

# L'equazione di Eulero–Lagrange

*La teoria attrae la pratica come il magnete attrae il ferro.*

— Carl Friedrich Gauss

**Rocco Chirivì**

Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” - Università del Salento

---

**L'**equazione di Eulero–Lagrange è uno dei primi risultati del calcolo delle variazioni classico. In questa lezione la useremo per determinare l'espressione analitica della brachistocrona, della catenaria e per studiare le geodetiche di semplici superfici.

Per illustrare di cosa si occupi la branca della matematica detta “calcolo delle variazioni” vediamo per prima cosa tre fra i problemi che hanno portato alla sua nascita. Si tratta di problemi di ambito fisico, ma mentre i primi due sono stati studiati nel periodo classico del calcolo delle variazioni, l'ultimo è alquanto più complesso ed è tipico della teoria del ventesimo secolo.

1. Qual è la curva che unisce due punti fissati, lungo cui una massa cade in tempo minimo?
2. Quale forma assume una corda sospesa ai suoi due estremi?
3. Se si immerge un filo di ferro, piegato lungo una certa curva chiusa, in acqua saponata si forma una superficie che ha il filo di ferro per bordo; come si descrive questa superficie?

Vedremo in seguito che in tutti e tre i casi si tratta della ricerca di un certo elemento, sia esso una curva o una superficie, che rende minimo un qualche valore. In questi termini il problema è simile al calcolo del minimo di una funzione su un intervallo. La differenza è che il valore da minimizzare non dipende da una variabile numerica ma da un oggetto più complesso: una curva o una superficie. Questa differenza è essenziale e rende il calcolo delle variazioni così interessante e difficile.

## La brachistocrona

Il primo dei problemi sopra enunciati è detto della *brachistocrona* ed è stato posto come sfida alla comunità dei matematici, cosa usuale al tempo, da Johann Bernoulli nella rivista “Acta Eruditorum” del 1696. Esso fu risolto da Newton, Leibniz, L'Hospital, dallo stesso Johann Bernoulli e dal fratello Jakob Bernoulli; queste soluzioni apparvero in un numero della stessa “Acta Eruditorum” nell'anno successivo. Una curiosità: la soluzione di Newton arrivò anonima, cosa giustificata dalla contesa in corso tra i matematici del tempo per la paternità del calcolo infinitesimale;

Johann Bernoulli parteggiava infatti per Leibniz e Newton non voleva rispondergli direttamente.

La soluzione di Johann Bernoulli si basava sulla legge di Snell per la rifrazione e il principio di Fermat secondo cui la luce viaggia lungo il cammino più breve tra due punti. Quella di Jakob Bernoulli, invece, era più geometrica e rappresentò un primo approccio alla soluzione sistematica di questo tipo di problemi.

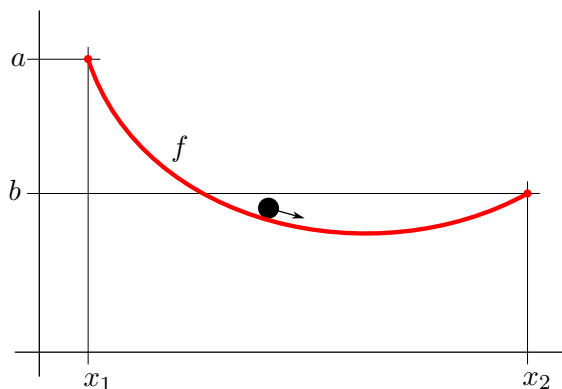


Figura 1: Una brachistocrona.

Supponendo che i punti di arrivo e partenza abbiano coordinate  $(x_1, a)$  e  $(x_2, b)$  rispettivamente e che la curva sia rappresentabile come il grafico di una funzione derivabile  $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , il tempo impiegato a percorrere la curva sotto la spinta della gravità è

$$J(f) \doteq \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1 + f'(x)^2}{a - f(x)} \right)^{1/2} dx$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Per ricavare questa espressione osserviamo che in un generico intervallo infinitesimale  $[x, x + dx]$ , la curva è lunga  $(1 + f'(x)^2)^{1/2} dx$  mentre la velocità a cui è percorsa è  $(2g(a - f(x)))^{1/2}$  come si trova subito dalla conservazione dell'energia.

