
Integrale di Feynman e limite classico

Alice rise: «È inutile che ci provi», disse; «non si può credere a una cosa impossibile.» «Oserei dire che non ti sei allenata molto», ribatté la Regina. «Quando ero giovane, mi esercitavo sempre mezz'ora al giorno. A volte riuscivo a credere anche a sei cose impossibili prima di colazione.»

— Alice nel paese delle meraviglie, Lewis Carroll, 1865

Matteo Beccaria

Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento

Il formalismo basato sull'integrale di Feynman consente di trattare i problemi della meccanica quantistica mantenendo uno stretto contatto con il suo limite classico. In particolare, le soluzioni delle equazioni del moto che seguono dal principio variazionale continuano a giocare un ruolo centrale favorendo l'intuizione fisica. Alcuni esempi semplici illustrano questa caratteristica importante dell'approccio di Feynman alla quantizzazione.

Il *principio di corrispondenza* è stato introdotto da Niels Bohr nel 1920 ed afferma che la meccanica quantistica deve riprodurre i risultati della meccanica classica per sistemi caratterizzati da un'azione grande rispetto alla costante di Planck (ridotta) \hbar .

Formulato in questi termini è un principio di buon senso, ma solo qualitativo. È quindi importante capire come tradurlo in termini quantitativi. Il problema non è banale poiché la meccanica

quantistica è basata su un formalismo completamente diverso da quello della meccanica classica. Infatti, la meccanica classica è basata su traiettorie $(q(t), p(t))$ nello spazio delle fasi che soddisfano le equazioni del moto **non-lineari** che seguono dal principio variazionale

$$\delta S = 0 \quad (1)$$

dove S è l'azione, un funzionale di $q(t)$ e $p(t)$. In maniera del tutto differente, in meccanica quantistica gli stati fisici sono descritti da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} (modulo trasformazioni di fase) e le osservabili fisiche, ovvero le quantità misurabili, sono associate ad operatori **lineari** su \mathcal{H} . In quanto operatori, le osservabili in generale non commutano. Questo fatto tecnico costituisce la base matematica per il principio di indeterminazione di Heisenberg. L'esempio più semplice è la celebre relazione tra l'operatore posizione \hat{q} e l'operatore impulso \hat{p} di una particella puntiforme in una dimensione spaziale:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2)$$

Questa relazione conduce direttamente alla celebre relazione di indeterminazione di Heisenberg $\Delta q \Delta p \sim \hbar$. Nel limite formale $\hbar \rightarrow 0$ gli effetti non commutativi scompaiono. In questo senso il principio di corrispondenza è plausibile, ma rimane ancora da capire quale sia il legame quantitativo con i risultati della meccanica classica¹. In particolare, quello che ci interessa chiarire è *quale sia il ruolo dell'azione S in un sistema quantistico*.

Storicamente, Dirac² mostrò nel 1933 come la meccanica classica possa emergere dalla meccanica quantistica sotto certe condizioni [1]. Traiettorie con azione grande $S \gg \hbar$ e che non soddisfano le equazioni del moto sono soppresse dall'interferenza quantistica e sopravvivono solo le traiettorie estremali per le quali $\delta S = 0$. La trattazione di Dirac introduce già una somma sulle traiettorie e l'idea viene sviluppata successivamente da R. P. Feynman³ nella sua tesi di dottorato del 1942. Il metodo di Dirac è oggi universalmente noto come tecnica dell'integrale sui cammini (*path-integral*) di Feynman.

Prima di discutere l'approccio di Dirac-Feynman al problema del limite classico in meccanica quantistica è utile concentrarci su due problemi che illustrano chiaramente le domande *difficili* alle quali vogliamo dare una risposta con questa tecnica. Entrambi gli esempi possono essere formulati in termini elementari per il sistema costituito da un punto materiale, ma le situazioni che discuteremo sono il prototipo per analoghi problemi in contesti più realistici⁴.

