
Il problema di Newton dei profili aerodinamici ottimi

Giuseppe Buttazzo

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

La ricerca del profilo di un corpo solido che presenta la minima resistenza al moto è uno dei primi problemi del calcolo delle variazioni e fu posto da Newton nel 1685. Newton non disponeva della teoria dei fluidi e delle equazioni a derivate parziali della fluidodinamica, tuttavia sviluppò un modello molto semplice per calcolare la resistenza al moto di un corpo solido in un fluido.

Nel suo *Principia Mathematica* Newton scrive:

Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. [...] Quam quidem propositio-nem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.¹

¹Libro II, Proposizione XXXIV, Teorema XXVIII: *Una sfera ed un cilindro di uguale diametro si muovano parallelamente all'asse del cilindro, immersi in un mezzo rarefatto composto di particelle identiche, disposte senza vincoli a distanza costante l'una dall'altra: la resistenza della sfera sarà la metà della resistenza del cilindro. Nel successivo scolio: Senza dubbio ritengo che la proposizione non sarà inutile per l'ingegneria navale.*

Per capire quanto la resistenza incide sul moto di un corpo partiamo da un semplice problema di balistica: il lancio di un oggetto nel vuoto. Tale fenomeno è governato dalla legge di Newton

$$\text{massa} \cdot \text{accelerazione} = \text{forze in gioco}$$

dove le forze in gioco si riducono nel nostro caso alla sola forza di gravità. Supponendo la gravità costante, ipotesi ragionevole per lanci di breve gittata, ma non per lanci balistici di migliaia di km, con facili calcoli si ricava l'equazione della traiettoria:

$$y = x \tan \theta - \frac{g(1 + \tan^2 \theta)}{2v^2} x^2$$

La traiettoria è dunque un arco di parabola che non dipende dalla massa del corpo lanciato; nell'equazione precedente abbiamo indicato con

θ = angolo di tiro;
 v = velocità iniziale;
 g = accelerazione di gravità.

Ad esempio, usando i dati:

$$v \sim 100 \text{ km/h} \sim 27.78 \text{ m/sec};$$
$$g \sim 9.8 \text{ m/sec}^2 \text{ (sulla terra)}$$

si trovano le traiettorie riportate in Figura 1, con gittata

$$L = \frac{2v^2 \tan \theta}{g(1 + \tan^2 \theta)}$$

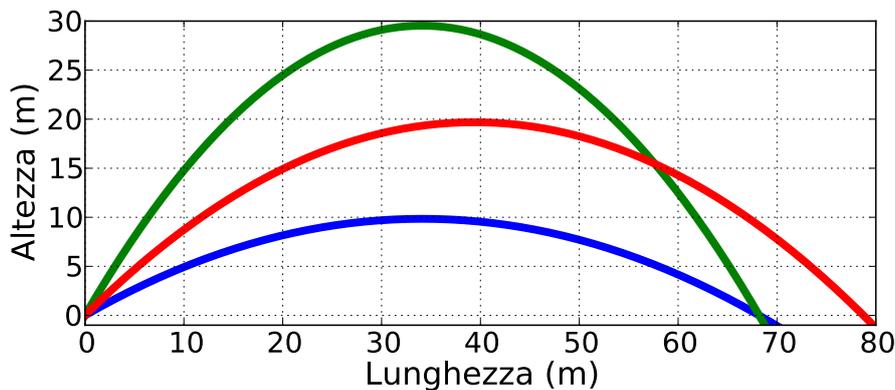


Figura 1:

$L \sim 68.2 \text{ m}$ con $\theta = 30^\circ$,
 $L \sim 68.2 \text{ m}$ con $\theta = 60^\circ$,
 $L \sim 78.7 \text{ m}$ con $\theta = 45^\circ$.

Si trova, come è ben noto, che la *gittata massima* L_{max} vale

$$L_{max} = \frac{v^2}{g} \quad \text{in corrispondenza di } \theta = 45^\circ$$

Un modello matematico più realistico (almeno per lanci balistici sulla Terra) deve però tener conto della *resistenza dell'aria* che è una forza R che dipende dalla velocità:

$$R = c \phi(v)$$

dove ϕ è una funzione che si ricava sperimentalmente e c è una costante che dipende dalla *forma* dell'oggetto lanciato.

Utilizzando ad esempio $\phi(v) = v$ l'equazione del moto è un'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e si trova con facili calcoli un'espressione esplicita della traiettoria, data da:

$$y = x \tan \theta + \frac{gm}{c} \left[\frac{x}{v \cos \theta} + \frac{m}{c} \log \left(1 - \frac{cx}{mv \cos \theta} \right) \right]$$

Le traiettorie non sono più archi di parabola; inoltre esse dipendono dalla massa dell'oggetto lanciato e dalla costante c , che a sua volta dipende dalla *forma* dell'oggetto stesso. Alcune traiettorie sono riportate in Figura 2, dove si è usato un coefficiente c piuttosto grande per evidenziare meglio l'effetto della resistenza dell'aria e la natura non parabolica delle curve.