Quindi, se  $\Omega$  è l'insieme delle funzioni derivabili su  $[x_1, x_2]$  con  $f(x_1) = a$  e  $f(x_2) = b$ , abbiamo il funzionale su  $\Omega$

$$\Omega \ni f \xrightarrow{J} J(f) \in \mathbb{R}$$

e il problema della brachistocrona è equivalente a cercare un minimo per tale funzionale.

Si noti però che, sebbene dal punto di vista fisico si possa intuire che esiste una traiettoria che risolve il problema posto, non è assolutamente chiaro come mai il funzionale ammetta un minimo. E, inoltre, la scelta della classe delle funzioni

derivabili come insieme in cui cercare il minimo potrebbe non essere quella naturale per il funzionale  $J$ . Infatti tale funzionale potrebbe non avere minimo in questa classe ed averne in una classe più ampia, di funzioni meno regolari. D'altro canto, in una classe più ampia  $J$  potrebbe avere più minimi e questi potrebbero non essere accettabili fisicamente. Torneremo su questo punto ancora in seguito.

## La catenaria

Il secondo dei problemi enunciati è detto della *catenaria*. Il primo ad occuparsene fu Galileo Galilei che diede una soluzione sbagliata, egli pensava che la catenaria fosse un arco di conica. Il problema venne poi risolto in maniera corretta da Huygens, Leibniz e dai fratelli Bernoulli.

Anche questo problema è riconducibile alla ricerca di un minimo. Supponiamo che la corda sia appesa nei punti  $(x_1, a)$  e  $(x_2, b)$  e che la sua forma sia rappresentabile come il grafico di una funzione derivabile  $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ . All'equilibrio l'energia della corda sarà solo energia potenziale e dovrà essere minima. Tale energia è esprimibile, a meno di costanti, come

$$J(f) \doteq \int_{x_1}^{x_2} f(x)(1 + f'(x)^2)^{1/2} dx$$

Infatti, analogamente al caso precedente, abbiamo che in un intervallo infinitesimale  $[x, x + dx]$  la curva ha una massa proporzionale alla sua lunghezza  $(1 + f'(x)^2)^{1/2} dx$  ed un'altezza data da  $f(x)$ .

Osserviamo però che, a differenza del problema precedente, la lunghezza della corda, cioè

$$L(f) \doteq \int_{x_1}^{x_2} (1 + f'(x)^2)^{1/2} dx$$

è fissata, diciamo  $L(f) = \ell$ ; abbiamo quindi un vincolo che deve essere soddisfatto da  $f$ .

La catenaria è allora caratterizzata come la funzione  $f$  dell'insieme  $\Omega$  delle funzioni derivabili su  $[x_1, x_2]$  tali che  $f(x_1) = a$  e  $f(x_2) = b$  per cui  $L(f) = \ell$  e che rende minimo  $J$ .

Come per la brachistocrona, non è per nulla ovvio che  $J$  ammetta un (solo) minimo; benché, anche qui, l'intuito fisico ci porta a pensare che

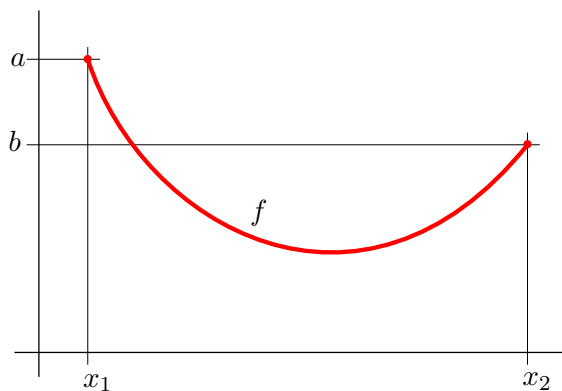


Figura 2: Una catenaria.

la corda dovrà pur disporsi in qualche modo e questa forma è necessariamente un minimo.

