Eunomia. Rivista di studi su pace e diritti umani
Eunomia XIII n.s. (2024), n. 1, 27-50
e-ISSN 2280-8949
DOI 10.1285/i22808949a13n1p27
http://siba-ese.unisalento.it,

DEMETRIO RIA

Fenomenologia dell'intuizione matematica: tra epistemologia e didattica

Intuizione e matematica

Secondo Husserl, affinché i concetti matematici siano pienamente compresi, essi devono essere "intuiti". La comprensione che rimane al livello simbolico non basta. Tali intuizioni sono necessarie, ad esempio, per re-identificare i concetti matematici. Ad esempio, capire come viene utilizzato il simbolo "+" in una data formula matematica non è sufficiente: deve esserci la possibilità di identificare l'operazione di addizione come avente una certa caratterizzazione e riconoscerla come la stessa operazione utilizzata in precedenza. Questo requisito può anche essere visto da una prospettiva non husserliana. La necessità di una tale identificazione è manifesta nella famosa interpretazione di Kripke del problema di Wittgenstein: come possiamo essere sicuri che il "+" che stiamo usando in un'equazione aritmetica abbia ora lo stesso "significato" del "+" che abbiamo usato in un'altra equazione aritmetica? Nella concezione husserliana, l'assicurazione in questione è fornita da un'intuizione del significato di "+". La necessità di un livello di apprensione che garantisca l'identità e l'oggettività dei concetti matematici esiste anche nei casi in cui abbiamo una caratterizzazione formale completa di un concetto. L'apprensione intuitiva ci aiuta a comprendere i significati dei concetti e fornisce la giustificazione ultima per ciò che consideriamo essere il loro significare. Un altro contesto che fa luce sul ruolo dell'intuizione nella nostra comprensione dei concetti matematici è quello della necessità di giustificare le regole di inferenza nella logica. La regola formale del *modus ponens*, ad esempio, non fornisce di per sé la giustificazione definitiva per l'inferenza. Qualcos'altro deve assicurarci che questa regola è corretta. Ancora un altro contesto in cui l'intuizione è necessaria è quello della giustificazione degli assiomi di un sistema formale. Una comprensione intuitiva della verità degli assiomi fornisce questa giustificazione. Secondo Husserl,

> L’immediato ‘vedere’, non soltanto il vedere sensibile, empirico, ma il vedere in generale, come coscienza originalmente offerente di qualunque specie, è la sorgente ultima di legittimità di tutte le affermazioni razionali. Essa ha funzione legittimante solo perché e in quanto è originalmente offerente. Soltanto se vediamo un oggetto in piena chiarezza, se lo esplichiamo e lo comprendiamo concettualmente sulla base del vedere e nell’ambito di ciò che abbiamo effettivamente afferrato nel vedere, se quindi vediamo (come in una nuova modalità del ‘vedere’) come esso è strutturato, allora l’asserzione, che esprime fedelmente tutto ciò, è legittima. (Husserl, *Idee*, §19).

Prima di addentrarci nelle varie interpretazioni di questa nozione husserliana di intuizione nel contesto della matematica, sarà utile confrontarla con due posizioni precedenti, ma centrali, sul ruolo dell'intuizione nella conoscenza matematica, quelle di Descartes e Kant. Secondo Descartes intuizione e deduzione sono le due fonti della conoscenza in matematica,

> Per intuizione intendo non la mutevole attestazione dei sensi, o il giudizio fallace di un’immaginazione che fa collegamenti sbagliati; ma il pensiero così pronto e distinto di una mente pura e attenta, che su ciò che comprendiamo non rimanga nessun dubbio; ovvero, il che è lo stesso, il pensiero non dubbio di una mente pura e attenta, che nasce dal solo lume della ragione, e, essendo più semplice, è più certo della stessa deduzione, la quale

> pure, tuttavia, non può essere fatta male dall'uomo, come abbiamo notato sopra. Così ciascuno può intuire con la mente che esiste, che pensa, che il triangolo è delimitato da tre linee soltanto, che la sfera <lo è> da un'unica superficie e cose simili, le quali sono di gran lunga più numerose di quanto i più riconoscono, giacché non si degnano di volgere la mente a cose così facili. (Cartesio, *Opere Filosofiche, Regole per la guida dell'intelligenza*, Regola III, p. 157).

