si fa riferimento all'opera [2]).

Un passo ulteriore venne compiuto postulando, da un punto di vista fenomenologico, che l'elettrone può essere dotato di momento angolare

intrinseco (lo *spin*) semi-intero (sempre in unità di \hbar), il quale non poteva evidentemente essere interpretato come un momento angolare orbitale. Esso fu introdotto da G. Uhlenbeck e S. Goudsmit [3], partendo dalla struttura fine delle righe spettrali, dall'effetto Zeeman anomalo e dal celebre esperimento dei fasci atomici di Stern e Gerlach [4]. Ma ben presto si riconobbe l'esistenza di altre particelle di momento angolare intrinseco semi-intero [5], ma anche di spin intero. Una per tutte si ricordi il *fotone*, cioè il quanto del campo elettromagnetico, oppure l'atomo (o il nucleo) di ${}^4\text{He}$. Infine si collegò il comportamento di particelle identiche di spin intero/semi-intero alle proprietà statistiche di loro insiemi, con l'introduzione delle categorie dei *bosoni* (spin intero) e dei *fermioni* (spin semi-intero). Questi ultimi non possono coesistere nello stesso stato quantico (il celebre *principio di esclusione* di Pauli [5]), dando in tal modo una interpretazione di molti spettacolari fenomeni naturali, quali la stabilità della configurazione elettronica degli elementi atomici, che si esprime nelle loro proprietà chimiche, o il comportamento dei metalli e dei semi-conduttori, alla base di ogni tecnologia sviluppata dall'uomo.

In seguito [6] il principio di esclusione divenne un teorema nell'ambito della più generale Teoria Quantistica dei Campi [7]. Poiché questa teoria possiede intrinsecamente la capacità di descrivere stati con un numero arbitrario di particelle, la corrispondenza tra spin e statistica costituisce uno dei suoi maggiori successi e, in ultima analisi, dà una ragione della stabilità della materia.

In questa sede passeremo in rassegna alcuni

degli argomenti che legano la fenomenologia dello spin delle particelle, e di insiemi di esse, alle idee fondamentali di spazio e tempo (in particolare in ambito non relativistico). Esplorando geometrie meno convenzionali si possono ottenere risultati sorprendenti, nuovi concetti che sono attualmente sottoposti a verifica sperimentale. Faremo un breve resoconto di questi aspetti.

La dittatura della Geometria

L'esame delle proprietà di un certo sistema fisico S può essere affrontata, in primo luogo, chiedendosi in che modo due osservatori distinti (nel senso che sono solidali a due diversi sistemi di riferimento) possono confrontare le loro misure su di esso. La questione è fondamentale, poiché fa riferimento all'oggettività della descrizione dei fenomeni fisici. La risposta consiste nel ritenere due osservatori equivalenti, se esiste una corrispondenza biunivoca tra tutti i rispettivi osservabili su S , i possibili valori delle loro misure, nonché l'uguaglianza delle corrispondenti distribuzioni di probabilità. Se una tale corrispondenza esiste essa è detta *trasformazione di simmetria* per il sistema fisico. Questa idea è generalizzabile ad altri tipi di trasformazioni non strettamente geometriche (con linguaggio gergale i fisici parlano in questo caso di trasformazioni di *gauge*).

Quali siano le trasformazioni geometriche ammissibili può essere una questione estremamente delicata, dipendente dall'ambito di validità che vogliamo assegnare al nostro modello di Fisica. Tuttavia, una sterminata mole di esperienze ci dice che, idealmente lontani da masse e da campi di forze di ogni tipo, le traslazioni spaziali e temporali, le rotazioni e le trasformazioni tra sistemi di riferimento in moto relativo uniforme costituiscono le simmetrie per il sistema formato da una particella, libera appunto. Nel caso della Relatività Speciale le trasformazioni tra sistemi in moto uniforme sono dettate da quelle di Lorentz proprie, piuttosto che da quelle di Galilei in Meccanica Classica. In Relatività Generale, infine, dovremo considerare l'insieme molto più ampio dei diffeomorfismi dello spazio-tempo. La scelta *a priori* delle trasformazioni spazio-temporali determina il tipo di Fisica che potremo sviluppare [8]. È familiare che: 1) ognuna delle trasfor-

mazioni menzionate in precedenza dipende con continuità e differenziabilmente da un certo numero di parametri (ad esempio: 3 parametri per le traslazioni, 3 per le rotazioni, 3 per le traslazioni dipendenti dal tempo ed 1 per le traslazioni temporali); 2) l'applicazione consecutiva di due di tali trasformazioni ne produce una nuova, i cui parametri sono funzioni differenziabili dei parametri delle trasformazioni componenti; 3) tale composizione è associativa, 4) esiste la trasformazione identica, 5) per ogni trasformazione si può trovare la sua inversa. In sintesi esse formano un gruppo di Lie (dal nome del matematico norvegese che studiò la classe dei gruppi di trasformazioni continue). Nel caso di un sistema relativistico il gruppo è detto di Poincaré, di Galilei nella cinematica non relativistica. Una rotazione agisce sulle coordinate dello spazio come una matrice ortogonale di determinante 1, che denotiamo con $R_{\hat{n}}(\theta)$, per indicare che è definita con continuità da un asse di versore \hat{n} , passante per l'origine del sistema di riferimento 0 e da un'ampiezza angolare θ . Le rotazioni costituiscono un esempio di sottogruppo (denotato con $SO(3)$) dei più ampi gruppi di Poincaré o di Galilei.

A rigore la Fisica è fortemente determinata dall'esistenza di gruppi di trasformazioni discrete, quali l'inversione temporale e l'inversione spaziale rispetto ad un polo, che non discuteremo in questa sede.

Ora ricordiamo per sommi capi che la MQ descrive un sistema fisico S in termini di vettori di stato (indicati con Ψ), l'insieme dei quali possiede la struttura di uno spazio vettoriale (di Hilbert) \mathcal{H} sui numeri complessi \mathbb{C} . In tal modo le combinazioni lineari di più vettori di stato sono dei nuovi stati. Da ogni stato Ψ è possibile estrarre tutte, e soltanto, le distribuzioni di probabilità circa gli esiti delle misure di un qualsivoglia osservabile O su S . Gli osservabili sono operatori lineari auto-aggiunti di $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Dette probabilità sono proporzionali al modulo quadro del prodotto scalare (definito in \mathcal{H}) dello stato Ψ con i possibili auto-stati dell'osservabile O in questione [2]. Affinché tali distribuzioni di probabilità rimangano le stesse a seguito di una trasformazione di simmetria, la corrispondenza invertibile degli stati $\Psi \rightarrow \Psi'$ e degli osservabili $O \rightarrow O'$ deve essere tale da mantenere invariati

i moduli quadri dei prodotti scalari tra gli stati. Questo equivale ad affermare che ad ogni trasformazione geometrica continua corrisponde un operatore unitario su \mathcal{H} , che realizza quanto sopra.

Esemplificando nel caso delle rotazioni, si avrà la corrispondenza $R_{\hat{n}}(\theta) \rightarrow \mathcal{U}_{\hat{n}}(\theta)$, tale che in ogni punto dello spazio il nuovo stato Ψ' , nel sistema di coordinate ruotato $\vec{r}' = R_{\hat{n}}(\theta) \vec{r}$, sarà dato dalla relazione

$$\Psi'(\vec{r}') = \mathcal{U}_{\hat{n}}(\theta) \Psi(\vec{r}) = D_{\hat{n}}(\theta) \Psi\left(R_{\hat{n}}(\theta)^{-1} \vec{r}\right),$$

con $D_{\hat{n}}(\theta)$ una matrice unitaria di dimensione finita. Nel caso particolare in cui Ψ assuma valori in \mathbb{C} (caso *scalare*), esso viene semplicemente moltiplicata per un fattore di fase globale.