Due problemi difficili

¹Notiamo che il problema è molto più semplice in meccanica relativistica dove il parametro di deformazione rispetto alla meccanica galileiana è il rapporto tra la velocità caratteristica e la velocità della luce v/c . In questo caso, la *struttura* delle equazioni non cambia in maniera drastica in presenza di correzioni $\sim v/c$.

²Premio Nobel per la fisica nel 1933 insieme a Erwin Schrödinger.

³Premio Nobel per la Fisica nel 1965 insieme a Sin-Itiro Tomonaga e Julian Schwinger.

⁴Altri problemi molto interessanti legati al limite classico sono, ad esempio, il problema di sistemi a molti corpi o l'emergere del comportamento classico nel passaggio da sistemi microscopici a sistemi macroscopici. Altrettanto interessanti sono i legami tra lo spettro dell'energia e le proprietà ergodiche del moto classico.

Topologia e molteplicità di soluzioni classiche

Il primo problema che consideriamo è quello di una particella quantistica che si muova all'interno di una striscia bidimensionale con pareti riflettenti, come mostrato nella Figura 1. Classicamente, ci sono infinite traiettorie che soddisfano $\delta S = 0$ e che portano dal punto A al punto B nel tempo T . La più breve è rettilinea (1). Oltre a questa ce ne sono infinite altre che si riflettono sulle barriere come le traiettorie (2) e (3) della figura. Dal punto di vista quantistico ci interessa

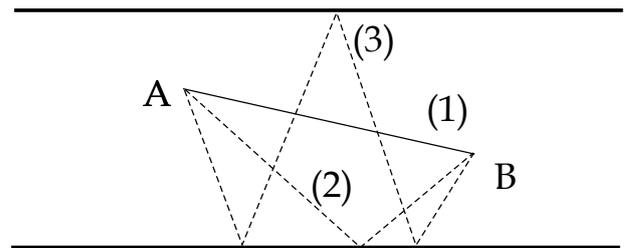


Figura 1: Propagazione classica da A a B nel tempo T in presenza di barriere.

determinare la probabilità che la particella presente in A al tempo $t = 0$ si trovi in B al tempo $t = T$. Inoltre, la domanda che vogliamo porci è *in che modo la molteplicità di soluzioni classiche si riflette sulla propagazione quantistica*. In generale, un problema analogo si pone tutte le volte che la propagazione classica avviene all'interno di geometrie topologicamente non banali. In seguito, mostreremo come l'approccio di Feynman possa illustrare chiaramente il legame tra le traiettorie classiche e la propagazione quantistica almeno nel limite $S/\hbar \gg 1$.

Effetti non perturbativi

Il secondo problema che consideriamo riguarda una particella che si muova nel potenziale simmetrico unidimensionale $V(x) = V(-x)$ con due buche come in Figura 2. Gli stati classici di minima energia corrispondono ad una particella ferma in uno dei due minimi. In meccanica quantistica ci si potrebbe aspettare ingenuamente che a tali stati corrispondano funzioni d'onda localizzate intorno ai minimi, come nella figura. Come è noto questo non è possibile dato che lo stato quantico di minima energia deve obbedire alla simmetria del potenziale. Di fatto, esso risulta essere una combinazione lineare simmetrica

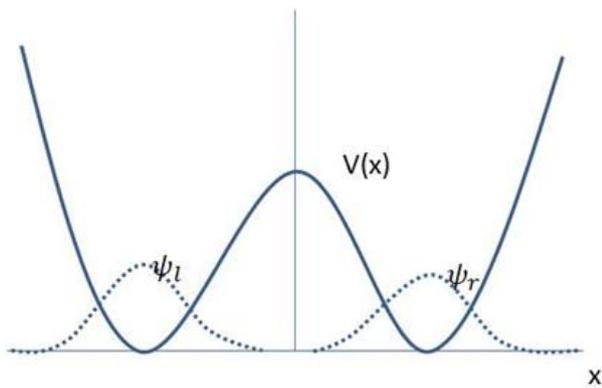


Figura 2: Particella unidimensionale che si muove nel potenziale simmetrico $V(x) = V(-x)$. La figura mostra due funzioni d'onda localizzate intorno ai due minimi classici. Come discusso nel testo, lo stato quantico di minima energia è simmetrico a sua volta ed è costruito come sovrapposizione quantistica simmetrica delle due funzioni d'onda.