L'intuizione è evidente e certa. Non richiede ulteriore giustificazione. Cartesio sostiene che i principi primi si conoscono solo attraverso l'intuizione. Kant sostiene che la sua tesi secondo cui tutti i giudizi di geometria e aritmetica sono sintetici a priori implica la necessità dell'intuizione in matematica.

> Divido tutte le proposizioni apodittiche (tanto le dimostrabili che le immediatamente certe) in *dogmata* e *mathemata*. Una proposizione direttamente sintetica, fatta di concetti, è un dogma, mentre una proposizione dello stesso genere, ottenuta con la costruzione di concetti, è un *mathema*. Di un determinato oggetto, i giudizi analitici non ci dicono in verità nulla più di ciò che è contenuto nel concetto che ne abbiamo: essi non estendono la conoscenza al di là del concetto del soggetto, limitandosi a chiarirlo. Non possono dunque dirsi propriamente *dogmata* (parola, questa, che potrebbe forse venir tradotta con enunciati dottrinali). Delle due specie di proposizioni sintetiche a priori sopra esaminate, possono portare questo nome, in base all'abituale uso linguistico, soltanto quelle che rientrano nella conoscenza filosofica; difficilmente le proposizioni dell'aritmetica e della geometria prenderanno il nome di

> *dogmata*. In questo uso si ha dunque la conferma del nostro chiarimento, per cui soltanto i giudizi che risultano da concetti meritano il nome di giudizi dogmatici, e in nessun caso quelli che risultano dalla costruzione di concetti. (Kant, *Critica della ragion pura*, 731-32)

Essendo sintetica a priori, la verità dei giudizi matematici non può essere soltanto concettuale, ma deve essere colta attraverso l'intuizione, precisamente attraverso le intuizioni pure dello spazio e del tempo. Secondo Kant l'intuizione genera una relazione immediata con gli oggetti, mentre i concetti possono avere con essi solo una relazione indiretta. Il filosofo di Königsberg ritiene che la distinzione tra intuizioni e concetti rispecchi una distinzione tra due facoltà cognitive: sensibilità e comprensione.
La concezione di intuizione di Husserl è più vicina alla posizione di Cartesio che a quella di Kant, sebbene differisca da entrambi. Per Husserl, l'intuizione è una modalità immediata di conoscenza. Come Cartesio, Husserl utilizza l'intuizione per fornire una conoscenza “evidente”. A differenza di Kant, Husserl non ritiene che l'intuizione sia fondata su una facoltà speciale. Husserl critica la concezione di Kant come psicologistica. Una differenza correlata tra la visione di Husserl e quella di Kant è che Husserl afferma, e Kant nega, che concetti e categorie possono essere entrambi intuiti. Secondo Kant i concetti possono essere pensati, ma non intuiti. Inoltre, Husserl sostiene che Kant non fornisce una giustificazione soddisfacente dei concetti logici, che è una precondizione per accettare le forme dei giudizi.

> La giustificazione logica di un concetto, cioè la giustificazione della sua possibilità ideale, si effettua regredendo alla sua essenza intuitiva o deducibile. Quindi la giustificazione logica di una data teoria come tale (cioè secondo la sua forma pura) esige il regresso all'essenza della sua forma, e perciò a quei concetti e leggi che rappresentano i costituenti ideali di una teoria in generale (le

> ‘condizioni della sua possibilità’) e che regolano a priori e deduttivamente ogni specializzazione dell'idea di teoria nelle sue possibili specie. Accade qui la stessa cosa che nel campo più ampio della deduzione, per esempio, nel caso dei sillogismi semplici. Benché possano essere in sé stessi illuminati dall'evidenza essi ricevono tuttavia la loro ultima e più profonda giustificazione soltanto dal rimando alla legge inferenziale formale. In questo modo si produce anzi una comprensione evidente del fondamento a priori del nesso sillogistico. Nel pensiero teoretico evidente, noi abbiamo una comprensione evidente dei fondamenti degli stati di cose spiegati. Solo mediante il rimando alla forma, alla legge e ai nessi teoretici dello strato, completamente diverso, di conoscenza al quale appartengono, otteniamo una comprensione che penetra profondamente nell'essenza dello stesso nesso teoretico che costituisce il contenuto teoretico di questo pensiero e nei fondamenti legali a priori del suo operare. (Husserl, *Ricerche Logiche*, pp. 186-87)