Tecnicamente è molto più conveniente introdurre la nozione di generatori infinitesimi delle rotazioni, i quali costituiscono il piano tangente al gruppo nell'identità. Questo è uno spazio lineare, dotato di un prodotto di commutazione interno antisimmetrico (indicato con $[a, b]$), che gode dell'identità di Jacobi $[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0$ per tutti gli elementi a, b, c dell'insieme. Una tale struttura è un'algebra di Lie. Nel caso in considerazione essa coincide con quella del gruppo delle matrici unitarie 2×2 e possiede tre generatori di base, indicati qui con J_i , $i = 1, 2, 3$. Ogni elemento del gruppo è ottenuto *esponenziando* una generica combinazione lineare a coefficienti reali degli elementi J_i . Il significato fisico delle J_i è quello di componenti del momento angolare [2] [8]. Per un sistema costituito da una particella puntiforme con gradi di libertà interni si adotta come *sistema irriducibile di osservabili* quello degli operatori di posizione \vec{Q} , del momento \vec{P} e dello *Spin* \vec{S} . L'analisi delle relazioni di commutazione tra tutti i generatori delle trasformazioni geometriche condurrà alla decomposizione del momento angolare in parte orbitale e di spin

$$\vec{J} = \vec{Q} \times \vec{P} + \vec{S}.$$

Il lettore interessato può reperire trattazioni dettagliate di questa, e altre questioni collegate, nell'imponente letteratura, per esempio [9] e [10] sull'argomento, o in forma semplificata in tutti i manuali di MQ [2]. In sintesi, usando solo le proprietà algebriche del momento angolare, è possi-

Algebra del Momento Angolare

Le componenti del momento angolare J_i con $i = 1, 2, 3$ sono i generatori infinitesimi delle rotazioni. Essi costituiscono una base per uno spazio vettoriale reale 3-dimensionale, dotato di un prodotto interno di commutazione definito dalla relazione

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k,$$

dove ϵ_{ijk} assume il valore 1 o -1 a seconda che i, j, k siano in una permutazione pari o dispari $(1, 2, 3)$, altrimenti 0. Metodi algebrici consentono di determinare tutte le proprietà del momento angolare e delle rotazioni a partire dalla precedente relazione.

bile affermare che ogni rappresentazione (irriducibile) è determinata dagli autovalori $j(j+1)\hbar^2$ del momento angolare quadro \vec{J}^2 , con $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$, cioè un naturale o un semi-intero positivo. Esso fissa la dimensione dello spazio di rappresentazione a $2j+1$. Esiste inoltre un unico generatore diagonale, che ha autovalori $-j\hbar \leq m\hbar \leq j\hbar$. Infine, per le rotazioni finite corrispondenti alla rappresentazione di momento j , vale la notevole proprietà $\mathcal{U}_{\hat{n}}^{(j)}(2\pi) = (-1)^{2j}$. Essa separa gli stati di momento angolare intero da quelli di momento semi-intero, senza che alcuna combinazione di elementi tra questi due sottospazi sia possibile. Con una tale *regola di super-selezione* si esclude l'interferenza tra stati di spin intero e stati spin semi-intero per un singolo sistema. Infine, per i sistemi costituiti da due sottosistemi, il prodotto (tensoriale) di due rappresentazioni di momenti angolari j_1 e j_2 è decomponibile nella somma diretta delle rappresentazioni di indici $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$, ciascuna presa una sola volta. Conseguentemente ogni rappresentazione si può costruire a partire da quella fondamentale (o spinoriale) con $j = 1/2$.

Tuttavia, quando si costruiscono sistemi di più particelle identiche, cioè tutte con le stesse proprietà intrinseche (massa, spin, carica elettrica ...), la misura di un insieme completo di osservabili compatibili di singola particella non consente di

determinare univocamente lo stato del sistema. Questa ambiguità si chiama *degenerazione di scambio*. Essa si origina dalla possibilità di permutare tra loro le particelle, senza che si osservi alcuna conseguenza nei risultati delle misure sul sistema complessivo. In linea di principio, in Meccanica Classica si ha sempre la possibilità di *seguire* ogni singola particella lungo la propria traiettoria e quindi distinguere gli stati finali. Il concetto di particelle indistinguibili è invece familiare in Meccanica Statistica. Un erroneo computo degli stati relativi al mescolamento di due gas ideali identici conduce al ben noto paradosso di Gibbs, nel calcolo della variazione di entropia. Assunto un tale *principio di indistinguibilità* in MQ, la sua conseguenza è che tutti gli osservabili debbono essere invarianti rispetto a permutazioni. In particolare lo deve essere l'Hamiltoniano, cioè il generatore dell'evoluzione temporale. Questo comporta che la classificazione di uno stato rispetto alla simmetria per permutazioni si deve conservare. Tuttavia queste regole di selezione non sono sufficienti a eliminare dalle varie possibilità certi stati non osservati in Natura. Pertanto si ricorre ad una aggiuntiva regola di *superselezione*, che stabilisce che non sono osservabili effetti di interferenza tra stati di differente simmetria sotto permutazione. Questa affermazione risulta equivalente al più forte postulato *postulato di simmetrizzazione*, che si può sintetizzare affermando

- a) particelle con spin j intero formano soltanto stati simmetrici (esse sono chiamate *bosoni*);
- b) particelle con spin j semi-intero formano soltanto stati anti-simmetrici (esse sono chiamate *fermioni*);
- c) non esistono stati che non appartengano alle categorie precedenti.

In altri termini, indicato con $\Psi(1, 2)$ un vettore di stato per due particelle identiche di spin j , deve valere la relazione

$$\Psi(2, 1) = (-1)^{2j} \Psi(1, 2). \quad (1)$$

L'enunciato, sostenuto e confermato da una enorme mole di osservazioni, implica per i fermioni il menzionato principio di esclusione di Pauli. Esso non riguarda solo gli elettroni ma, come accennato nell'introduzione, anche protoni e neutroni,

così come i quark, che li costituiscono. Atomi e nuclei atomici possono essere trattati come una singola particella, che si comportano da bosoni, o da fermioni, in funzione del numero dei loro costituenti, in accordo alle regole definite precedentemente per la somma di momenti angolari. Ad esempio, Il nucleo dell'atomo di elio si presenta in due specie isotopiche: ${}^4\text{He}$ è un bosone, ${}^3\text{He}$ un fermione. Il loro comportamento a basse temperature è radicalmente diverso [11], a causa del diverso spin. Analoghi eclatanti effetti, dovuti alla natura bosonica dei componenti, si manifestano nei fasci di luce laser, nei superconduttori, nei superfluidi e negli ormai celebri BEC (Bose-Einstein-Condensates) [12][13].

In altri termini, le proprietà spinoriali microscopiche hanno un riflesso macroscopico, riassunto nelle ben note distribuzioni di Fermi - Dirac e di Bose - Einstein. Esse stabiliscono che per un sistema a contatto con un termostato a temperatura T e potenziale chimico μ , la probabilità di trovarlo in uno stato quantistico Ψ_i di energia E_i è dato da

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\beta(E_i - \mu)} \pm 1}, \quad (2)$$

(+ per i fermioni, - per i bosoni) dove g_i è il grado di degenerazione dello stato e $\beta = \frac{1}{kT}$, con k la costante di Boltzmann [2].

Nonostante la relazione spin - statistica abbia un impatto così profondo in MQ, per una sua spiegazione che prescindendo da postulati *ad hoc* si è dovuto aspettare lo sviluppo della teoria di campo quantistica relativistica (QFT) (cioè coerente sia con MQ che con Relatività Speciale). I lavori di Fierz e Pauli prima [6], e poi quelli di Lüders e Zumino e di Burgoyne alla fine degli anni '50 [14] [15], dimostrano che, affinché la teoria sia priva di incongruenze, i campi debbono soddisfare a delle regole di anti-commutazione se descrivono particelle di spin semi-intero, invece di commutazione se di spin intero [7]. Tali restrizioni sono equivalenti al principio di Pauli e quindi essi si collocano come uno dei maggiori successi della teoria QFT. Aspetti tecnici e storici su questa parte della Fisica sono magistralmente narrati nel volume di Duck e Sudarshan [16].