delle due funzioni d'onda localizzate mentre il primo stato eccitato è invece associato alla combinazione antisimmetrica. La differenza di energia tra i due stati $\Delta E = E_1 - E_0$ dipende tipicamente dai parametri del potenziale in modo non-perturbativo cioè si annulla a tutti gli ordini nello sviluppo perturbativo in termini di questi parametri. La ragione è che esiste un'azione nascosta S , caratteristica delle doppia buca, tale che ΔE è espresso in termini di $\exp(-S/\hbar)$. Chiaramente lo sviluppo ingenuo in potenze di \hbar/S secondo le tecniche elementari della meccanica quantistica non è applicabile a questo problema. Di nuovo, mostreremo come l'approccio di Feynman consenta di trattare questo problema in modo molto semplice⁵.

La formulazione di Feynman

Per capire in che cosa consista la formulazione di Feynman della meccanica quantistica [2] è utile considerare la quantità seguente

$$K(q'', q'; T) = \langle q'' | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | q' \rangle \quad (3)$$

⁵Dal punto di vista matematico, il problema nasce dal fatto che il limite $\hbar \rightarrow 0$ è una *perturbazione singolare*. I contributi legati ad \hbar che compaiono nell'equazione d'onda di Schrödinger sono associati ai termini con derivate di ordine massimo. Per chi ha familiarità con la fluidodinamica, la situazione è analoga al limite di viscosità zero delle equazioni di Navier-Stokes.

dove gli stati $|q\rangle$ sono autostati (generalizzati) dell'operatore posizione e \hat{H} è l'hamiltoniana indipendente dal tempo del sistema. Feynman chiama questa espressione *propagatore* ed il suo significato fisico è quello di ampiezza di probabilità perché una particella nel punto q' al tempo t sia osservata nel punto q'' al tempo $t + T$. Il problema è determinare in che modo il propagatore *veda* le traiettorie classiche. La domanda non è banale se si pensa alla risposta tipica che lo studente dei corsi elementari di meccanica quantistica fornisce per calcolare K . La procedura standard è questa: supponiamo di conoscere lo spettro di H che per semplicità assumeremo discreto con autovettori ortonormali $|n\rangle$ associati agli autovalori E_n . Dunque possiamo scrivere

$$K(q'', q'; T) = \sum_n \langle q'' | n \rangle \langle n | q' \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} T E_n} \quad (4)$$

Supponendo di poter calcolare la somma infinita otteniamo il risultato cercato che tuttavia è ben lontano dall'essere fisicamente trasparente. In particolare, *non è chiaro dove siano le traiettorie classiche*. Aggiungiamo inoltre che in generale lo spettro di H non è noto. L'idea di Feynman è quella di riscrivere l'espressione di K in modo differente, ma rigorosamente equivalente e più efficace da vari punti di vista, incluso il recupero del limite classico. Tralasciando la derivazione, il risultato di Feynman può essere scritto come integrale funzionale nella forma suggestiva:

$$K(q'', q'; T) = \int_{\substack{q(t')=q' \\ q(t'+T)=q''}} \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S(q(t))} \quad (5)$$

In questa espressione il tempo iniziale t' è arbitrario poiché H non dipende dal tempo. La formula di Feynman è elegante, ma deve essere presa *cum grano salis*. L'espressione in forma di integrale sulle traiettorie è in realtà costruita attraverso una procedura di limite in modo analogo alla costruzione elementare dell'integrale di Riemann. Il simbolo $\mathcal{D}q$ non rappresenta una misura nonostante la notazione, sebbene alcune proprietà siano quelle intuitive suggerite dalla notazione⁶. In termini descrittivi, la for-