Va notato che la gittata massima non si ottiene più per $\theta = 45^\circ$ ma per angoli più piccoli, dipendenti dai dati del problema. Inoltre, la resistenza dell'aria fa diminuire notevolmente la gittata massima; la tabella in Figura 3 mostra l'effetto

della resistenza dell'aria sulla gittata massima di alcuni proiettili comuni.

La resistenza aerodinamica di un oggetto è data da

$$R = \frac{1}{2} \rho S C v^2$$

dove ρ è la densità del fluido in cui avviene il moto, v la velocità dell'oggetto, S l'area della sezione ortogonale al moto, C il coefficiente aerodinamico dipendente dalla forma dell'oggetto.

Nella pratica, si calcola la resistenza tramite *galleria del vento* e si deduce il coefficiente C dalla formula precedente. Qui di seguito, in Figura 4 alcuni coefficienti aerodinamici di alcune note automobili, ed in Figura 5 alcuni altri coefficienti aerodinamici.

Il modello di Newton per calcolare la resistenza aerodinamica di un corpo solido si ottiene facilmente supponendo le condizioni seguenti:

- il fluido è supposto costituito da particelle *indipendenti* che si muovono con velocità costante;
- la resistenza è dovuta soltanto agli urti delle particelle del fluido con la superficie del corpo, urti che sono supposti *perfettamente elastici*;
- ogni particella urta la superficie del corpo solido al più una sola volta;
- si trascurano l'attrito tangenziale ed altri effetti quali la *vorticità* e le *turbolenze*.

Notiamo che la condizione di singolo urto si ha ad esempio se il corpo solido in questione è *convesso*.

Con facili argomenti di trigonometria elementare si trova allora che la pressione in un punto

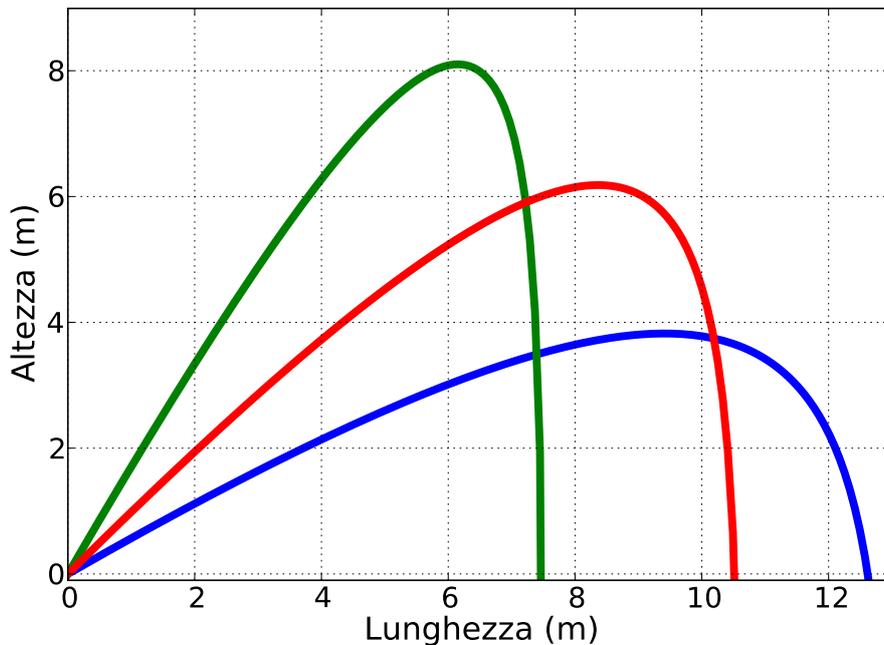


Figura 2:
 $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 45^\circ$.

del profilo del corpo è proporzionale a $\sin^2 \theta$, dove θ è l'inclinazione del profilo del corpo rispetto alla direzione del moto, come illustrato in Figura 6.

Descrivendo il profilo del corpo mediante il grafico di una funzione $u(x)$ definita sulla sezione Ω ortogonale al moto, si trova

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2(\pi/2 - \theta)} = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}$$

e la resistenza totale sarà quindi proporzionale a

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} dx$$

tramite il coefficiente di proporzionalità ρv^2 , dove ρ è la densità del fluido e v la sua velocità.

Dividendo la resistenza totale per l'area della sezione Ω otteniamo la resistenza relativa del profilo u (spesso chiamata *coefficiente* C_x):

$$C(u) = \frac{F(u)}{|\Omega|}$$

Le seguenti osservazioni sono immediate:

- si ha sempre $0 \leq C(u) \leq 1$;
- se il corpo ha un profilo *piatto*, cioè se u è costante, si ha $C(u) = 1$;
- se il corpo è una *semisfera* di raggio R si ha

$u(x) = \sqrt{R^2 - |x|^2}$ e si trova

$$C(u) = \frac{F(u)}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2 - r^2}{R^2} r dr = \frac{1}{2}$$

in accordo con quanto previsto da Newton nel 1685.