Naturalmente il passaggio all'ambito relativistico comporta notevoli mutamenti matematici ed interpretativi. Infatti le rappresentazioni uni-

tarie irriducibili del gruppo di Poincaré esistono solo su spazi di stati di dimensione infinita. Esse sono indicizzate da due numeri quantici: la massa $m \in \mathbb{R}_0^+$, definita dall'invarianza del quadrimpulso, e lo spin $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$, in analogia a quanto visto sopra. Da questo punto di vista esse individuano ogni possibile particella elementare. Se in particolare la particella ha massa $m = 0$, solo la componente dello spin nella direzione del moto può essere definita (*l'elicità*) [7]. Questo fatto ha varie importanti conseguenze di carattere cinematico e dinamico, ma qui preme sottolineare il diverso ruolo svolto dall'osservabile massa tra i due gruppi (Galilei e Poincaré) considerati. Questo rende delicata ogni procedura di limite non relativistico ($c \rightarrow \infty$). La soluzione consiste nell'estendere l'algebra di Galilei introducendo un elemento apposito, l'operatore di massa M , il quale commuta con tutti gli altri elementi. Inoltre, indicando con G_i e P_i i generatori delle trasformazioni di Galileo proprie e delle traslazioni, rispettivamente, l'operatore di massa interviene nella relazione $[G_i, P_j] = i\delta_{ij} M$. A tal proposito V. Bargmann aveva fatto notare [17] che in dimensioni ≥ 3 questa è l'unica possibile estensione centrale per il gruppo di Galilei. Inoltre le rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Galilei dipendono da un fattore di fase legato alla massa e per questo sono dette *proiettive*. Questa peculiarità impone una regola di *superselezione*, che vieta l'esistenza di sovrapposizioni di stati con massa differente e, quindi, l'impossibilità per la MQ non relativistica di descrivere particelle instabili. Per poterlo fare, ancora una volta, bisogna ricorrere alla QFT, ma anche si riafferma che i metodi geometrici determinano cosa le nostre teorie possano effettivamente descrivere.

D'altra parte la ricerca di una equazione relativisticamente invariante in forma, che sostituisce quella di Schrödinger, condusse Dirac a introdurre una particolare rappresentazione del gruppo di Poincaré (detta degli spinori di Dirac) a quattro componenti, di massa non nulla, di spin $1/2$ e quindi fermionica, invariante per inversione spaziale. La corrispondente *equazione di Dirac* è invariante anche per un'altra trasformazione discreta, detta *coniugazione di carica*. Essa consente di risolvere il problema degli stati di energia negativa (che affliggono le equazioni relativisticamente invarianti), in quanto essi sono interpre-

tati come stati di energia positiva per particelle con la stessa massa e spin, ma con carica elettrica opposta. Tale corrispondenza permette di introdurre la nozione di *antiparticella*. Poiché le leggi dell'Elettrodinamica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di parità e coniugazione di carica (oltre ovviamente a quelle di Poincaré), il formalismo più naturale per sviluppare la teoria quantistica, ad esempio, dell'elettrone e del positrone (sua antiparticella) è quello degli spinori di Dirac. Se in aggiunta si impone l'invarianza dello spinore rispetto alla coniugazione di carica, quindi la particella è neutra e coincide con la sua antiparticella, si parla di spinore di Majorana, il quale per primo elaborò l'idea che i neutrini possano essere descritti da un tale tipo di fermioni. Gli esperimenti al Large Hadron Collider sono nella posizione per verificare, in un prossimo futuro, queste ipotesi [18], nel contesto teorico più ampio delle teorie di campo supersimmetriche sviluppatasi a partire degli anni '70. Invece nell'ambito della Fisica della Materia Condensata esiste una fervida ricerca di fermioni di Majorana in una vasta gamma di sistemi, motivata sia da ragioni di fisica fondamentale che da applicazioni in computazione quantistica [19]. Qui ci basti ricordare che le particelle studiate nello stato solido non sono, ovviamente, elementari, potendo ridurle in elettroni e ioni (ulteriormente frazionabili) del reticolo cristallino. In realtà si tratta di eccitazioni (meta)stabili di sistemi a multi-corpi, chiamate spesso quasi-particelle. Le loro proprietà fisiche (massa, spin carica elettrica) possono però essere ancora catalogate con i metodi grupali descritti in precedenza. In definitiva, si è visto che i postulati della MQ e la struttura geometrica dei gruppi dinamici codificano i tratti essenziali di gran parte della Fisica alla quale siamo interessati. In particolare, sia in un contesto relativistico, che non-relativistico, la nozione di spin e la sua quantizzazione emergono dai principi primi. Tuttavia la relazione tra valori interi (o semi-interi) dello spin con le proprietà degli stati di bosoni/fermioni richiede un'attenzione particolare, strettamente legata all'invarianza relativistica. A tal proposito Feynman osservò [20]: *Sembra che questo sia uno dei pochi casi [...] in cui un risultato possa essere enunciato molto semplicemente, mentre nessuno è riuscito a trovarne la spiegazione in termini semplici ed immediati. ... Questo significa*

probabilmente che non abbiamo una comprensione completa del principio fondamentale che sta alla base del risultato.

Dinamica in 2 dimensioni

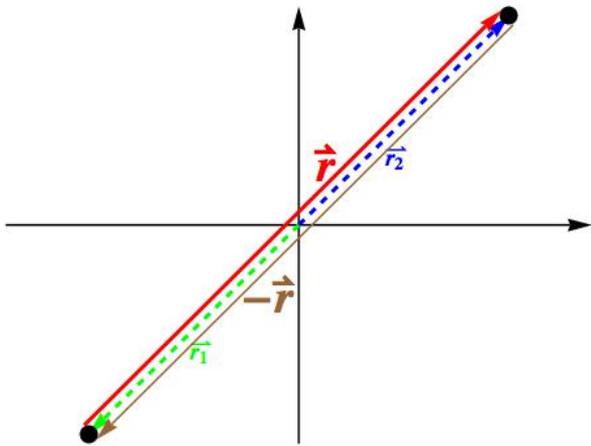


Figura 1: Per un sistema quantistico costituito da due particelle identiche non c'è possibilità di distinguere con alcuna misura quale delle due si trovi nel punto \vec{r}_1 e quale in \vec{r}_2 . I vettori posizione relativa \vec{r} e $-\vec{r}$ rappresentano la stessa configurazione e per la descrizione matematica dello stato del sistema è sufficiente assegnare solo uno di essi.

L'argomento spin-statistica sembrava definitivamente chiuso con l'avvento della QFT, quando Levy-Leblond notò [21] che in 2 dimensioni spaziali le relazioni di consistenza dell'algebra di Galilei ammettevano una seconda estensione centrale, per il minor numero di restrizioni imposte dalle identità di Jacobi. In particolare vale la relazione $[G_1, G_2] = i \kappa \mathbf{1}$, con $\kappa \in \mathbb{R}$ arbitrario, piuttosto che esattamente 0, come nel caso a 3 dimensioni. Per molto tempo questo risultato rimase tra le curiosità matematiche ma poneva il problema, oltre che del significato fisico di κ , quello più generale di una Fisica in 2 dimensioni e degli osservabili in essa. A tal proposito si osservi che il gruppo delle rotazioni nel piano ($SO(2)$) è abeliano, quindi lo spettro dello spin è continuo. D'altra parte Leinaas e Myrheim [22] e, indipendentemente, Wilczek [23] hanno compiuto una riflessione critica sul principio di esclusione, osservando una sua dipendenza dalle dimensioni spaziali.

Infatti, ritornando a riflettere sulle procedure concrete di permutazione, il primo passo è

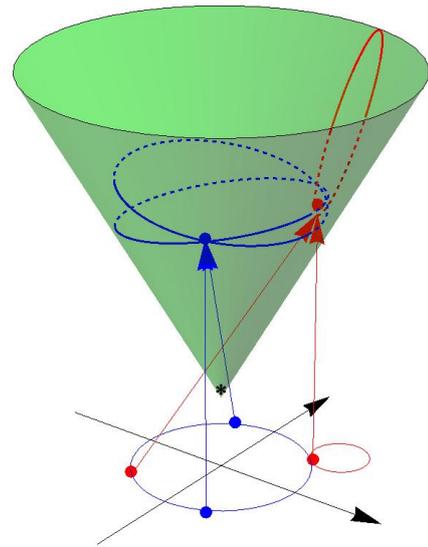


Figura 2: Una rappresentazione di \mathbb{R}^2/S_2 : punti dello stesso colore nel piano sono identificati sul cono. Differentemente dalle curve chiuse che non includono l'origine (rosse), quelle che la racchiudono almeno una volta sono doppiamente mappate sul cono. Poiché il vertice è escluso, le curve di questa classe non possono essere deformate con continuità in quelle della prima, né tra di loro se hanno un differente grado di omotopia.