⁶Una trattazione rigorosa dal punto di vista della costruzione di una misura funzionale è problematica poiché le traiettorie dominanti sono tipicamente ovunque non differenziabili e a causa della fase complessa nell'in-

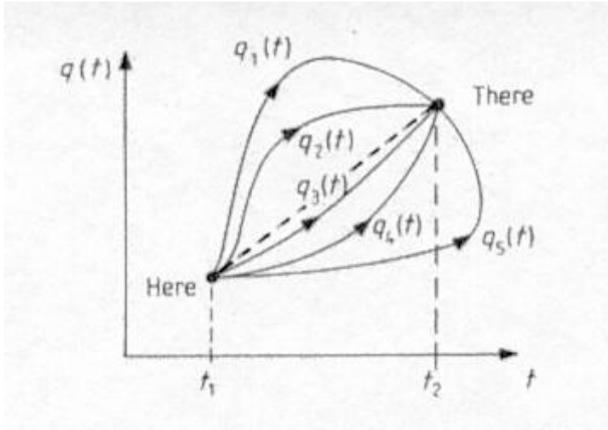


Figura 3: Rappresentazione schematica della formula di Feynman come somma sui cammini classici pesati con una fase che dipende dall'azione. I cammini sono tutti quelli possibili senza necessariamente obbedire alle equazioni del moto classiche.

mula di Feynman esprime il propagatore come somma sui cammini classici pesati con una fase che dipende dall'azione, vedi Figura 3. Il ruolo di questa fase è quello di ricostruire i fenomeni di *interferenza quantistica*. Sottolineiamo che per cammini classici intendiamo funzioni continue del tempo che non hanno a che fare con gli operatori che agiscono su \mathcal{H} , ma non stiamo ancora parlando delle soluzioni delle equazioni del moto classiche. Tuttavia, la presenza esplicita dell'azione $S(q(t))$ nella formula di Feynman suggerisce come procedere.

Il limite classico $S/\hbar \gg 1$

Supponiamo di domandarci quale sia il comportamento del propagatore per un sistema in cui l'azione caratteristica sia grande rispetto alla costante di Planck. Formalmente, questo significa valutare la formula di Feynman nel limite $\hbar \rightarrow 0$. Considerazioni elementari portano alla congettura che l'integrale sia dominato dai punti in cui la fase nel fattore $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ è stazionaria. Ma questa è esattamente la condizione (1) che definisce le traiettorie classiche! Le correzioni successive al

tegrazione. Con opportune continuazioni analitiche, l'integrale di Feynman può essere trattato in modo matematicamente rigoroso e l'espressione del propagatore è legata alla cosiddetta formula di Kac [3]. In questa sede, questi aspetti non sono rilevanti dato che non cambiano la nostra discussione centrata sul legame con il limite classico.

metodo della fase stazionaria portano al calcolo delle correzioni quantistiche come fluttuazioni intorno alle soluzioni classiche. Chiaramente, la formulazione in termini di integrale di Feynman suggerisce sviluppi legati alla *teoria asintotica*. Ad esempio, l'esistenza di punti stazionari non fisici è alla base del calcolo istantonico come vedremo in seguito.

Mostriamo ora come il metodo di Feynman possa trattare agevolmente i due problemi *difficili* che abbiamo illustrato in precedenza.

La particella libera sulla circonferenza

Riprendiamo in considerazione il primo problema discusso in precedenza. Vogliamo mostrare come il metodo di Feynman, nel caso di sistemi con molteplicità di soluzioni classiche, consenta di ritrovare il loro contributo dettagliato almeno nel regime quasi-classico in cui l'azione caratteristica S del problema sia grande rispetto ad \hbar . A questo scopo, analizziamo un problema molto semplice, ma che illustra il meccanismo generale. Si tratta di una particella di massa unitaria che si muove liberamente su una circonferenza di raggio R con traiettoria $\vartheta(t)$ ed azione