Alcuni corpi con $C(u) = 1/2$ (o vicino a $1/2$) sono illustrati nelle Figure 7 e 8.

Studiamo ora il problema di trovare il profilo ottimo in una classe di profili *ammissibili*:

$$\min \left\{ F(u) : u \text{ profilo ammissibile} \right\}$$

Calibro	Velocità m/s	Gittata in m.	nel vuoto m.
4,5 mm aria compressa	120	100	1469
4,5 mm aria compressa	200	200	4082
6/9 mm Flobert	225	700	5166
.22 corto	260	1000	6898
.22 Long Rifle	350	1370	12500
.22 Long Rifle HS	370	1500	13969
.22 Winch. Magnum	610	1800	37969
243 Winch.	1070	3200	116827
6,35 mm	220	800	4939
7,65 mm	285	1300	8288
9 mm corto	285	1300	8288
9 mm Para	350	1700	12500
.45 ACP	300	1620	9184
30 M1Carb.	600	2000	36735
7x70 mm	830	3500	70296
8x57 mm JS	830	3500	70296
6,5x57 mm	1020	4000	106163
7x57 mm	850	4500	73724
6,5x68 mm	1150	5000	134949

Figura 3: Effetto della resistenza dell'aria sulla gittata di alcuni proiettili.

Alfa Romeo Giulia	1964	0,43
Alfa Romeo Alfetta	1972	0,42
Alfa Romeo 33	1983	0,36
Alfa Romeo 90	1984	0,37
Alfa Romeo 75	1985	0,32
Alfa Romeo 75 Turbo Evoluzione	1987	0,30
Alfa Romeo 164	1988	0,31
Alfa Romeo RZ/SZ	1989	0,30
Alfa Romeo 155	1992	0,29
Alfa Romeo 156 Berlina	1997	0,31
Alfa Romeo 156 Sportwagon	1999	0,30
Alfa Romeo 159	2006	0,32
Alfa Romeo Mi.To. 1.6 JTDm 120 cv	2008	0,29
Alfa Romeo Mi.To. 78 cv	2008	0,35

Figura 4: I coefficienti aerodinamici di alcune Alfa Romeo.

Il problema considerato da Newton limitava la classe dei profili ammissibili a quelli con *simmetria radiale*, verificanti inoltre l'ipotesi di convessità in modo da verificare la condizione di urto singolo delle particelle di fluido con la superficie del corpo solido. La stessa limitazione veniva imposta in tutti i trattati di calcolo delle variazioni (Bliss, Bolza, Carathéodory, Cesari, Hestenes, Miele, Tonelli, Young, ...).

La prima formulazione generale del problema si trova in [1] ed in [2]. I problemi che si pongono sono:

- individuazione di una classe "naturale" di profili ammissibili;
- dimostrazione dell'esistenza di un profilo ottimo;
- studio delle "condizioni necessarie di ottimalità" che i profili ottimi verificano;
- questione della *radialità* dei profili ottimi nel caso in cui la sezione Ω sia un cerchio;
- eventuale "rottura di simmetria" nel caso in cui ciò non avvenga e conseguente *non unicità* della soluzione ottima.

Il funzionale F non è convesso nè coercivo, per cui i *metodi diretti* del calcolo delle variazioni non sono applicabili. Inoltre, senza ulteriori restrizioni alla classe dei profili ammissibili, l'estremo inferiore del funzionale F è zero, come si vede subito considerando le funzioni

$$u_n(x) = n \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

Rumpler Tropfenwagen	1921	0,29
Volkswagen Maggiolino	1946	0,38
Volkswagen New Beetle	1999	0,38
Fiat 500	2009	0,32
Maserati Gran Sport	2009	0,33
Toyota Prius	2009	0,25
Mercedes Classe E Coupé	2009	0,24
Ferrari 360 Modena Novitec	2004	0,35
Aprilia RSV 1000 R		0,30
Go Kart		0,80
Formula Uno		0,90
Aereo leggero		0,12
Ciclista da turismo		1,00
Goccia d'acqua		0,05

Figura 5: Alcuni altri coefficienti aerodinamici.

(coni di base Ω ed altezza che tende a $+\infty$), per cui si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = 0$$

ed evidentemente nessun corpo solido ha resistenza nulla. Dunque senza ulteriori restrizioni sulle funzioni ammissibili il profilo ottimo *non esiste*.