identificare lo spazio delle configurazioni accessibile ad un sistema di due particelle identiche. Se si è in d dimensioni, lo spazio complessivo è $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, dal quale possiamo fattorizzare un termine \mathbb{R}^d riservato al centro di massa del sistema. Nel restante \mathbb{R}^d delle variabili relative i punti $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e $-\vec{r}$ corrispondono alla stessa configurazione fisica, visto che non è possibile distinguere in alcun modo le due particelle (si veda Figura 1). In altri termini deve esistere una funzione continua $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d/S_2 \subset \mathbb{R}^d$, dove S_2 è il gruppo delle permutazioni di ordine 2. Essa associa una stessa immagine ad ogni coppia di punti simmetrici. Generalizzazioni a N particelle portano allo spazio \mathbb{R}^d/S_N . Nel caso estremo mono-dimensionale ($d = 1$) la funzione che si sta cercando è $r \rightarrow |r|$, quindi lo spazio effettivo è $\mathbb{R}/S_2 = \mathbb{R}_0^+$: la semiretta reale positiva incluso lo 0. Passando a $d = 2$, per ogni punto \vec{r} si può dare la distanza dall'origine $\vec{r} \rightarrow r = |\vec{r}|$ e poi assegnare la direzione della retta che lo

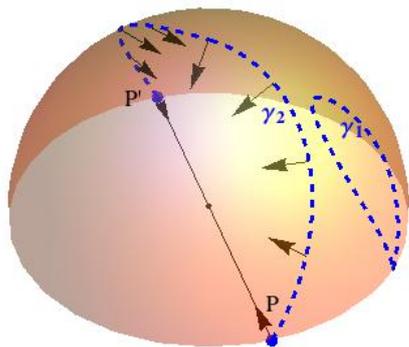


Figura 3: Rappresentazione dello spazio $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, i punti sull'equatore debbono essere fatti coincidere. La curva γ_1 si può contrarre con continuità in un punto, la curva γ_2 no, in quanto nei punti equatoriali diametralmente opposti la normale è diretta in versi opposti. Bisogna percorrere la stessa curva un'altra volta per ritornare alla condizione di partenza. Questa curva doppia è contraibile in un punto.

congiunge al simmetrico. Per ogni assegnato r , l'insieme $\frac{\vec{r}}{r}$ è una circonferenza unitaria centrata nell'origine, dove la funzione p ha la stessa immagine su punti opposti. Costruttivamente si fanno coincidere i punti della semicirconferenza inferiore con quelli opposti della superiore, compresi i punti estremi della stessa. Questa è ancora una circonferenza, che rappresenta l'insieme di tutte le direzioni del piano ed è indicato con il simbolo $\mathbb{P}\mathbb{R}^1$, per tener memoria del suo significato. In conclusione lo spazio disponibile per il sistema di due particelle nel piano è $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{P}\mathbb{R}^1$, quindi un cono (si veda Figura 2) con il vertice in corrispondenza della configurazione di coincidenza $\vec{r} \equiv \mathbf{0}$. Il cono è localmente isometrico a \mathbb{R}^2 , ma nel suo vertice ha curvatura infinita. Escludere tale singolarità equivale a considerare particelle impenetrabili, ipotesi che adotteremo nel seguito. Ripetendo lo stesso tipo di costruzione nel caso $d = 3$, lo spazio delle configurazioni relative è dato da $\mathbb{R}^3/S_2 = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{P}\mathbb{R}^2$, dove $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ è l'insieme delle direzioni nello spazio. La sua costruzione è simile alla precedente: si consideri la sfera unitaria, si facciano coincidere tutti i punti dell'emisfero inferiore con gli opposti di quello superiore, si proceda analogamente con

i punti dell'equatore diametralmente opposti e, infine, con i punti estremi di questa semicirconferenza (Figura 3). Ancora una volta $\vec{r} \equiv \mathbf{0}$ è un punto di singolarità per la curvatura dello spazio e, pertanto, sarà rimosso. La geometria di $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{P}\mathbb{R}^1$ (o di $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{P}\mathbb{R}^2$) è meglio specificata se si tracciano delle curve chiuse su di esso e si cerca di deformarle con continuità le une nelle altre. Si verifica facilmente che questa operazione non è sempre possibile. Se si costruisce una curva chiusa sul cono, che si avvolge n volte attorno al vertice, potrà essere deformata in un'altra con lo stesso numero di spire (o dello stesso grado di omotopia), ma mai in un'altra con un numero inferiore (o superiore) di spire senza che si attraversi il vertice. Poiché n è un intero arbitrario, si dice che $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{P}\mathbb{R}^1$ è connesso infinite volte. Differentemente $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ è solo doppiamente connesso, cioè esistono curve che sono contraibili con continuità in punto, oppure altre che circondando almeno una volta la singolarità. Tuttavia, per il carattere non orientabile di $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, si dimostra che percorrendo due volte una stessa curva, si ottiene di nuovo una curva contraibile. In tal modo si costruiscono curve contraibili ad un punto in tutto lo spazio delle configurazioni per la coppia di particelle identiche. Questa conoscenza delle proprietà geometriche è importante per procedere alla quantizzazione, in quanto la funzione d'onda su tali spazi dipende sensibilmente da esse. Questo è detto nell'ottica della rappresentazione di Schrödinger della MQ. Quella di Heisenberg è stata studiata in vari lavori [24] e, inoltre, si è dimostrata l'equivalenza dei risultati ottenuti con il metodo dell'Integrale Funzionale [25].

Nel caso mono-dimensionale si può imporre la condizione che la densità di corrente di probabilità sia nulla nell'origine. Questo equivale ad imporre che $\partial_r \Psi|_{r=0} = \eta \Psi|_{r=0}$, essendo η una costante arbitraria. È facile verificare che se $\eta = 0$ si deve avere $\Psi(x) = \Psi(-x)$, quindi simmetrica (caso bosonico). Invece per $1/\eta = 0$ si ha $\Psi(x) = -\Psi(-x)$ (caso fermionico). Variando η , queste situazioni estreme sono interpolate da un continuo di simmetrie intermedie. Almeno in questo particolare caso la dicotomia bosoni/fermioni non sussiste. Inoltre si è appreso che la simmetria della funzione d'onda può essere codificata da opportune condizioni imposte nel

punto di singolarità dello spazio.

Sulla scorta di questo esempio, si deve scrivere l'appropriata equazione di Schrödinger sugli spazi curvi bi- e tri-dimensionali effettivamente accessibili e con le singolarità precedentemente determinate. Per tener conto di questo fatto è chiaro che i generatori delle traslazioni, proporzionali alle componenti del momento lineare nel caso euclideo, devono essere opportunamente modificati. Daremo qualche idea in proposito, senza essere rigorosi, ma sapendo che le procedure matematicamente corrette portano ai risultati che esporremo.

Dai manuali di MQ [2] si ricorderà che de Broglie associò ad ogni particella libera di quantità di moto ben definita un'onda piana, secondo la relazione

$$\vec{p} \rightarrow \psi = e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{r}}. \quad (3)$$

Effettuando una traslazione spaziale lungo uno spostamento $\Delta\vec{r}$, l'onda si trasformerà in

$$T_{\Delta\vec{r}} \psi(\vec{r}) = e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r})} = \psi(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \Delta\vec{r}}. \quad (4)$$

Ma se piuttosto che essere nell'abituale spazio euclideo, la particella si muovesse in uno spazio curvo, la formula precedente per la traslazione deve venir corretta. Ispirandosi agli esempi di propagazione ondulatoria (meccanica o ottica) tra mezzi continui diversi, si può facilmente arguire che la prima modifica da apportare è nella fase dell'onda. Quindi per $\Delta\vec{r}$ sufficientemente piccolo (al limite infinitesimo) la (4) viene modificata in

$$T'_{\Delta\vec{r}} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} - \vec{a}) \cdot \Delta\vec{r}} = \psi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) e^{-i\vec{a} \cdot \Delta\vec{r}}, \quad (5)$$

dove il vettore $\vec{a}(\vec{r})$ è una funzione continua e derivabile di \vec{r} , da determinarsi in relazione alla geometria scelta. A scanso di equivoci, si osservi che la quantità introdotta non è un potenziale nel senso abituale del termine: 1) non è una quantità scalare, ma ha tante componenti quante le dimensioni dello spazio in cui si opera; 2) agisce direttamente sulla derivata prima della funzione d'onda e non sulla sua derivata seconda. In altri termini \vec{a} descrive la maniera con cui viene effettuato il *trasporto parallelo* di un vettore sullo spazio curvo scelto. Per esempio, traslando un vettore \vec{v} tangente ad una sfera di una quantità infinitesima $\Delta\vec{r}$, anch'essa tangente alla sfera, è

facile accorgersi che esso acquista una componente ortogonale alla superficie. Tale componente va compensata con una opportuna proiezione sulla sfera, proporzionale al vettore stesso. Questa operazione di proiezione è regolata da un opportuno campo \vec{a} . A livello infinitesimo il trasporto parallelo è descritto da una generalizzazione della derivata direzionale, che prende il nome di *derivata covariante* e assume la forma $D_i = \partial_{r_i} - \iota a_i(\vec{r})$ nella direzione i -esima [26]. Questi operatori costituiscono i generatori infinitesimi delle traslazioni sullo spazio curvo, in analogia con quanto avviene nello spazio euclideo abituale. Pertanto la trasformazione infinitesima indicata in (5) si può estendere lungo qualunque curva continua γ nello spazio considerato, ottenendo

$$T'_\gamma \psi(\vec{r}) = \psi'(\vec{r}) e^{-\iota \int_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{r}}, \quad (6)$$

dove $\psi'(\vec{r})$ è la funzione d'onda traslata lungo γ , senza tener conto della curvatura dello spazio. Questa funzione quindi è a un solo valore (monodroma) nello spazio, esattamente come lo era nello spazio euclideo di pari dimensioni.