$$S = \int dt \frac{1}{2} R^2 \dot{\vartheta}^2 \quad (6)$$

Poiché la circonferenza non è semplicemente connessa, è possibile andare da ϑ_1 a ϑ_2 nel tempo T in infiniti modi a seconda del numero di giri che si compiono intorno alla circonferenza durante il tragitto, come illustrato nella figura Figura 4 che mostra una coppia di traiettorie. Questa molteplicità delle soluzioni classiche deve avere una controparte quantistica come la formula di Feynman mostrerà agevolmente. Il calcolo secondo la formula (4) è molto semplice per questo problema. L'hamiltoniana della particella è

$$H = \frac{p_{\vartheta}^2}{2R^2} = -\frac{\hbar^2}{2R^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \quad (7)$$

Consideriamo autofunzioni periodiche (in seguito commenteremo questa scelta). Esse sono onde

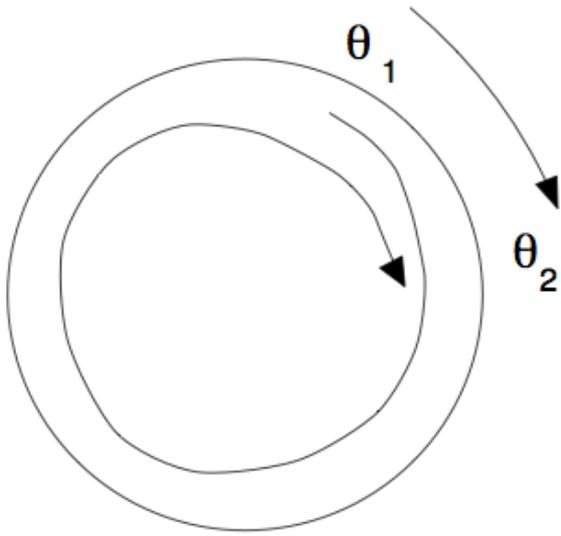


Figura 4: Particella libera su una circonferenza. Classicamente è possibile andare da ϑ_1 a ϑ_2 nel tempo T in infiniti modi a seconda del numero di giri che si compiono intorno alla circonferenza durante il tragitto.

piane

$$\psi_n(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\vartheta}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2R^2} \quad (8)$$

La formula (4) diventa

$$K(\vartheta_2, \vartheta_1; T) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\vartheta_2 - \vartheta_1)} e^{-\frac{i\hbar n^2 T}{2R^2}} \quad (9)$$

In termini della funzione Θ_3 di Jacobi [4]

$$\Theta_3(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(2nz + \pi n^2 \tau)} \quad (10)$$

il propagatore si può scrivere

$$K(\vartheta_2, \vartheta_1; T) = \frac{1}{2\pi} \Theta_3\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \middle| -\frac{\hbar T}{2\pi R^2}\right) \quad (11)$$

Usando a questo punto la proprietà di trasformazione modulare della funzione di Jacobi, ovvero l'identità di Poisson

$$\Theta_3(z|\tau) = (-i\tau)^{-1/2} e^{\frac{z^2}{i\pi\tau}} \Theta_3(z/\tau | -1/\tau) \quad (12)$$

la somma infinita può essere scritta

$$K(\vartheta_2, \vartheta_1; T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n(\vartheta_2, \vartheta_1; T) \quad (13)$$

A. Il propagatore per la particella libera

Il propagatore per la particella libera in una dimensione è

$$K_0(q'', q'; T) = \langle q'' | e^{-\frac{i}{\hbar} T \frac{\hat{p}^2}{2m}} | q' \rangle$$

dove l'operatore impulso è $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq}$. Data la forma semplice dell'hamiltoniana il propagatore non è altro che il nucleo dell'equazione del calore dopo un'opportuna continuazione analitica nella variabile temporale. Come è noto il risultato si scrive

$$K_0(q'', q'; T) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T}\right)^{1/2} e^{\frac{im(q'' - q')^2}{2\hbar T}}$$

dove

$$K_n(\vartheta_2, \vartheta_1; T) = \sqrt{\frac{R^2}{2\pi i \hbar T}} e^{\frac{iR^2(\vartheta_2 - \vartheta_1 + 2\pi n)^2}{2\hbar T}} \quad (14)$$

Notiamo che questa non è altro che la somma dei propagatori della particella libera su \mathbb{R} che percorre nel tempo T la distanza $\vartheta_2 - \vartheta_1 + 2\pi n$ (vedi Inserto A).