Si potrebbe erroneamente pensare che la non esistenza del minimo di F sia dovuta al fatto che le funzioni u_n non verificano limitazioni uniformi. Tuttavia, anche imponendo ai profili ammissibili un vincolo del tipo

$$0 \leq u(x) \leq M \quad \forall x \in \Omega$$

si ottiene ancora che l'estremo inferiore di F è

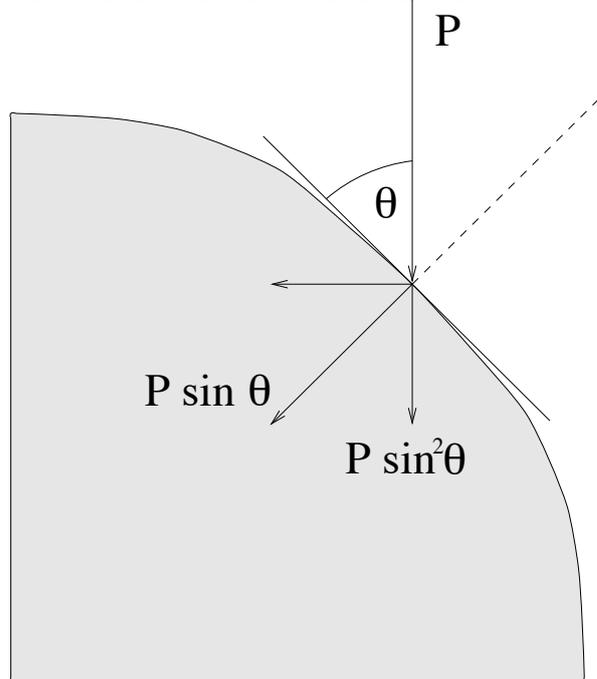


Figura 6: La legge di pressione di Newton.

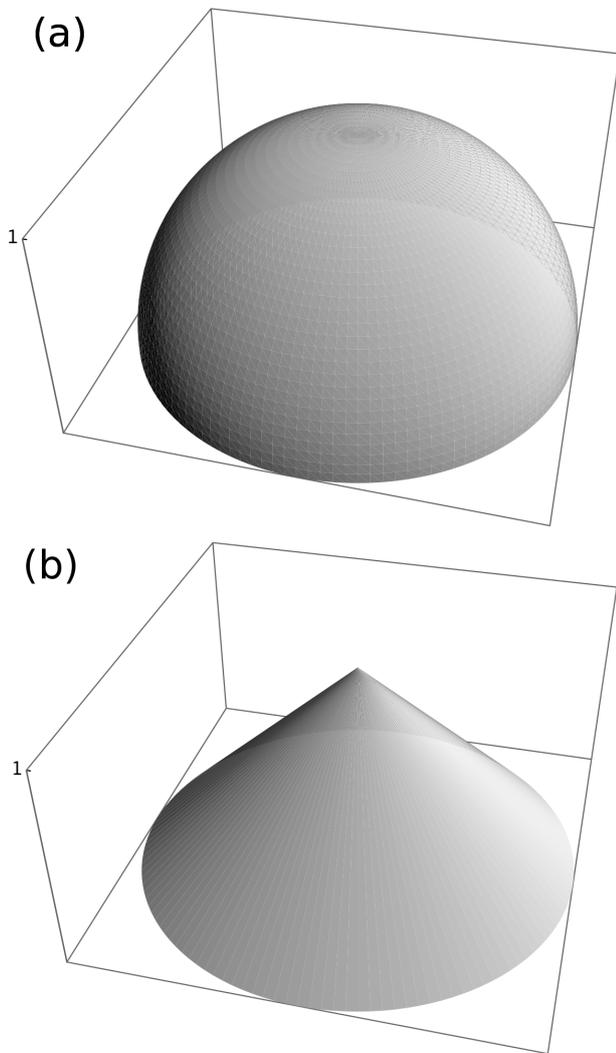


Figura 7: (a) semisfera; (b) cono.