Se ora si eseguono due trasporti paralleli infinitesimi in successione lungo due direzioni diverse e, poi, si procede nello stesso ordine con i loro opposti, è facile vedere che non necessariamente si torna nel punto di partenza, come nel caso euclideo, ma in generale si ottiene una deviazione infinitesima pari a

$$f_{ij} = \iota [D_i, D_j] = \partial_{r_i} a_j - \partial_{r_j} a_i \quad (7)$$

dove f_{ij} è detto *tensore di curvatura* dello spazio. Esso è l'analogo di un campo magnetico $\vec{B} = \nabla \times \vec{a}$, associato ad un certo potenziale vettore \vec{a} . In effetti, il *potenziale* \vec{a} dà significato all'idea che una permutazione di particelle identiche (una trasformazione discreta) sia equivalente ad uno scambio di posizione lungo cammini continui in spazi curvi. In Geometria Differenziale il campo \vec{a} è chiamato *connessione*.

Si è visto che la curvatura f_{ij} deve essere nulla ovunque eccetto che nel/nei punti di singolarità, dove non è definita. Tale richiesta corrisponde a considerare campi \vec{a} che siano localmente irrotazionali, ma non conservativi. L'esempio familiare è preso ancora una volta dall'elettromagnetismo classico, ricordando che il campo magnetico

generato da una corrente filiforme soddisfa la relazione $\nabla \times \vec{B} = 0$ in tutti i punti eccetto che sul filo, dove diverge. Ispirandosi quindi alla legge di Biot - Savart (ora $\vec{a} \equiv \vec{B}$), nel caso bi-dimensionale si può porre $\vec{a} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\tau}$, dove $\hat{\tau}$ è il versore ortogonale al raggio vettore e preso nel senso anti-orario, mentre Φ è un parametro reale arbitrario, che fissa il valore della circuitazione. La corrispondente curvatura è $f_{1,2} = \Phi \delta(\vec{r})$ e, naturalmente, si ha $\int f_{1,2} dr^2 = \Phi$. Se ora si percorre un'arbitraria curva chiusa Γ sul cono, la funzione d'onda per una coppia di particelle identiche acquista un fattore di fase della forma

$$\exp\left(-i \int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r}\right) = \exp(-2\pi i n_{\Gamma} \Phi), \quad (8)$$

dove n_{Γ} è un intero che conta quante volte la curva concatena il vertice. Inoltre è evidente che il risultato è indipendente dal cammino scelto, ma solo dall'ordine di concatenazione (o grado di omotopia) della curva: essa può essere deformata arbitrariamente con continuità, purché non attraversi il vertice. Quindi Φ è un parametro dipendente solo dalla specie particellare ed il fattore di fase (8) è ineliminabile dalla teoria. Per $\Phi = 0$ la fase vale 1 e quindi la funzione d'onda è simmetrica: essa descrive bosoni. Per $\Phi = 1/2$ la funzione è antisimmetrica e descrive lo scambio di fermioni. Ma non vi è alcuna ragione per limitarsi a tali valori e quindi anche in 2 dimensioni si può realizzare un continuo di simmetrie intermedie. Per come è stata introdotta Φ è un caso particolare di *fase geometrica* o *fase di Berry* [27] [28]. Senza entrare in dettagli qui si ricorda che l'esempio più spettacolare di fase geometrica è costituita dal cosiddetto *Effetto Aharonov - Bohm*, osservato sperimentalmente da A. Tonomura nel 1986 [29]. Esso ha permesso di verificare che in MQ il flusso magnetico è un osservabile fisico indipendente dall'effettiva azione del campo magnetico sulle cariche elettriche. Esattamente lo stesso effetto della singolarità conica discussa in precedenza.

Tuttavia, il potenziale \vec{a} non è stato determinato in maniera univoca e, in effetti, si è lavorato solo su un esempio che permette di produrre la forma del tensore di curvatura $f_{1,2}$ desiderata, ma non sappiamo se esso sia unico. Ancora una volta ci soccorre l'elettromagnetismo, il quale afferma che a parità di \vec{B} (qui identificato con

$f_{i,j}$) il potenziale vettore \vec{a} è noto a meno di una *trasformazione di gauge*, aggiungendo ad esso il gradiente di una arbitraria funzione scalare differenziabile. Per l'esempio considerato, scelta la funzione $\Lambda = \frac{\Phi\phi}{2\pi}$ dove ϕ è la variabile azimutale nel piano, si ottiene la trasformazione $a'_i = a_i - \partial_i \Lambda \equiv 0$, per $\vec{r} \neq 0$. L'equazione di Schrödinger non contiene più potenziali \vec{a} . Ma se si crede che essa sia una legge fondamentale della Natura e che debba descrivere la stessa Fisica indipendentemente dalla gauge scelta, allora è chiaro che un cambiamento di \vec{a} deve comportare necessariamente una trasformazione della funzione d'onda ψ . Specificatamente, nel caso visto appena sopra, la trasformazione corrispondente è $\psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \exp\left[i\frac{\Phi\phi}{2\pi}\right]$, che ora è polidroma in ϕ . Quindi il prezzo, del richiedere che il sistema ridotto soddisfi l'equazione di Schrödinger libera, è dato da condizioni al bordo inusuali. Tuttavia, queste soluzioni consentono di calcolare la terza componente di momento angolare con i metodi abituali, trovandola pari a $m = \text{intero} + \frac{\Phi}{2\pi}$. In ogni caso non riusciamo a sopprimere il contributo statistico dato da Φ .

Ripetendo gli stessi argomenti in 3 dimensioni spaziali, e ricordando quanto detto a proposito della deformabilità continua di ogni curva chiusa in $\mathbb{P}R^2$ ad un singolo punto, possiamo concludere che l'integrale curvilineo in (8) è sempre nullo. Questo significa che la fase acquistata dalla funzione d'onda è 1, dopo che una delle due particelle abbia compiuto una sola rotazione o al più due attorno all'altra. Quindi a seguito di una loro permutazione la fase acquistata dalla loro funzione d'onda è pari a ± 1 . Si ritrova in questo modo il risultato classico: in 3 dimensioni i vettori di stato per sistemi di particelle identiche sono soltanto o simmetrici (bosoni), o antisimmetrici (fermioni). Con tutte le conseguenze illustrate in precedenza.

Si osservi che il campo \vec{a} è strettamente connesso con il sistema delle due particelle identiche ed evolve con esso. In altri termini \vec{a} non è un campo che si propaga autonomamente come quello elettromagnetico, ma rimane strettamente collegato al sistema e, quindi, è caratteristico della specie componente. Questo fatto ha suggerito che in 2 dimensioni spaziali possa esistere un oggetto composto *particella - flusso*, che interagisce con le altre in maniera analoga con quanto avviene

nell'effetto Aharonov-Bohm. Allora, la funzione d'onda di multi-particella acquista un fattore di fase caratteristico della specie Φ , ma per il resto arbitrario, a seguito dello scambio di due di esse. Poiché tale parametro assume valori continui entro due limiti estremi, che corrispondono alle fasi per bosoni e fermioni, rispettivamente, esso caratterizza particelle battezzate *anyoni* da Wilczek [23], i quali godono di una *statistica anyonica*, a volte detta anche frazionaria. Inoltre lo stesso autore ha suggerito come implementare la statistica frazionaria nell'ambito di una teoria di campo locale, abeliana e a lungo range detta di Chern-Simons, che interagisce in modo minimale con campi di materia bosonici. Questa costruzione ha dato luogo a numerosi lavori teorici e varie generalizzazioni [30].