Dal punto di vista della formula di Feynman, questo risultato è ovvio. Infatti il calcolo del propagatore con il metodo della fase stazionaria è esatto per azioni quadratiche [5] e si riduce alla somma dei contributi indicati, praticamente senza nessun calcolo. Più in generale, per un'azione più complicata, come pure in dimensione maggiore di uno, la struttura del propagatore è simile e si ottiene analogamente sommando sulle soluzioni classiche topologicamente non equivalenti. Il metodo standard è inapplicabile in un caso generale (non libero) perché lo spettro non è noto e comunque manipolazioni come la trasformazione modulare della funzione di Jacobi sono state *ad hoc*.

Concludiamo commentando la scelta della periodicità $\psi_n(0) = \psi_n(2\pi)$. Più in generale, è consistente con la Meccanica Quantistica, assumere la condizione al contorno $\psi_n(0) = e^{i\varphi} \psi_n(2\pi)$ per valori reali generici di φ . La ragione è che la periodicità fisica deve essere imposta su $|\psi_n|^2$. Il calcolo modificato porta semplicemente a modi-

ficare la somma (13) introducendo un peso $e^{i\varphi n}$ nel contributo K_n . Questa modifica è del tutto accettabile nel quadro della teoria della formula di Feynman per sistemi con spazio delle configurazioni topologicamente non banale.

Doppia buca e istantoni

Passiamo adesso a discutere il problema del comportamento di un sistema con potenziale a doppia buca con il formalismo di Feynman. Consideriamo un potenziale simmetrico $V(x)$ con minimi in $x = \pm a$ come nella parte (a) della figura Figura 5. Effettuando una continuazione analiti-

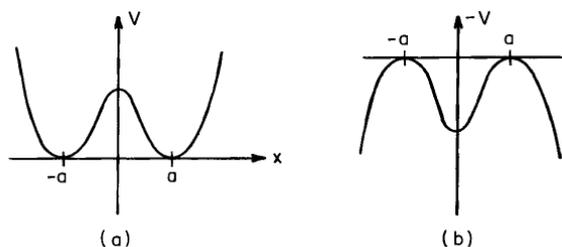


Figura 5: (a) Potenziale a doppia buca (b) il suo opposto, rilevante dopo continuazione analitica della variabile tempo.

ca nella variabile tempo e passando al cosiddetto *tempo euclideo*, le equazioni del moto diventano quelle per il potenziale $-V$ disegnato nella parte (b) di Figura 5. Una soluzione interessante è quella che interpola tra i due massimi (vedi inserto B). Questa soluzione è detta *istantone*⁷[6]. Naturalmente non si tratta di una soluzione fisica poiché è stata fatta una continuazione analitica nel tempo. Dunque, *la soluzione istantonica è analoga ai punti sella nel piano complesso che intervengono nella valutazione asintotica di integrali dipendenti da parametro*. Oltre a questa soluzione ne esistono infinite altre che effettuano un numero arbitrario di salti tra a e $-a$ connettendo approssimativamente (ma correttamente nel limite semiclassico) un certo numero di istantoni elementari. Per esempio, nella Figura 6 è rappresentata una soluzione costituita da un istantone seguito da un anti-istantone. La soluzione parte dal minimo del potenziale in $-a$ per $\tau = -\infty$, effettua una transizione al minimo in a al tempo τ_0 , torna indietro al tempo τ_1 finendo nel minimo

⁷Il nome inventato dal Nobel G. 't Hooft indica che si tratta di un solitone nella variabile tempo.