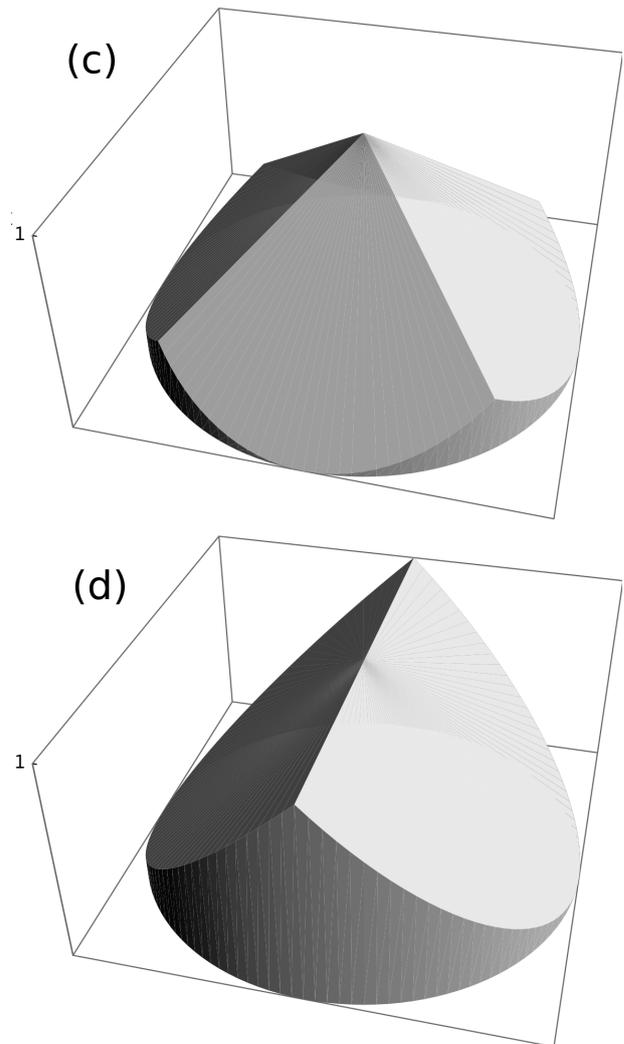


Figura 8: (c) una forma piramidale; (d) un'altra forma piramidale.

zero, come mostrano ad esempio le funzioni

$$u_n(x) = M \sin^2(n|x|)$$

per le quali si ha ancora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = 0$$

Tuttavia, per profili del tipo del grafico di $M \sin^2(n|x|)$ le particelle del fluido hanno *urti multipli* con il corpo, ed il modello di Newton, che considera solo il primo urto, non è più valido. Consideriamo allora soltanto corpi convessi per i quali gli urti sono sempre singoli; in altri termini, restringiamo l'analisi alle funzioni $u(x)$ che sono concave, e quindi il problema di Newton diventa:

$$\min \left\{ F(u) : 0 \leq u \leq M, u \text{ concava in } \Omega \right\}$$

Vedremo che questo problema risulta ben posto. Condizioni più generali della convessità, che ancora assicurano un solo urto delle particelle di fluido con il corpo solido, sono state considerate ad esempio in [3], [4].

Nel caso unidimensionale (o quando il profilo dipende solo da una dimensione) Ω è il segmento $[0, L]$ ed il problema diventa:

$$\min \left\{ \int_0^L \frac{1}{1+|u'|^2} dx : 0 \leq u \leq M, u \text{ concava in } [0, L] \right\}$$

In tal caso le soluzioni ottime sono le seguenti, illustrate in Figura 9:

- se $M \geq L/2$ il profilo ottimo è dato dal triangolo isoscele di altezza M ;

- se $M < L/2$ il profilo ottimo è dato dal trapezio isoscele di altezza M e pendenza laterale uguale ad 1.

Nel caso bidimensionale di Ω un cerchio di raggio R , e restringendosi alle funzioni $u(r)$ con simmetria radiale, scrivendo la resistenza in coordinate polari si trova

$$F(u) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} dr$$

e di conseguenza il problema di Newton per corpi a simmetria cilindrica diventa allora:

$$\min \left\{ \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} dr : u(0) = M, \right. \\ \left. u(R) = 0, u \text{ concava} \right\}$$

Tale problema di minimo ammette l'equazione di Eulero-Lagrange

$$ru' = C(1 + u'^2)^2 \quad \text{su } \{u' \neq 0\}$$

con $C < 0$ costante. La soluzione u si può calcolare esplicitamente in forma parametrica utilizzando la funzione

$$f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t \right) \quad \forall t \geq 1$$

che risulta strettamente crescente, e le quantità

$$T = f^{-1}(M/R), \quad r_0 = \frac{4RT}{(1+T^2)^2}$$

Si trova allora che il profilo ottimo u è dato da $u(r) = M$ per $r \in [0, r_0]$ e $\forall t \in [1, T]$

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{4t} (1+t^2)^2 \\ u(t) = M - \frac{r_0}{4} \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t \right) \end{cases}$$

Osserviamo che:

- il profilo radiale ottimo ha sempre una zona piatta;
- la soluzione ottima radiale è lipschitziana ed è unica;
- la soluzione ottima radiale si annulla su $\partial\Omega$;
- $|u'(r)| > 1$ per ogni $r > r_0$ ed $|u'(r_0^+)| = 1$; in particolare si ha $|u'(r)| \notin]0, 1[$.

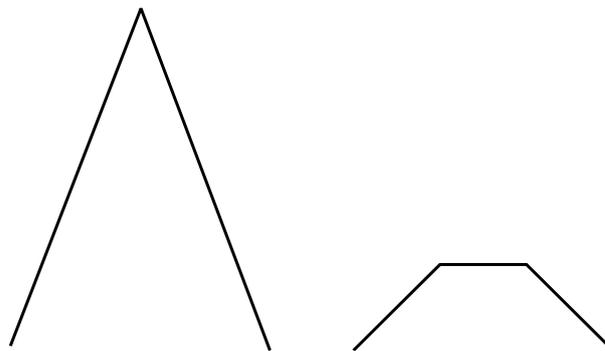


Figura 9: Profili ottimi in dimensione uno: $M \geq L/2$ (sinistra), $M \leq L/2$ (destra).

Alcuni profili ottimi sono illustrati nelle Figure 10, 11, 12.