Inoltre, utilizzando i metodi della quantizzazione geometrica [8] si è dimostrato che la relazione scoperta da Levy-Leblond per il gruppo di Galilei in 2 dimensioni consente di costruire dei modelli classici di particelle cariche in campi magnetici, che sono l'analogo degli anyoni. In particolare il parametro di deformazione κ è proporzionale alla fase Φ e si comporta in maniera duale rispetto al campo magnetico [31][32]. Questi modelli sono utilizzati per studiare l'Effetto Hall Anomalo [33], che si realizza in materiali con proprietà magnetiche peculiari, l'Effetto Hall di Spin [34], nel trasporto di correnti di spin, e nell'effetto Hall ottico [35], che concerne la rifrazione trasversale rispetto al piano formato dalla direzione di propagazione di un fascio di luce e la normale alla superficie del mezzo su cui incide.

Fisica degli anyoni

Passando a studiare la dinamica di due, o più, anyoni identici, le loro proprietà statistiche possono essere convenientemente descritte proiettando le loro traiettorie in un piano (spazio, tempo), con l'unica informazione aggiuntiva di quale, tra due traiettorie, una *passi sotto l'altra*. Il linguaggio matematico appropriato per descrivere tali proiezioni è quello detto del *gruppo di treccia* [36] [37]. L'operazione elementare del gruppo σ_j corrisponde a prendere la traiettoria j e scambiarla con la $j+1$ *passandole sopra*, lasciando tutte le altre invariate. Il prodotto tra le operazioni elementari è definito eseguendole sequenzialmente.

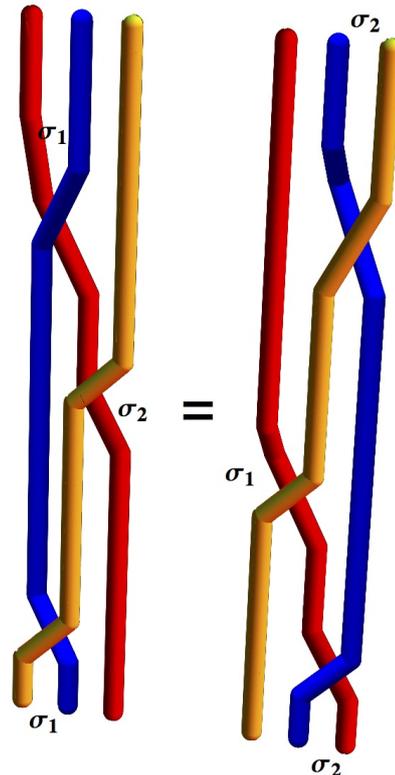


Figura 4: Uguaglianza dei prodotti $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ e $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$

Si ottengono allora delle identità molto semplici:

$$\sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j \quad |j - k| \geq 2$$

e

$$\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1},$$

quest'ultima detta equazione di Yang-Baxter (si veda Figura 4). Come abbiamo già osservato sopra, se il moto di queste particelle avvenisse in 3 dimensioni spaziali, allora deve sussistere la relazione

$$\sigma_j^2 = 1 \quad \forall i,$$

che corrisponde al fatto che lo scambio di due particelle produce al più un cambio di segno del suo stato. L'effetto di queste relazioni aggiuntive consiste nel ridurre il gruppo a quello abituale delle permutazioni S_N di N particelle identiche. Se invece ci limitiamo ad una dinamica in 2 dimensioni spaziali, solo le prime due identità debbono essere considerate. Se, come di consueto, si cercano delle rappresentazioni unitarie del grup-

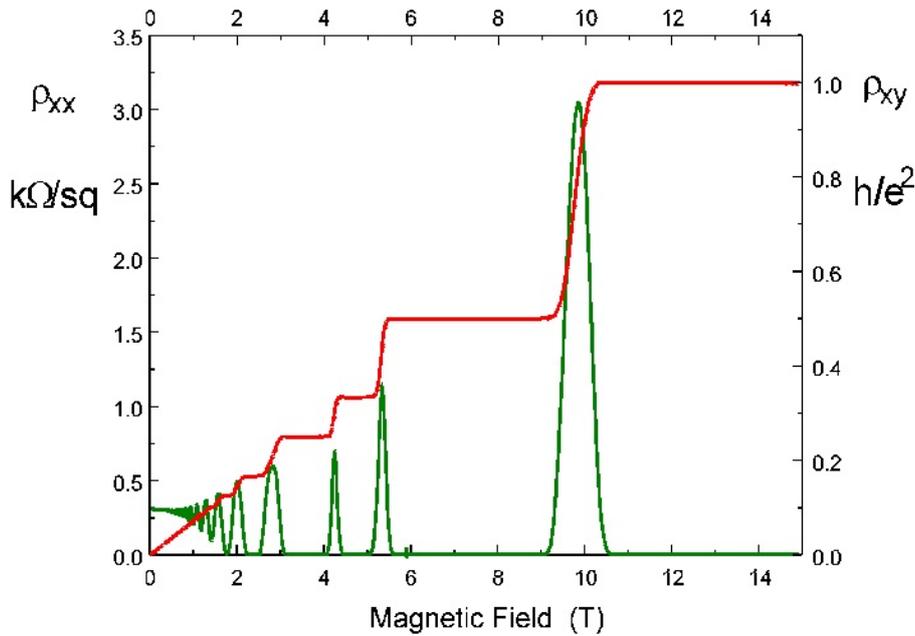


Figura 5: Grafico della conducibilità trasversa (o Hall) (tr. rossa) e longitudinale nell'IQHE (tr. verde). I dati sono riportati in unità della costante di Klitzing $R_K = h/e^2 = 25\,812.807557(18)\,\Omega$. Al variare del campo magnetico si osservano dei plateaux in corrispondenza di $1, 1/2, 1/3, \dots$. La resistività longitudinale è sempre trascurabile, eccetto che per i valori di B in cui il Livello di Landau transita attraverso l'energia di Fermi. Contemporaneamente si ha un brusco passaggio da un plateau all'altro, corrispondente alla diminuzione del numero dei livelli di Landau occupati da elettroni, con densità di stati proporzionale a $\Phi(B)/\Phi_0$, dove $\Phi_0 = h/(2e)$ è il quanto di flusso magnetico.

po da esse generato, allora la più semplice non banale è fornita da $\sigma_i = e^{i\theta}$, per ogni j e $\theta \in \mathbb{R}$. Ci ritroviamo a dover ammettere quindi che è possibile l'esistenza di particelle, il cui vettore di stato cambia per un fattore di fase arbitrario (θ) per effetto dello scambio di due di loro. Un esempio teorico di tale fenomeno è costituito dai sistemi composti particelle-flusso discussi poco sopra [39]. Tuttavia è facile vedere che non esistono semplici regole per stabilire gli stati di occupazione per particelle indipendenti, né è ovvio come generalizzare le distribuzioni statistiche di Bose-Einstein o Fermi-Dirac al caso degli anyoni. Pertanto il problema di determinare lo spettro di Hamiltoniani che coinvolgono anyoni interagenti è difficile [40]. Inoltre la loro meccanica statistica è ancora in fase di sviluppo [41]. In breve, si è seguita l'idea che il comportamento statistico di un gas ideale di bosoni/fermioni possa essere analogo a quello di un gas di particelle classiche interagenti con un potenziale fittizio a due corpi attrattivo/repulsivo, monotonicamente crescente/decescente. Per gli anyoni tale *potenziale statistico* dipende dal parametro θ , che interpola con continuità i precedenti, ma perdendo in generale la monotonia. Quindi emergono fasi quasi-bosoniche, che possono essere trasmutate in fasi quasi-fermioniche. Nel caso di anyoni non abeliani, questo quadro è ulteriormente complicato dall'accoppiamento del potenziale con gli stati di isospin [42].