L'ambito della logica non è adeguatamente catturato dall'affermazione che è soggetto alla legge di contraddizione. Nelle *Ricerche Logiche*, l'intuizione rilevante per la matematica è l'intuizione categoriale. Ci sono due motivazioni principali per adottare la nozione di intuizione categoriale nei regni della logica e della matematica. In primo luogo, l'intuizione categoriale è importante per stabilire la relazione tra norme e verità. Se la logica è intesa solo come una tecnica per arrivare a risultati sulla base di regole date, cioè per dedurre conclusioni da premesse applicando regole di inferenza, lo psicologismo rispetto a queste regole non è stato eliminato. Consideriamo, ad esempio, la legge di non contraddizione. Se la consideriamo come una tecnica per giungere a conclusioni, la nostra motivazione per adottarla in primo luogo potrebbe essere psicologica, vale a dire la sensazione di essere costretti ad accettarla. Husserl sostiene che l'unica giustificazione per adottare la legge di non contraddizione, o qualsiasi altra legge o regola logica, è che essa sia vera.

La normatività delle leggi della logica e della matematica dipende dalla loro verità, e quindi dall'esistenza di intuizioni che realizzano intenzioni nei confronti di queste leggi; tali intuizioni non possono essere che intuizioni categoriali.

> Ai nessi di conoscenza corrispondono idealiter nessi di verità. Compresi nel loro giusto senso, essi non sono soltanto complessi di verità, ma verità complesse che perciò sottostanno, considerate come interi, al concetto di verità. Da questo punto di vista vanno comprese anche le scienze, assumendo la parola "scienza" in senso obiettivo, quindi nel senso della verità unificata. Data la generale correlazione che sussiste tra verità e oggettualità, anche all'unità delle verità in un'unica e medesima scienza corrisponde un'oggettualità unitaria: l'unità del campo della scienza. In rapporto a tale oggettualità, tutte le verità singole della stessa scienza si dicono intrinsecamente omogenee, un'espressione che come vedremo in seguito appare assunta qui in un senso indubbiamente più esteso di quello usuale. (Husserl, *Ricerche Logiche*, p. 179)

Inoltre, la necessità di qualcosa di simile all'intuizione categoriale nasce dalla concezione husserliana dell'intuizione come compimento e conferma dell'intenzione. Nelle opere successive alle *Ricerche Logiche*, Husserl abbandona il concetto di intuizione categoriale, ma adduce il concetto strettamente correlato di "vedere le essenze". Il nucleo della concezione dell'intuizione di Husserl è che essa è la realizzazione dell'intenzione.

Per quanto riguarda la matematica, l'intuizione può essere plausibilmente presentata in due modi principali: come percezione o come prova. Percezione perché ci permette di intuire le nozioni matematiche e può essere interpretata come una intuizione sensoriale o come un “vedere” di essenze che non devono necessariamente essere simili all’intuizione sensoriale. Come prova fornisce la dimostrazione di un teorema matematico che equivale all'intuizione dello stesso.

L'intuizione intesa come percezione

Nelle *Idee*, Husserl afferma che l’intuizione empirica o l’esperienza, è la coscienza di un oggetto individuale. Allo stesso modo l'intuizione di un'essenza è coscienza di qualcosa, di un 'oggetto' (Husserl, Idee p. 16 e ss.). Similmente, in *Logica formale e trascendentale* (§58), afferma che l'oggettività di qualcosa di ideale può essere direttamente 'vista' (e, se volessimo dare alla parola un senso opportunamente amplificato, direttamente sperimentata) con la stessa originalità dell’identità di un oggetto di esperienza nel senso comune del termine.

Dalle *Ricerche Logiche* in poi la percezione è concepita come compimento dell'intenzione. Questo adempimento è un accordo tra ciò che si intende e ciò che si percepisce, e questo accordo è la verità.