## Il problema di Plateau

Il terzo problema prende il nome dal fisico belga Joseph Plateau, che studiò la tensione superficiale. Un primo risultato fu ottenuto da Eulero nel 1744 che dimostrò come la superficie di rotazione di area minima tra due circonferenze parallele si ottenga da una catenaria.

In generale, data un'unione finita  $\Gamma$  di curve chiuse in  $\mathbb{R}^3$ , consideriamo la classe  $\Omega$  di tutte le superfici  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  per cui: sia possibile definire l'area  $J(S)$ ,  $S$  abbia certe fissate condizioni di regolarità e tali che il bordo di  $S$  sia  $\Gamma$ . Possiamo allora considerare il funzionale  $\Omega \ni S \mapsto J(S) \in \mathbb{R}$  che associa ad  $S$  la sua area.

Una pellicola di acqua saponata che si formi su un filo di ferro lungo  $\Gamma$  si svilupperà secondo una superficie  $S$  che minimizza l'area  $J(S)$ . Ma, come visto con i problemi precedenti e, anzi, in modo sostanzialmente più "selvaggio", la superficie  $S$  potrà essere molto poco regolare anche se  $\Gamma$  è molto regolare.

D'altra parte, come al solito, se ammettiamo superfici poco regolari in  $\Omega$  allora potrebbero esistere molti minimi per  $J$ . Ed ancora: la stessa definizione di area  $J(S)$  per una superficie poco regolare potrebbe essere problematica da definire (vedi l'articolo di Alessio Figalli in questo stesso numero di Ithaca).

Come esempio di quanto detto consideriamo la Figura 3: una superficie di area minima con bordo  $\Gamma$  regolare (diffeomorfo ad una circonferenza), ha una curva di punti singolari in cui localmente si incontrano tre superfici ad ango-

lo di  $2\pi/3$  radianti. (Si veda il sito [4] per altre interessanti illustrazioni di superfici di area minima.)

Questo esempio rende chiaro quanto la classe delle possibili superfici tra cui cercare il minimo sia problematica da definire; anzi, è questo un punto centrale per i risultati sulle superfici minime.

Come osservato per la prima volta da Meusnier nel 1785, una superficie minimizzante ha curvatura media nulla. Non è però vero il viceversa, cioè non tutte le superfici con curvatura media nulla di bordo  $\Gamma$  assegnato minimizzano l'area. Infatti la condizione di avere curvatura media è condizione necessaria per avere un minimo locale per  $J$  ma essa non è sufficiente. Tale condizione è esattamente ciò che si ottiene imponendo che la superficie considerata soddisfi l'equazione di Eulero–Lagrange argomento della prossima sezione.

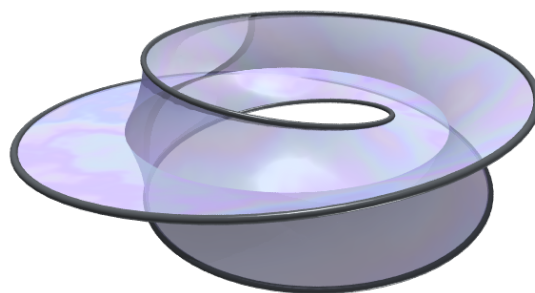


Figura 3: Una superficie minima con punti singolari e bordo regolare.

## L'equazione di Eulero–Lagrange

In quanto segue ci poniamo un obiettivo molto modesto: vogliamo dimostrare il primo risultato classico del calcolo delle variazioni noto come equazione di Eulero–Lagrange. Il teorema che vedremo esprimerà una condizione necessaria per avere un minimo di un funzionale definito in termini integrali; tale condizione è data da un'equazione differenziale.