Naturalmente si vorrebbe trovare una concreta realizzazione fisica di tali particelle. A questo scopo si dovrebbe ricordare che alcuni sistemi quantistici possono effettivamente ridurre la loro dimensionalità, se la loro dinamica è vincolata dalla presenza di gap (salti) di energia tra lo stato fondamentale e quelli eccitati troppo grandi rispetto a possibili eccitazioni esterne. Sotto opportune condizioni questo vincolo può condurre ad una riduzione della dinamica ad uno spazio di configurazioni di dimensioni ridotte.

L'esempio fisico concreto di questa situazione è costituita dalla scoperta, negli anni '80, dapprima dell'Effetto Hall Quantistico Intero (IQHE) in un gas bidimensionale di elettroni (nel 1980 da K. Von Klitzing, Nobel per la Fisica 1985) [43] e poi, molto più pertinente alla nostra discussione, dell'Effetto Hall Quantistico Frazionario (FQHE) (nel 1982 da Tsui, Stormer, Nobel nel 1998 con R. Laughlin, Gossard) [44] (si veda la Figura 5 per l'IQHE e la 6 per il FQHE). Come è noto questi fenomeni si manifestano quando un gas bidimensionale di cariche elettriche, tipicamente gli elettroni presenti all'interfaccia tra due semiconduttori opportunamente drogati, è sottoposto all'azione ortogonale di intensi campi magnetici esterni e a temperature sufficientemente basse.

La dinamica rilevante di questi sistemi si svolge nel piano ortogonale al campo magnetico, tra elettroni fortemente interagenti coulombianamente. Il campo magnetico confina gli elettroni

Integer and Fractional Quantum Hall Effects

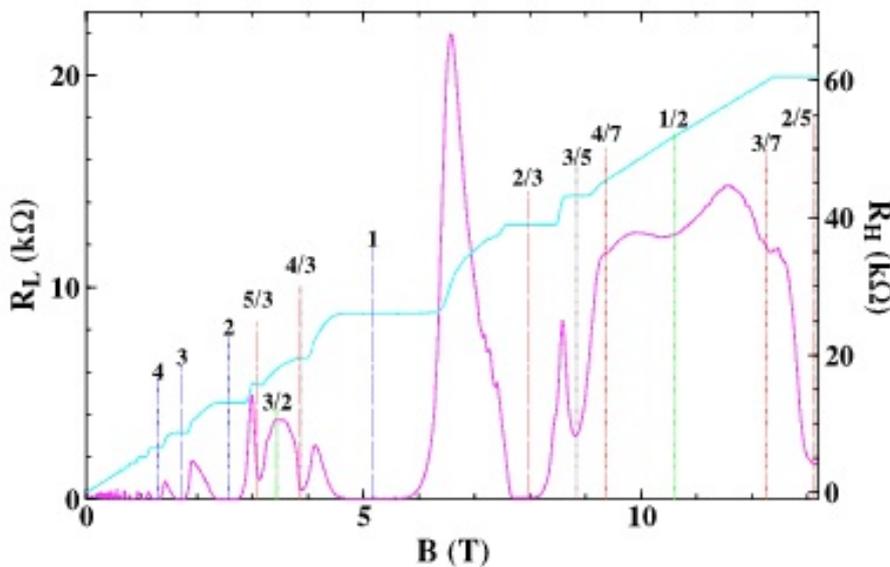


Figura 6: Grafico della resistività trasversa Hall (celeste) e longitudinale (rosa) nell'FQHE. Quando la resistenza Hall è misurata in funzione del campo magnetico, vengono osservati dei plateaux non solo in corrispondenza di valori multipli interi di h/e^2 , ma anche frazionari. In corrispondenza dei plateaux la resistenza longitudinale si annulla. La misura deve essere condotta a valori del campo magnetico più elevati rispetto al caso intero, ma soprattutto a temperature molto più basse dell'ordine delle decimesime di Kelvin. La figura è ripresa da <http://www.sp.phy.cam.ac.uk/>.

in livelli discreti di energia, detti *Livelli di Landau* [2]. Eventuali effetti dovuti al disordine possono essere riassunti in un potenziale aggiuntivo di singola particella. Nel limite di grandi campi magnetici e basse temperature gli elettroni occupano il più basso livello di Landau (LLL) e hanno tutti lo stesso spin. Se gli effetti di disordine sono trascurabili, l'Hamiltoniano si riduce alle pure interazioni coulombiane. Questo processo si chiama di proiezione su LLL e genera dinamicamente una geometria a due dimensioni. Tutti gli altri livelli sono a energie praticamente infinite: già il gap dovuto all'effetto Zeeman è proibitivo per tali elettroni. Questo non è un problema perturbativo, in quanto non esistono scale di energia rispetto ad un livello fondamentale. Inoltre il grado di degenerazione dello stato fondamentale è infinito. La presenza del campo magnetico comporta che la funzione d'onda a molti elettroni assuma tanti zeri per unità di area, quanti sono i quanti di flusso magnetico che la penetrano. In tal modo si creano una sorta di vortici, che presentano un deficit di carica elettronica pari a νe associati a dei quanti di flusso magnetico incorporati rigidamente nello stato elettronico. D'altra parte vortici ed elettroni tendono ad attrarsi e l'energia dovuta all'interazione elettrostatica è significativamente ridotta se essi vengono strettamente legati. La situazione ricorda la schermatura di cariche elettriche nei conduttori ordinari, ma ora essa è quantizzata in unità di flusso magnetico. Laughlin propose [45] una funzione

d'onda collettiva per gli elettroni. Essa permette di descrivere uno stato FQHE contenente ν vortici nella distribuzione di elettroni, ciascuno portatore di una unità di flusso magnetico, carica elettrica e/ν e spin $1/\nu$. Questa funzione d'onda fu trovata usando metodi variazionali di minimizzazione dell'energia, in un ottimo accordo con i dati sperimentali. La sua distribuzione di probabilità può essere interpretata come quella di un plasma bi-dimensionale di una sola specie ionica: i composti elettrone-vortice, che hanno carica e spin frazionari, cioè sono anyoni. Quindi la funzione d'onda di Laughlin descrive la condensazione di particelle anyoniche in un nuovo stato della materia, che, in analogia con il IQHE, dà luogo al FQHE [38, 39]. Si può dimostrare che qualunque deviazione dagli interi dispari nei rapporti tra numero di elettroni e vortici porta a considerevoli costi energetici per il sistema complessivo. La creazione di vortici addizionali, per esempio a causa di un incremento del campo magnetico, è energeticamente sfavorita e il plasma si comporta come un fluido incompressibile. Da qui il fatto che possano esistere particelle di spin $1/3$, $2/5$, $3/7$ e moltissimi altri valori, come si può arguire dalla Figura 6. Come queste eccitazioni si combinino in varie gerarchie di particelle è interpretato da vari modelli, tra i quali citiamo quello dei Fermioni Composti [46]. Comunque la formazione di gap di energia, la presenza di quasiparticelle cariche e la loro localizzazione in potenziali residuali costituiscono gli ingredienti

per spiegare le proprietà di trasporto illustrate in Figura 6. Infine va menzionata l'intensa attività sperimentale per verificare queste ipotesi, in particolare la natura anyonica delle quasi-particelle qui introdotte. In particolare alcuni autori [47] hanno sviluppato un dispositivo interferometrico che sembra dimostrare l'esistenza di tali particelle, anche se la questione è tuttora controversa.

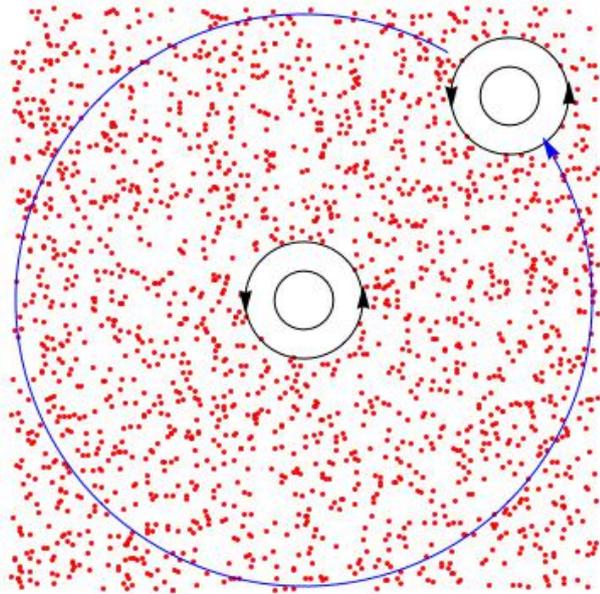


Figura 7: Nel mare di elettroni fortemente interagenti si generano dei vortici associati a quanti di flusso magnetico e con un deficit di carica elettrica media. Essi sono descritti dalle funzioni d'onda di Laughlin e si possono pensare come particelle di carica frazionaria e/ν . Se un vortice gira attorno ad un altro, la sua funzione d'onda acquista una fase di Berry proporzionale al deficit di carica e si comporta come una particella con spin $1/\nu$.