> Il senso di evidenza, dal punto di vista di una critica della conoscenza, riguarda tuttavia esclusivamente questo scopo ultimo e non oltrepassabile, l'atto di questa sintesi di riempimento, che dà all'intenzione, per esempio a quella giudicativa, la pienezza contenutistica assoluta, quella dell'oggetto stesso. L'oggetto non è meramente inteso, ma è dato in senso rigoroso così come è inteso e posto in unità con l'intenzione; ed è del resto indifferente che si tratti di un oggetto individuale o generale, di un oggetto in senso stretto o di uno stato di cose (il correlato di una sintesi di identificazione o di diversificazione).
>
> L'evidenza stessa è, abbiamo detto, l'atto di quella perfetta sintesi di coincidenza. Come ogni identificazione, essa è un atto

> oggettivante, il suo correlato oggettivo è l'essere nel senso della verità o anche la verità (Husserl, *Ricerche Logiche*, p. 686).

La percezione implica il riconoscimento di qualcosa come quel qualcosa (ad esempio, una casa come casa). Quindi, sebbene si possa ritenere che Husserl interpreti l'intuizione delle nozioni matematiche come in qualche modo analoga alla percezione, non è chiaro come funzioni esattamente questa analogia[1]. Husserl non fonda l'intuizione delle nozioni matematiche su presupposti platonici relativi alle nozioni matematiche, e inoltre, come dimostrerò tra poco, sostiene che il categoriale è fondato sull'empirico. Si oppone anche alla naturalizzazione dei significati.

> Noi abbiamo chiamato sensibili gli atti dell'intuizione semplice, categoriali gli atti fondati, che riconducono immediatamente o mediatamente alla sensibilità. Ma nella sfera degli atti categoriali è ora importante distinguere tra atti puramente categoriali, atti dell'"intelletto puro", e atti intellettuali misti, "affetti" dalla sensibilità. È nella natura stessa della cosa che qualsiasi elemento categoriale poggi, in ultima analisi, sull' intuizione sensibile, anzi che un'intuizione categoriale, quindi un atto di comprensione intellettuale evidente (*eine Verstandeseinsicht*), un pensiero nel senso più pregnante sia un controsenso senza una sensibilità fondante. L'idea di un "intelletto puro", interpretata come una "facoltà" del pensiero puro (in questo caso, come facoltà di agire categorialmente) e completamente separata da qualsiasi "facoltà della sensibilità", poteva essere concepita soltanto prima di aver compiuto l'analisi elementare della conoscenza nei suoi

[1] Nella filosofia della matematica del XX secolo, la teoria più nota secondo la quale l'intuizione dei concetti matematici è simile alla percezione è quella proposta da Gödel. Su questo tema si rimanda in modo specifico ai lavori di Cellucci, Penrose e Feferman (in bibliografia).

> costituenti evidentemente insopprimibili. E tuttavia la distinzione indicata, e quindi il concetto dell'atto puramente categoriale, e se si vuole quello di un intelletto puro, ha un suo senso legittimo. Se consideriamo, cioè, il carattere peculiare dell'astrazione ideante, secondo cui essa, pur poggiando necessariamente sull' intuizione individuale, non per questo intende l' individualità data in questa intuizione; se notiamo inoltre che essa è piuttosto un modo nuovo di apprensione che non costituisce l'individualità, bensì la generalità: sorge allora la possibilità di intuizioni generali che non escludono nel loro statuto intenzionale soltanto qualsiasi individualità, ma anche qualsiasi elemento sensibile. In altri termini, noi distinguiamo tra astrazione sensibile che ci presenta i concetti sensibili - puramente sensibili o misti con forme categoriali - e l'astrazione puramente categoriale che ci presenta concetti puramente categoriali. Colore, casa, giudizio, desiderio sono concetti puramente sensibili, coloratezza (essere-colorato), virtù, assioma delle parallele ecc., sono concetti categorialmente misti, unità, pluralità, relazione, concetto, sono concetti puramente categoriali. (Husserl, *Ricerche Logiche*, pp. 734-35)