La resistenza relativa $C(u)$ dei corpi radiali ottimi, ed il raggio r_0 della zona piatta superiore, dipendono solo dal rapporto M/R . Ad esempio si ha:

	$M/R = 1$	$M/R = 2$	$M/R = 3$	$M/R = 4$
r_0/R	0.35	0.12	0.048	0.023
$C(u)$	0.37	0.16	0.082	0.049

e per $M/R \rightarrow +\infty$ si hanno le stime asintotiche:

$$r_0/R \approx \frac{27}{16} (M/R)^{-3} \quad \text{per } M/R \rightarrow +\infty$$

$$C(u) \approx \frac{27}{32} (M/R)^{-2} \quad \text{per } M/R \rightarrow +\infty$$

Nel problema di Newton, di minimo per il funzionale

$$\int_{\Omega} \frac{1}{1 + |Du|^2} dx$$

altri tipi di vincoli possono essere imposti (sempre mantenendo la condizione di concavità):

- vincoli di volume $\int_{\Omega} u dx \leq m$;
- vincoli di superficie $\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \leq m$.

Per un panorama sulle possibili applicazioni del problema di Newton in aerodinamica si può consultare ad esempio il libro di A. Miele [6].

Il risultati di esistenza di un profilo aerodinamico ottimo è il seguente

Teorema 1. Se la sezione Ω è convessa il problema di Newton ha soluzione ottima nella classe dei profili $u(x, y)$ tali che

$$0 \leq u \leq M, \quad u \text{ è concava}$$

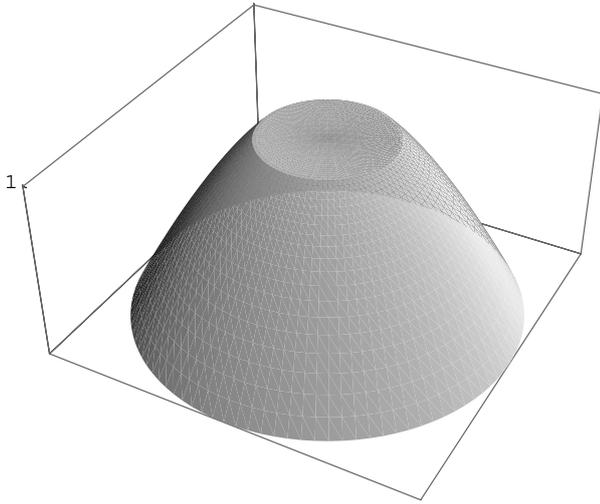


Figura 10: La forma ottima radiale nel caso $M = R$.

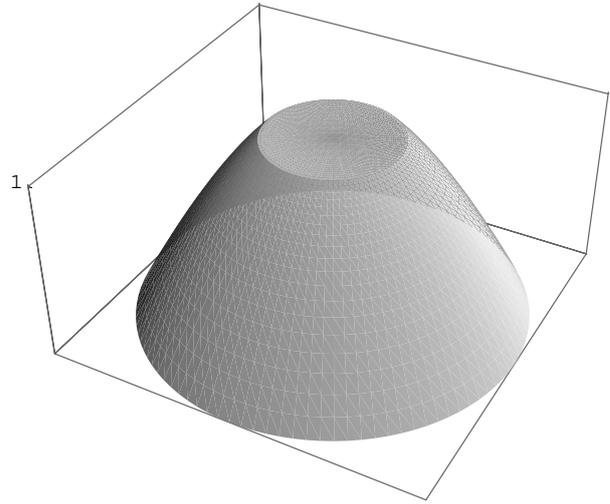


Figura 12: La forma ottima radiale nel caso $M = R/2$.

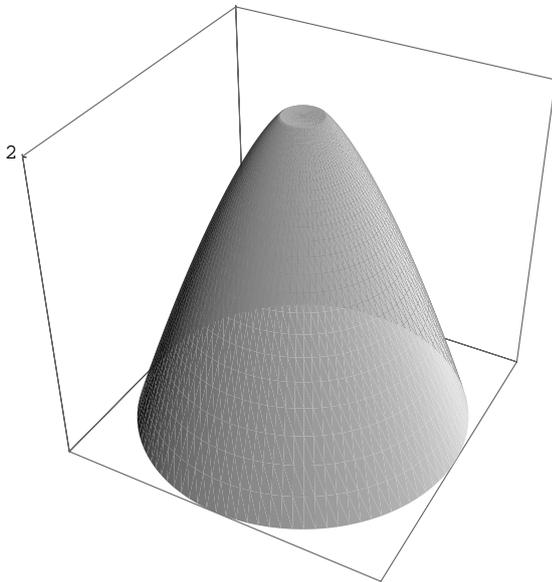


Figura 11: La forma ottima radiale nel caso $M = 2R$.