Sia  $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$  un intervallo fissato, con  $x_1 < x_2$  e sia

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto F(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

di classe  $C^2$ . Definiamo

$$J(f) \doteq \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x)) dx$$

e consideriamo il funzionale

$$\Omega \ni f \mapsto J(f) \in \mathbb{R}$$

sulla classe  $\Omega$  delle funzioni  $f$  di classe  $C^1$  su  $[x_1, x_2]$  per cui  $f(x_1) = a$  e  $f(x_2) = b$ . Ci proponiamo di trovare una condizione necessaria su  $f$  per avere un minimo locale di  $J$  in  $\Omega$ .

Il primo passo è dimostrare il seguente risultato, detto *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*. Esso garantisce che se una funzione annulla un'ampia classe di funzionali integrali allora essa è identicamente nulla.

**Lemma 1.** *Se  $f$  è continua in  $[x_1, x_2]$  e vale*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x) dx = 0$$

per ogni  $h$  di classe  $C^1$  in  $[x_1, x_2]$  con  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , allora  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in [x_1, x_2]$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia identicamente nulla e sia  $x_0 \in [x_1, x_2]$  tale che  $f(x_0) > 0$  (il caso  $f(x_0) < 0$  è analogo, basta considerare  $-f$  al posto di  $f$ ). Essendo  $f$  continua, essa sarà positiva in un intorno di  $x_0$ . Questo ci permette di supporre che  $x_1 < x_0 < x_2$  senza perdita di generalità; inoltre, per lo stesso motivo, esistono  $\delta, \epsilon > 0$  per cui  $f(x) > \epsilon$  per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_1, x_2]$ .

Consideriamo ora la funzione  $h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $(x - x_0 + \delta)^2(x - x_0 - \delta)^2$  se  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$  e 0 fuori da questo intervallo. Essa rientra nelle ipotesi del lemma ma si vede subito che

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x) dx > \epsilon \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} h(x) dx > 0$$

e abbiamo quindi un assurdo.  $\square$

Prima di enunciare il teorema di questa lezione vediamo una definizione: diciamo che  $f \in \Omega$  è

un *minimo locale* di un funzionale  $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se per ogni  $h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  con  $h(a) = h(b) = 0$  esiste un  $\epsilon > 0$  per cui  $J(f + th) \geq J(f)$  per ogni  $0 \leq t < \epsilon$ .

**Teorema 2.** *Se la funzione  $f$  di classe  $C^2$  in  $[x_1, x_2]$  è un minimo locale per il funzionale  $J$  allora  $f$  risolve l'equazione di Eulero–Lagrange:*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z}(x, f(x), f'(x)) = 0$$

*Dimostrazione.* Sia  $h$  fissata di classe  $C^1$  in  $[x_1, x_2]$  con  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ ; allora per ogni reale  $t$  la funzione  $x \mapsto f(x) + th(x)$  è in  $\Omega$ . Consideriamo la funzione

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto J(f + th) \in \mathbb{R}$$

Essendo  $f$  un minimo locale di  $J$ ,  $\varphi$  deve avere un minimo locale in 0. Inoltre  $J(f + th)$  è un integrale su un compatto di una funzione  $C^1$ , quindi  $\varphi$  è derivabile (rispetto a  $t$ ); possiamo scambiare la derivata e l'integrale per calcolare  $\varphi'$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x))h(x) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, f(x), f'(x))h'(x) \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z}(x, f(x), f'(x)) \right) h(x) dx + \left[ \frac{\partial F}{\partial z}(x, f(x), f'(x))h(x) \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z}(x, f(x), f'(x)) \right) h(x) dx \end{aligned}$$

deve abbiamo usato l'integrazione per parti e osservato che le ipotesi su  $h(x)$  annullano il termine fuori dall'integrale nell'ultimo passaggio.