Pertanto, anche se i concetti matematici sono indipendenti, il senso in cui sono ritenuti indipendenti è diverso da quello in cui lo sono gli oggetti empirici. Di conseguenza, Husserl non accetterebbe ad esempio l'approccio naturalistico di Maddy alla percezione degli oggetti matematici (Maddy, 1980). Husserl ritiene che la causalità sia applicabile solo nel regno naturale, non nel contesto delle relazioni tra intuizioni e intenzioni. Un altro problema che Husserl considera rispetto all'affermazione secondo cui le nozioni matematiche vengono percepite è che la percezione sensoriale non sempre fornisce l'esatta conoscenza richiesta per la matematica. Husserl adduce l'esempio degli oggetti geometrici. Considera i triangoli. Non possono essere dati nell'intuizione empirica, poiché i triangoli empirici non hanno l'esattezza dei triangoli geometrici. Come dice Husserl, una figura geometrica è un "limite ideale incapace per principio di esposizione intuitiva nel concreto" (Husserl, *Ricerche Logiche*, pp. 696 ess.). Inoltre, nessuna proposizione geometrica vale per la figura disegnata come oggetto fisico e tutto ciò che è categoriale poggia in ultima analisi sull'intuizione sensibile.

Dato che è problematico basare la geometria sulla percezione sensoriale, esistono altri domini matematici che possono essere fondati sull'intuizione sensoriale? Ad esempio, i numeri naturali possono essere fondati così? Sembra che Husserl sostenga infatti che sia possibile intuire il numero di un gruppo di cose (un aggregato).

Come funziona questa intuizione matematica? Nelle *Ricerche Logiche,* l'intuizione sostituisce la riflessione come fonte della datità di concetti, i numeri naturali sono caratterizzati come specie ideali. Adolf Reinach (fenomenologo della prima ora) considera i numeri come determinazioni oggettive delle cose. Anche Fine interpreta i numeri naturali come strutture di oggetti arbitrari. Resta però aperta la questione di come sia possibile "vedere le essenze". In *Esperienza e giudizio,* (§87), Husserl chiarisce questo tema affermando che la visione si ottiene attraverso un processo di variazione. Variando la prospettiva dalla quale guardiamo – nella nostra immaginazione – uno specifico oggetto spaziale, un tavolo ad esempio, scopriamo la sua essenza di oggetto spaziale. Oggetti spaziali vengono sempre forniti solo parzialmente.

> […] per ottenere i concetti puri o i concetti essenziali non è sufficiente la comparazione empirica, ma che, con particolari procedimenti, occorre liberare prima di tutto dal suo carattere di contingenza la generalità che era stata prima messa in rilievo nel dato empirico. Proviamo a guadagnare un primo concetto di quest'operazione. Essa si basa sulla trasformazione di un'oggettualità esperita o fantasticata in un qualsivoglia esempio, che assuma al contempo il carattere di "modello" guida, del punto di partenza per la produzione di una varietà aperta all'infinito di

varianti. Essa si basa quindi su una variazione. In altri termini, ci facciamo guidare dal fatto come modello, per la sua trasformazione in una pura fantasia. Bisogna pertanto ottenere sempre nuove immagini come copie, come immagini di fantasia, che sono tutte concretamente simili all'archetipo. Produciamo varianti libere quanto si vuole, così che ognuna di esse, alla stregua dell'intero processo della medesima variazione, appaia nel modo dell'esperienza vissuta soggettiva del "ad libitum" [*beliebig*]. Si mostra quindi come questa pluralità di figure ripetute sia attraversata da un'unità, che in tali libere variazioni di un archetipo, cioè di una cosa, si conservi necessariamente un'invariante, in quanto forma generale necessaria, senza la quale sarebbe in generale impensabile un oggetto come questa cosa, come un esempio del suo tipo. Mentre è indifferente ciò che differenzia le variazioni, nell'esercizio della variazione arbitraria emerge questa [forma generale] come un contenuto assolutamente identico, come un che cosa invariabile, rispetto a cui tutte le varianti coincidono: [come] un'essenza generale. Ad essa si può rivolgere l'attenzione come a ciò che è necessariamente invariabile, che prescrive i limiti a tutte le variazioni] praticate nel modo dell'"ad libitum": quale che sia la maniera in cui sono state prodotte, esse devono essere tutte variazioni del medesimo archetipo. [L'essenza generale] risulta essere ciò senza il quale non può essere pensato un oggetto di questo tipo, ovvero ciò senza il quale non potrebbe esser fantasticato intuitivamente in quanto tale. Quest'essenza generale è l'eidos, l'idea nel senso platonico, ma presa nella sua purezza e libera da ogni interpretazione metafisica […] (Husserl, *Esperienza e giudizio*, p. 280)

È possibile applicare un simile approccio prospettico all'intuizione in matematica? Sembra plausibile interpretare il vedere una parte di una nozione matematica come simile al vedere parte di un oggetto empirico.
Le essenze sono aspetti dipendenti degli oggetti sensoriali, esistono, ma non separatamente. Questa interpretazione, che può essere chiamata interpretazione aristotelica, limita in modo significativo gli ambiti matematici che possono essere dati nell'intuizione. Inoltre, sembra offuscare la distinzione tra "intuire" e comprendere concettualmente i significati delle essenze.