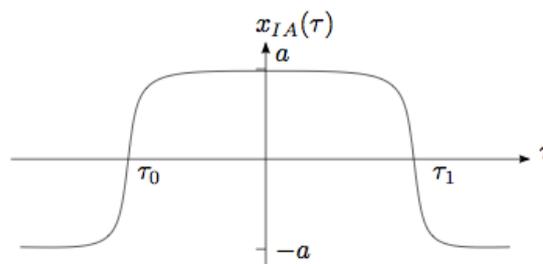


Figura 6: Soluzione costruita combinando un istantone seguito da un anti-istantone.

in $-a$ per $\tau \rightarrow +\infty$. In prima approssimazione, questa soluzione si ottiene giustapponendo due soluzioni elementari che collegano $-a$ con a e viceversa.

Il calcolo del propagatore tra i punti $x = \pm a$ nel tempo (euclideo) T può essere fatta calcolando le fluttuazioni previste dalla formula di Feynman intorno alle soluzioni istantoniche. Il risultato del calcolo è dato dalla formula

$$\langle \pm a | e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} | -a \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\omega T} \times \frac{\exp\left(K e^{-\frac{S}{\hbar}} T\right) \mp \exp\left(-K e^{-\frac{S}{\hbar}} T\right)}{2} \quad (15)$$

dove ω è la pulsazione classica intorno ai minimi di V , K è una combinazione di costanti (massa, parametri del potenziale, etc.), S è l'azione della soluzione istantonica elementare. Confrontando questa espressione con la forma (4) del propagatore concludiamo l'esistenza di uno stato fondamentale $|+\rangle$ e di un primo stato eccitato $|-\rangle$ con energie

$$E_{\pm} = \frac{\hbar\omega}{2} \mp \hbar K e^{-\frac{S}{\hbar}} \quad (16)$$

Dunque, la valutazione dell'integrale di Feynman intorno al punto sella istantonico (che è di fatto una soluzione del problema variazionale classico, per quanto non fisica) prevede due stati con energia pari all'energia di una particella che vede solo uno dei due minimi più un contributo esponenzialmente soppresso nel parametro che regola il regime di quasi-classicità $S/\hbar \gg 1$.

Come abbiamo già accennato, la valutazione di questo *splitting* energetico è notoriamente molto difficile con metodi perturbativi tradizionali, vedi Inserto B. Il calcolo può essere effettuato utilizzando il metodo WKB (Wentzel, Kramers,

B. Un esempio esplicito di doppia buca

Consideriamo un esempio particolare di potenziale a doppia buca e cioè $V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$ per $a, \lambda > 0$. Introducendo il tempo euclideo $\tau = -it$, il fattore $\exp(iS/\hbar)$ diventa $\exp(-S_E/\hbar)$ con azione euclidea (le derivate sono ora rispetto a τ)

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{m}{2} x'^2 + V(x) \right)$$

Il principio variazionale porta alle equazioni del moto $-m x'' + V'(x) = 0$. Si noti che il potenziale euclideo ha segno opposto rispetto a quello in tempo reale. Le equazioni del moto sono equivalenti alla conservazione dell'energia che, per la soluzione istantonica $x(\tau) = a \tanh\left(a \sqrt{\frac{2\lambda}{m}} \tau\right)$, predice $-\frac{m}{2} x'^2 + V(x) = 0$. Quindi, cambiando variabile, l'azione istantonica risulta

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2V = \int_{-a}^a dx \sqrt{2mV} = \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \sqrt{m\lambda}$$

Se ora introduciamo la pulsazione intorno ai minimi $\omega^2 = \frac{V''(a)}{m} = \frac{8a^2\lambda}{m}$, possiamo scrivere l'azione istantonica come la seguente funzione di λ a ω fissato

$$S_E = \frac{m^2 \omega^3}{12 \lambda}$$

Da questa formula risulta chiaro che l'approccio perturbativo in λ come piccola perturbazione rispetto al potenziale armonico con pulsazione ω porta a correzioni $\exp(-S_E/\hbar)$ che sono zero a tutti gli ordini in λ . Fisicamente, il limite $\lambda \rightarrow 0$ con ω fissato corrisponde ad un potenziale descritto da due buche approssimativamente armoniche situate a grande distanza e separate da una barriera di altezza $\sim 1/\lambda$. Il fattore esponenzialmente soppresso $\exp(-S_E/\hbar)$ è legato alla probabilità di penetrazione di questa barriera.