Usando la generalità di  $h$  abbiamo la tesi dal Lemma fondamentale.  $\square$

## Brachistocrona e cicloide

Vediamo ora come dall'equazione di Eulero–Lagrange possiamo derivare che la brachistocrona è un arco di cicloide.

Per questo problema il funzionale  $J$  è associato alla funzione

$$F(x, y, z) = \left( \frac{1 + z^2}{y - a} \right)^{1/2}$$

Possiamo supporre, a meno di una traslazione, che  $x_1 = 0$  e  $a = 0$ . Allora l'equazione di Eulero–Lagrange è, dopo varie semplificazioni,

$$f''(x) = -\frac{1 + f'(x)^2}{2f(x)}$$

Ora, una soluzione di questa equazione può essere trovata in forma parametrica come

$$\begin{cases} x &= \lambda(t - \sin t) \\ y &= \lambda(1 - \cos t) \end{cases}$$

con  $\lambda$  un numero reale fissato. È noto che questa è la parametrizzazione di una cicloide. Il valore della costante  $\lambda$  si determina imponendo la condizione che la curva passi per il punto  $(x_2 - x_1, b - a)$ .

Per verificare che abbiamo una soluzione consideriamo la funzione  $t \mapsto \lambda(t - \cos t)$ , osserviamo che  $\varphi$  è invertibile e che possiamo quindi definire  $f(x)$  come  $\lambda(1 - \cos \varphi^{-1}(x))$ .

Usando la formula per la derivata della funzione composta abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f|_{x_0=\varphi(t_0)} &= \lambda \sin t_0 \cdot \frac{d}{dx} \varphi^{-1}|_{x_0=\varphi(t_0)} \\ &= \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0} \end{aligned}$$

e analogamente troviamo

$$\frac{d^2}{dx^2} f|_{x_0=\varphi(t_0)} = -\frac{1}{\lambda(1 - \cos t_0)}$$

da ciò segue subito che la  $f$  così definita risolve l'equazione differenziale di Eulero–Lagrange. Per procedere osserviamo, senza dimostrazione, che

1. la soluzione trovata è l'unica soluzione dell'equazione differenziale in questione,
2. il funzionale  $J$  ammette almeno un minimo locale.

Sebbene l'equazione di Eulero–Lagrange sia solo una condizione necessaria, usando questi due fatti possiamo concludere che la soluzione data è il minimo cercato.

## Catenaria e coseno iperbolico

L'equazione di Eulero–Lagrange permette di trovare l'espressione analitica della catenaria e risolvere così il secondo problema. In realtà abbiamo bisogno di una piccola variazione (che non dimostreremo) in quanto, come abbiamo notato, è questo un problema con vincolo.

Analogamente a quanto visto per le funzioni, introduciamo un moltiplicatore di Lagrange: sia  $\Phi(f) \doteq L(f) - \ell$ , in modo che il vincolo è  $\Phi(f) = 0$ , e studiamo il funzionale senza vincoli

$$\begin{aligned} \tilde{J}(f) &\doteq J(f) - \lambda \Phi(f) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - \lambda)(1 + f'(x)^2)^{1/2} dx + \lambda \ell \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  sarà determinato nella soluzione imponendo il vincolo (oltre ad imporre  $f(x_1) = a$  e  $f(x_2) = b$ ).

Il funzionale  $\tilde{J}$  è associato alla funzione

$$F(x, y, z) \doteq (y - \lambda)(1 + z^2)^{1/2}$$

da cui ricaviamo subito che l'equazione di Eulero–Lagrange è

$$(1 + f'(x)^2)^{1/2} = \frac{d}{dx} \frac{f'(x)(f(x) - \lambda)}{(1 + f'(x)^2)^{1/2}}$$

È possibile risolvere esplicitamente questa equazione differenziale e trovare che

$$f(x) = \alpha \cosh \left( \frac{x}{\alpha} + \beta \right) + \lambda$$

è una soluzione, dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  sono tre costanti; esse si ricavano imponendo le condizioni:  $f(x_1) = a$ ,  $f(x_2) = b$  e  $L(f) = \ell$ .