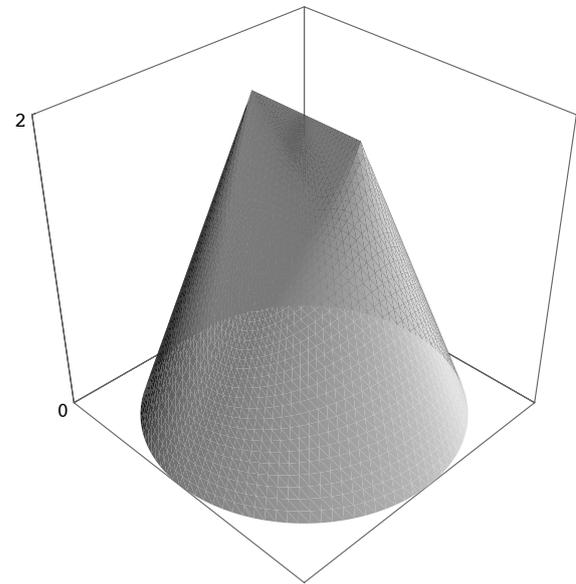


Figura 13: Un profilo "a cacciavite".

Faremo ora vedere che nel caso in cui Ω è un disco, non si ha una soluzione con simmetria radiale. Mostreremo tale *rottura di simmetria* in vari modi. Un primo modo, sviluppato in [5], consiste nell'esibire un profilo con resistenza inferiore al miglior profilo radiale. Considerando un profilo del tipo illustrato in Figura 13 e scegliendo opportunamente la lunghezza del segmento in alto, cioè l'insieme $\{u = M\}$, si può calcolare la resistenza del profilo così ottenuto e si trova per $M/R \rightarrow +\infty$:

$$C(u) \approx 0.77(M/R)^{-2} < \frac{27}{32}(M/R)^{-2} \approx C(u_{rad})$$

Dunque, per M/R abbastanza grande (maggiore di 2 nel calcolo fatto in [5]) la soluzione non può essere radiale. Resta il caso M/R piccolo, che si studia attraverso alcune condizioni necessarie di ottimalità, cioè condizioni che una soluzione, per il fatto che è ottima, deve verificare.

Teorema 2. Sia Ω un insieme convesso di \mathbb{R}^N e sia u una soluzione del problema di Newton. Supponiamo che in un aperto ω la funzione u sia di classe C^2 e che in ω sia $u < M$. Allora si ha

$$\det \nabla^2 u \equiv 0 \quad \text{in } \omega$$

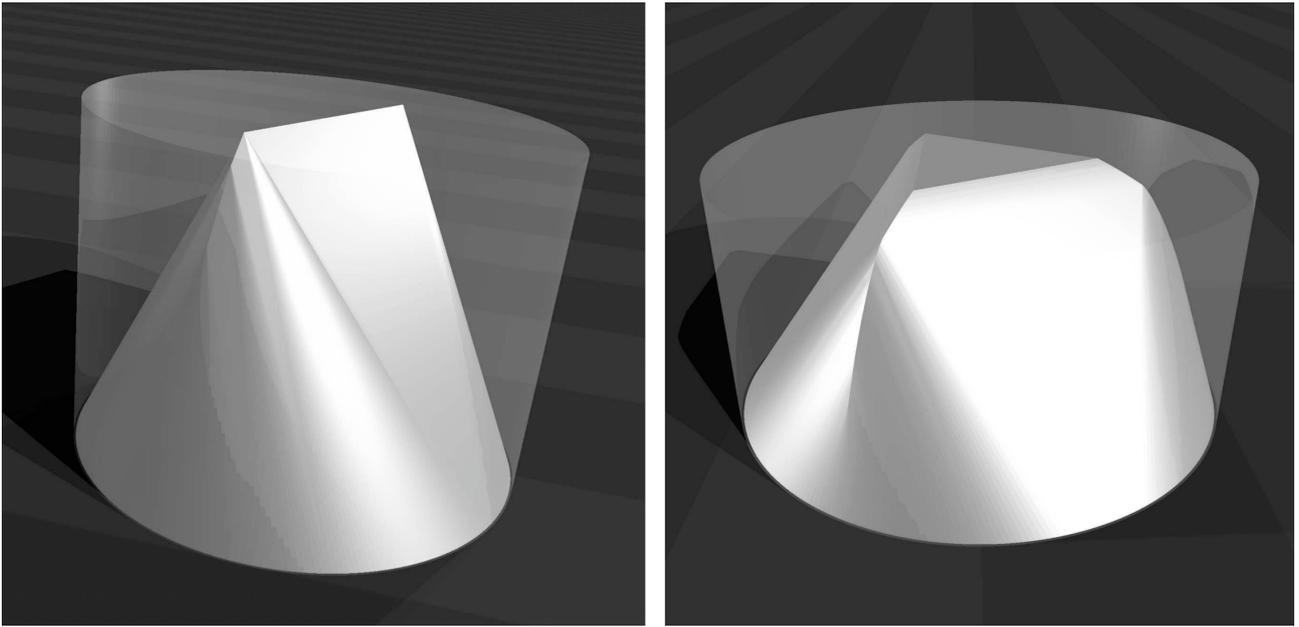


Figura 14: *Un profilo ottimo abbastanza alto (sinistra), un profilo ottimo più basso (destra).*