Brillouin) che tuttavia incontra notevoli problemi nell'essere esteso a più di una dimensione. La trattazione di Feynman è invece molto più potente e non ha queste limitazioni.

Concludiamo ricordando che un sistema unidimensionale con potenziale a doppia buca è un buon modello per la molecola di ammoniacca NH_3 , Figura 7. Il fattore di correzione $e^{-\frac{S}{\hbar}}$ è legato alla probabilità di transizione tra i due stati della molecola (vedi ancora Inserto B). La differenza di energia tra i due livelli più bassi è di $9.84 \cdot 10^{-5}$ eV che corrisponde ad una frequenza $\Delta E/h$ di circa 24 GHz che caratterizza il MASER all'ammoniacca.

Conclusioni

La formulazione di Feynman della meccanica quantistica è rigorosamente equivalente all'ap-

proccio tradizionale, ma pone al centro dell'attenzione l'azione classica S . Di conseguenza, molte proprietà di natura classica legate alla soluzione del problema variazionale $\delta S = 0$ hanno un ruolo importante. Abbiamo visto due esempi di questo aspetto generale. Nel primo, la topologia non-banale dello spazio delle configurazioni implica l'esistenza di infinite soluzioni globali del problema variazionale. Queste sono immediatamente presenti nella formulazione di Feynman e forniscono un'interpretazione a quantità quantistiche che sarebbero altrimenti decisamente oscure. Nel secondo esempio, il problema variazionale classico ammette soluzioni non fisiche ottenute per continuazione analitica. Di nuovo, la formula di Feynman ne tiene conto in maniera naturale e consente di calcolare in modo estremamente semplice quantità che sarebbero altrimenti elusive.

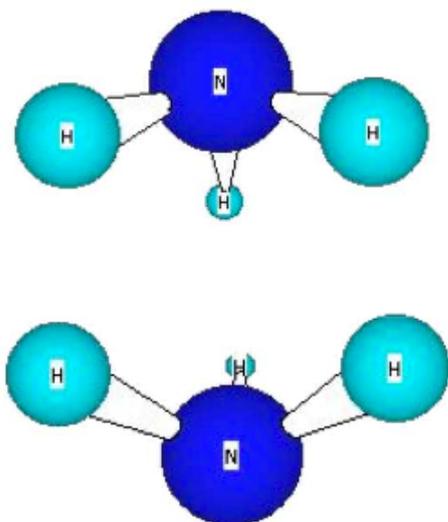


Figura 7: Rappresentazione schematica della molecola di ammoniaca nei due stati modellizzati dalle due buche del potenziale discusso nel testo.



[1] P. A. M. DIRAC: "The Lagrangian in quantum mechanics", *Phys. Z. der Sowjetunion* **3** (1933) 64-71.

[2] R. P. FEYNMAN: "The Space-Time Formulation of Non-relativistic Quantum Mechanics", *Reviews of Modern Physics* **20** (2) (1948) 367-387.
 [3] B. SIMON: *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press (1979).
 [4] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications (1972).
 [5] L. S. SCHULMAN: *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley (1981).
 [6] T. SCHAEFER, E. SHURYAK: "Instantons in QCD", *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 323-426.



Matteo Beccaria: si è laureato in fisica nel 1991 presso l'Università di Pisa e ha conseguito il Diploma di Licenza in fisica presso la Scuola Normale Superiore. Nel 1995 ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca presso l'Università di Pisa. Dal 2002 è Professore Associato di Fisica Teorica all'Università del Salento dove insegna Teoria dei Campi Quantizzati. Si occupa di teoria delle interazioni fondamentali ed in particolare di teoria di stringa.