Non proviamo, come nel caso della brachistocrona, che si tratta dell'unica soluzione dell'equazione di Eulero–Lagrange e che il funzionale ammette almeno un minimo locale.

Usando ciò possiamo concludere che la soluzione trovata è il minimo cercato, cioè l'espressione analitica della catenaria.

## Geodetiche

In questa ultima sezione vogliamo far vedere come l'equazione di Eulero–Lagrange possa essere usata per determinare le geodetiche di semplici superfici. Per ragioni di spazio saremo me-

no rigorosi delle sezioni precedenti; il nostro scopo è mostrare come l'equazione di Eulero–Lagrange abbia applicazioni a problemi geometrici e non solo fisico–analitici come visto nelle sezioni precedenti.

Sia  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^\infty$  e sia  $S \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x) = 0\}$  la superficie di  $\mathbb{R}^3$  definita da  $\Phi$ . Fissati due punti  $p, q$  di  $S$  sia  $\Omega$  lo spazio dei cammini da  $p$  a  $q$ , cioè l'insieme delle applicazioni  $\gamma$  di classe  $C^\infty$  da  $[0, 1]$  in  $S$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ . Definiamo la *lunghezza* del cammino  $\gamma$  come

$$L(\gamma) \doteq \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

e l'*energia* del cammino  $\gamma$  come

$$E(\gamma) \doteq \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt$$

Diciamo che un cammino  $\gamma \in \Omega$  è una *geodetica* di  $S$  da  $p$  a  $q$  se è un minimo locale in  $\Omega$  del funzionale lunghezza.

Come provato in [3] (Lemma 12.1) il funzionale energia assume il suo minimo sulle geodetiche di lunghezza minima con parametro proporzionale alla lunghezza d'arco (ciò segue essenzialmente dalla disuguaglianza di Schwarz). L'energia è un funzionale preferibile alla lunghezza in quanto, di solito, porta ad equazioni differenziali più semplici.

Si noti che siamo interessati al funzionale  $E$  in  $\Omega$ , cioè consideriamo solo i cammini da  $[0, 1]$  in  $S$  e non tutte le applicazioni  $C^\infty$  da  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}^3$ . Dobbiamo quindi usare la versione dell'equazione di Eulero–Lagrange con vincolo come visto nel caso della catenaria.

In particolare, osserviamo che il vincolo  $\gamma(t) \in S$  per ogni  $t \in [0, 1]$  può essere espresso come

$$\int_0^1 \Phi^2(\gamma(t)) dt = 0$$

Modifichiamo quindi il funzionale energia definendo

$$\tilde{E}(\gamma) \doteq \int_0^1 (|\gamma'(t)|^2 - \lambda \Phi^2(\gamma(t))) dt$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  è una costante da determinare. È allora immediato verificare che l'equazione di

Eulero–Lagrange diventa

$$\gamma''(t) = -\frac{\lambda}{2} \nabla \Phi(\gamma(t))$$

cioè, la derivata seconda di una geodetica è parallela al gradiente della funzione che definisce la superficie, cioè è parallela alla normale alla superficie. Si noti inoltre che  $\gamma''$  risulta quindi essere parallela alla normale alla curva.

Vediamo ora alcuni esempi. Cominciamo con il caso semplicissimo delle geodetiche del piano, considerando il piano come l'ipersuperficie di  $\mathbb{R}^3$  definita da  $z = 0$ .

È chiaro che in questo caso le geodetiche sono segmenti, infatti l'equazione differenziale ora scritta diventa

$$\gamma''(t) = -\lambda(0, 0, 1)$$

e quindi  $\gamma(t) = -\lambda/2(0, 0, 1)t^2 + at + b$ . Imponendo che  $\gamma(t)$  sia nel piano definito  $z = 0$  per ogni  $t$  abbiamo  $\lambda = 0$  e imponendo che il cammino sia tra  $p$  e  $q$  abbiamo  $b = p$  e  $a = q - p$ . Abbiamo quindi ritrovato che la curva più breve, e l'unica geodetica, che congiunge  $p$  e  $q$  è il segmento.