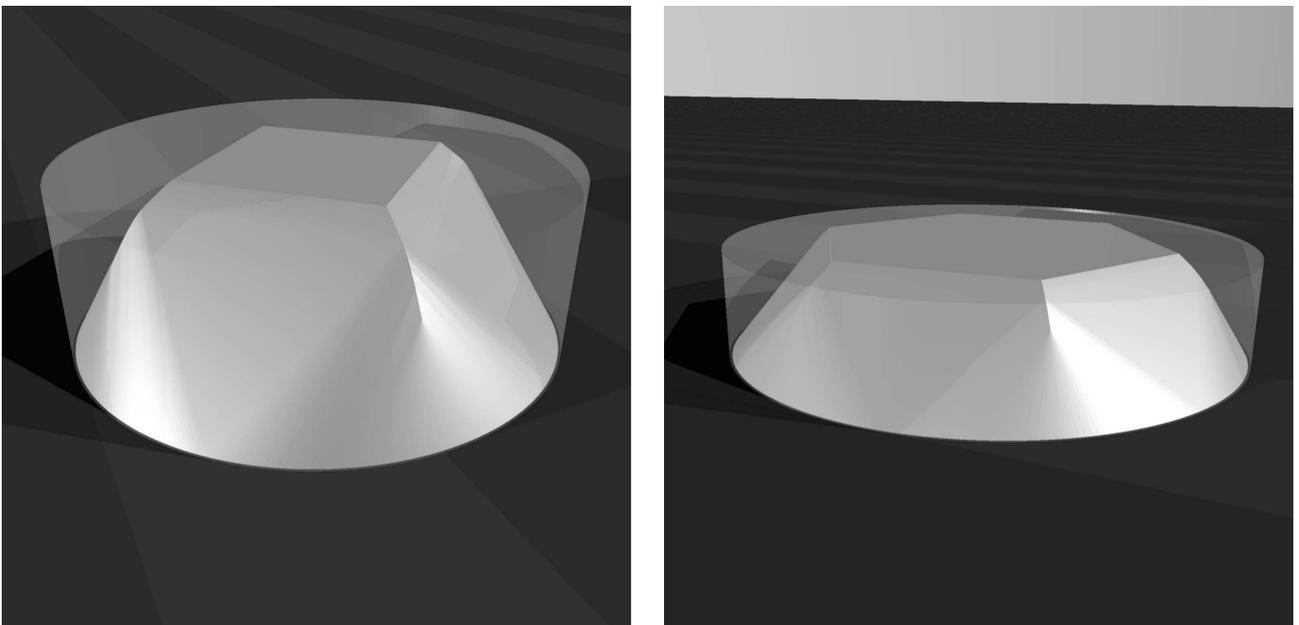


Figura 15: *Un profilo ottimo ancora più basso (sinistra), un profilo ottimo molto basso (destra).*

Corollario 3. *Il problema di Newton non ha soluzioni radiali, per alcun valore di M . Infatti, applicando il teorema precedente alla soluzione radiale, in una regione dove essa è regolare, si trova una contraddizione.*

Caratterizzare le soluzioni del problema di Newton è ancora una *questione aperta*. In particolare non è noto come deve essere fatta la zona superiore $\{u = M\}$ e non si sa se u è regolare nella zona $\{u < M\}$. Si hanno solo dei risultati numerici sulla forma dei profili ottimi; quelli che mostriamo qui nelle Figure 14 e 15 sono stati ottenuti da E. Oudet.



- [1] G. BUTTAZZO, B. KAWOHL: *On Newton's problem of minimal resistance*. Math. Intelligencer, **15** (1993), 7–12.
- [2] G. BUTTAZZO, V. FERONE, B. KAWOHL: *Minimum problems over sets of concave functions and related questions*. Math. Nachr., **173** (1995), 71–89.
- [3] M. COMTE, T. LACHAND-ROBERT: *Existence of minimizers for Newton's problem of the body of minimal resistance under a single impact assumption*. J. Anal. Math., **83** (2001), 313–335.

- [4] M. COMTE, T. LACHAND-ROBERT: *Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption*. Calc. Var. Partial Differential Equations, **12** (2) (2001), 173–211.
- [5] P. GUASONI: *Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi*. Tesi di Laurea, Università di Pisa, 1995-1996.
- [6] A. MIELE: *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*. Academic Press, New York (1965).



Giuseppe Buttazzo: Ha conseguito la Laurea in Matematica nel 1976 presso l'Università di Pisa ed il Diploma nel 1976 presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Dal 1987 al 1990 è stato professore ordinario di Analisi Matematica all'Università di Ferrara e dal 1990 all'Università di Pisa. Si occupa di Calcolo delle Variazioni, Equazioni alle Derivate Parziali, Ottimizzazione.