Conclusioni

Per chiudere questa breve rassegna ricordiamo che le particelle in natura si presentano con proprietà fortemente dettate dalla geometria. In particolare lo spin di una particella è strettamente legato alle rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré, o di Galilei nel caso non si volesse tener conto degli effetti relativistici. La conclusione è che nello spazio ordinario esistono solo bosoni e fermioni. Questo fatto era già da tempo condiviso dalla comunità dei fisici, anche sulla scorta dei lavori dei matematici, Weyl e Wi-

gner in primis, durante la prima metà del secolo scorso. Tuttavia scendere di dimensionalità spaziale ha significato esplorare nuove possibilità e non, semplicemente, ridurre la difficoltà di analisi dei problemi. Spesso aspetti del tutto nuovi e sorprendenti si sono rivelati in dimensioni ridotte, sia nella Matematica, che nella Fisica e, per darne un quadro sufficientemente chiaro, è stato necessario abbandonare pregiudizi consolidati. Infine, bisogna ancora sottolineare che spesso raffinati concetti matematici trovano la loro realizzazione nei più disparati ambiti della Fisica con modalità imprevedibili: difficilmente nella prima metà del '900 Emil Artin avrebbe potuto immaginare che il suo gruppo di treccia, ispirato dai lavori a maglia della moglie, potesse essere di una qualche utilità nella Fisica della Materia e nella Meccanica Quantistica.



- [1] M BORN: *Atomic Physics*, Dover Pub. (1969).
- [2] C COHEN-TANNOUDJI, B DUI, F LALOË: *Quantum Mechanics*, Wiley, New York (1977).
- [3] G E UHLENBECK, S GOUDSMIT *Naturwissenschaften* **47** (1925), 953.
- [4] W GERLACH, O STERN: "Der Experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld", *Zeitschrift für Physik* **9** (1922) 349.
- [5] W Pauli Ueber den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren *Z. Physik* 311925765
- [6] W PAULI: "The connection between spin and statistics", *Physical Review* **58** (1940) 716.
- [7] S WEINBERG : *The quantum theory of fields - I*, Cambridge University Press (1996).
- [8] J M SOURIAU : *Structure of dynamical systems. A symplectic view of physics*, *Progress in Mathematics*, Birkhauser , Boston (1997).
- [9] R GILMORE: *Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications*, John Wiley & Sons Inc. (1974).
- [10] J A DE AZCARRAGA, J M IZQUIERDO: *Lie Ggroups, Lie algebras, cohomology and some applications in Physics*, Cambridge Univ. Press (1998).
- [11] A J LEGGETT: " Theory of a superfluid Fermi Liquid I. General Formalism and static properties", *Physical Review* **A140** (1965) 1869.
- [12] K B DAVIS, M O MEWES, M R ANDREWS, N J VAN DRUTEN, D S DURFEE, D M KURN, W KETTERLE: " Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", *Physical Review Letters* **75** (1995) 3969.

- [13] M H ANDERSON, J R ENSHER, M R MATTHEWS, C E WIEMAN, E A CORNELL: "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science* **269** (1995) 198.
- [14] G LÜDERS, GERHART AND B ZUMINO: "Connection between Spin and Statistics", *Physical Review* **110** (1958) 1450.
- [15] N BURGOYNE: "On the connection of spin with statistics", *Nuovo Cimento* **8** (1958) 607.
- [16] I DUCK, E C G SUDARSHAN: *Pauli and the Spin-Statistics Theorem*, World Scientific (1998).
- [17] V BARGMANN: "On unitary ray representations of continuous groups", *Annals of Mathematics* **59** (1954) 1.
- [18] D E MORRISSEY, T PLEHN, T M P TAIT: "Physics searches at the LHC", *Physics Reports* **515** (2012) 1.
- [19] C W J BEENAKKER: "Search for Majorana Fermions in Superconductors", *Annual Review of Condensed Matter Physics* **4** (2013) 113.
- [20] R P FEYNMAN, R B LEIGHTON, M SANDS: *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Pub. C. (1970). III, Cap 4
- [21] J M LEVY-LEBLOND : " Galilei group and Galilean invariance", *Group Theory and Applications II* (Academic Press (1971)) 221.
- [22] J M LEINAAS, J MYRHEIM: "On the theory of identical particles", *Il Nuovo Cimento* **37 B** (1977) 1.
- [23] F WILCZEK: "Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles", *Physical Review Letters* **49** (1982) 957.
- [24] J M LEINAAS, J MYRHEIM: "Quantum Theory for Identical Particles", *Int. J. Modern Physics A* **5** (1991) 2573.
- [25] Y. -S. WU: "General Theory for Quantum Statistics in Two Dimensions", *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2103.
- [26] S P NOVIKOV, A T FOMENKO B A DUBROVIN: *Geometria Contemporanea*, Editori Riuniti (1994).Vol I
- [27] M V BERRY: "Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes", *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** (1984) 45.
- [28] A BOHM, A MOSTAFAZADEH, H KOIZUMI, Q NIU, J ZWANZIGER: *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer (2003).
- [29] A TONOMURA: *The Quantum World Unveiled by Electron Waves*, World Scientific (1998).
- [30] G DUNNE: *Self-Dual Chern-Simons Theories*, Springer (1995).
- [31] C DUVAL, P A HORVATHY: "Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane and the Hall effect", *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 10097.
- [32] P HORVATHY, L. MARTINA, P. STICHEL: "Exotic galilean symmetry and non-commutative mechanics ", *SIGMA* **6** (2010) 60.
- [33] T JUNGWIRTH, Q NIU, A H MACDONALD: "Anomalous Hall Effect in Ferromagnetic semiconductors", *Phys. Rev. Lett.* **90** (2002) 207208.
- [34] S MURAKAMI, N NAGAOSA, S -C ZHANG: "Dissipationless Quantum Spin Current at Room Temperature", *Science* **301** (2003) 1348.
- [35] K Y BLOKH: "Geometrodynamics of polarized light: Berry phase and spin Hall effect in a gradient-index medium", *J. OPTICS A: Pure and Applied Optics* **11** (2009) 094009. arXiv:0903.1910 , physics.optics.
- [36] L H. KAUFFMAN: *Knots and Physics*, World Scientific (1991).
- [37] C NAYAK, F WILCZEK: "2n-quasihole states realize 2n+1-dimensional spinor braiding statistics in paired quantum Hall states", *Nuclear Physics B* **479** (1996) 529.
- [38] WILCZEK F.: *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific (1990).
- [39] STERN A: "Anyons and the quantum Hall effect: A pedagogical review", *Annals of Physics* **323** (2008) 204.
- [40] A FEIGUIN, S TREBST, A W W LUDWIG, M TROYER, A KITAEV, Z WANG, M H FREEDMAN: "Interacting Anyons in Topological Quantum Liquids: The Golden Chain", *Physical Review Letters* **98** (2007) 160409.
- [41] A KHARE: *Fractional statistics and quantum theory*, World Scientific (2005).
- [42] F MANCARELLA, A TROMBETTONI, G MUSSARDO: "Statistical mechanics of an ideal gas of non-Abelian anyons", *Nuclear Physics B* **867** (2013) 950.
- [43] K v KLITZING, G DORDA, M PEPPER : "New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance", *Physical Review Letters* **45** (1980) 494.
- [44] D.C. TSUI, H.L. STORMER, A.C. GOSSARD: "Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit", *Physical Review Letters* **48** (1982) 1559.
- [45] LAUGHLIN R.B.: " Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations", *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395-1398.
- [46] O HEINONEN: *Composite Fermions*, World Scientific (2003).
- [47] F CAMINO, W ZHOU, V GOLDMAN: "Realization of a Laughlin quasiparticle interferometer: Observation of fractional statistics", *Physical Review B* **72** (2005) 075342.

Luigi Martina: Luigi Martina è professore associato di fisica Teorica presso l'Università del Salento. La sua attività di ricerca riguarda l'applicazione di metodi gruppali per lo studio di sistemi fisici nonlineari.