Consideriamo ora il cilindro  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  con asse parallelo all'asse  $z$  e raggio 1. Siano, ad esempio,  $p = (1, 0, 0)$  e  $q = (1, 0, 1)$ . L'equazione di Eulero–Lagrange in questo caso diventa

$$\begin{cases} \gamma''_x(t) = -\lambda \gamma_x(t) \\ \gamma''_y(t) = -\lambda \gamma_y(t) \\ \gamma''_z(t) = 0 \end{cases}$$

e quindi abbiamo

$$\begin{cases} \gamma_x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \gamma_y(t) = B \sin(\omega t + \varphi) \\ \gamma_z(t) = at + b \end{cases}$$

con  $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$  e  $A, B, \varphi \in \mathbb{R}$ . Imponendo le condizioni  $\gamma(t) \in S$ ,  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$  otteniamo  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = B = 1$  e  $\lambda = 4k^2\pi$ ,  $k$  naturale.

Si noti come in questo caso *non* abbiamo unicità delle geodetiche: esistono infinite geodetiche date da eliche sul cilindro che partono da  $p$  e compiono più giri intorno al cilindro prima di raggiungere  $q$ . È però vero che c'è una sola geodetica di lunghezza (ed energia) minima

corrispondente a  $k = 0$ , il segmento verticale  $[0, 1] \ni t \mapsto (1, 0, t) \in S$ .

Come ultimo esempio consideriamo le geodetiche su una sfera  $S$  di raggio 1 in  $\mathbb{R}^3$  tra i punti  $p = (1, 0, 0)$  e  $q = (0, 1, 0)$ . Il vincolo è dato da  $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  e il gradiente è quindi  $\nabla\Phi(x, y, z) = 2(x, y, z)$ ; l'equazione per una geodetica è allora

$$\gamma''(t) = -\lambda\gamma(t)$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \gamma_x(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ \gamma_y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \\ \gamma_z(t) = A_z \cos(\omega t + \varphi_z) \end{cases}$$

con  $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$ . Imponendo le condizioni iniziali e finali ricaviamo  $A_x = 1, A_y = 1, A_z = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = \pi/2$  ( $\varphi_z$  qualsiasi) e  $\lambda = 4k^2\pi$  con  $k$  naturale non nullo.

Vediamo che anche in questo caso *non c'è* unicità per le geodetiche, ma tutte le geodetiche sono circonferenze di raggio massimo, cioè nel piano generato da  $p$  e  $q$ , che passano varie volte da  $p$  e  $q$  in entrambi i sensi di rotazione.

Ovviamente c'è solo una geodetica di lunghezza minima assoluta, cioè l'arco  $[0, 1] \ni t \mapsto (\cos \pi t/2, \sin \pi t/2, 0) \in S$  corrispondente a  $k = 1$ .



- [1] Giovanni Alberti:  
<http://www.dm.unipi.it/~alberti/files/didattica/divulgazione/calcvartreccani.pdf>
- [2] MORRIS KLINE: *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, Volumi 1 & 2 (1999).
- [3] JOHN MILNOR: *Morse theory*, Princeton University Press (1963).
- [4] Emanuele Paolini:  
<http://web.math.unifi.it/~paolini/diletto/minime/>



**Rocco Chirivì:** Laureato in matematica all'Università di Pisa e alla Scuola Normale Superiore. Ha conseguito il dottorato di ricerca presso la Scuola Normale Superiore. È stato ricercatore in Algebra presso l'Università La Sapienza di Roma e l'Università di Pisa. Da maggio 2012 è ricercatore presso il dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento. Si occupa di teoria delle rappresentazioni di algebre e gruppi di Lie.