L'intuizione intesa come prova

Abbiamo esaminato la prima delle due interpretazioni plausibili di Husserliano intuizione nel regno matematico, vale a dire l'interpretazione che considera l'intuizione come una sorta di percezione delle essenze matematiche. Anche se, come abbiamo visto, in alcuni casi è possibile mettere in relazione l'intuizione in matematica con la percezione, è difficile ritenere la percezione applicabile a tutte le nozioni matematiche, soprattutto a quelle molto astratte. Abbiamo anche visto che Husserl rifiutava l'interpretazione platonica delle essenze matematiche, ma non riusciamo ad avere per questa via una spiegazione soddisfacente dell'intuizione matematica. Passiamo quindi alla seconda opzione per interpretare l'intuizione husserliana in ambito matematico: ovvero quella che intende l'intuizione in termini di dimostrazione. Questa interpretazione non si basa sul modello della percezione, ma sulla prova. Come si è detto con questo approccio le dimostrazioni non sono solo segni organizzati secondo un insieme di regole, ma hanno una portata epistemica.
La questione, tuttavia è: ogni intuizione fornisce prove nel senso richiesto? È vero che ogni dimostrazione fornisce una giustificazione per accettare un teorema? Non è così, per due importanti ragioni. In primo luogo, un'intuizione, come la intende Husserl, sembra essere più di una semplice giustificazione per accettare un teorema. È una sorta di intuizione, un modo di "vedere" che un teorema è vero, ma non tutte le dimostrazioni forniscono tale intuizione. In secondo luogo, Husserl sostiene che l'intuizione fornisce il

fondamento ultimo per la matematica, ma non è vero che l'intero corpo della matematica è colto dall'intuizione. Secondo Husserl

> Ma il campo del significato è molto più ampio di quello dell'intuizione, cioè del campo complessivo dei riempimenti possibili. Infatti, nella sfera dei significati si aggiunge quella molteplicità illimitata di significati complessi, che sono privi di "realtà" o di "possibilità"; si tratta di formazioni di significati che confluiscono bensì in significati unitari, ma a questi non può tuttavia corrispondere alcun correlato possibile e unitario di riempimento. Di conseguenza non sussiste un completo parallelismo nemmeno tra i tipi categoriali, ovvero tra i tipi dell'intuizione categoriale, e i tipi del significato. A ogni tipo categoriale di grado superiore o inferiore corrisponde un tipo di significato; ma, data la nostra libertà di connettere significativamente i tipi in tipi complessi, non a ogni tipo così ottenuto corrisponde un tipo di oggettualità categoriale. (Husserl, *Ricerche Logiche*, p. 741)

Se è così, tutta la matematica non soddisfa la condizione di essere fondata sull'intuizione. Ma se ogni dimostrazione equivalesse a un'intuizione, tutti i teoremi matematici accettati sarebbero dati intuitivamente.

L'idea che le intuizioni matematiche debbano valere qualcosa di più di semplici dimostrazioni sembra essere legata alla pratica della matematica. I matematici non sempre si accontentano di avere una sola dimostrazione di un teorema. Dal punto di vista della prassi matematica, sembrerebbe che non tutte le dimostrazioni forniscano prove soddisfacenti per un teorema.

Un'altra direzione per interpretare la nozione di intuizione in termini di prove è sostenere che il graduale miglioramento della nostra comprensione delle nozioni matematiche è frutto di un miglioramento ottenuto avendo sempre più dimostrazioni dei teoremi. Questa interpretazione si adatta bene a quella di Husserl quando afferma

> Ora, è indubbiamente vero che le intuizioni di qualsiasi tipo, sia semplici che categoriali, possono ricevere, secondo la loro specie, la stessa messa in forma categoriale; ma con ciò si dice soltanto che, dal punto di vista fenomenologico, la messa in forma categoriale è fondata nell'elemento generale dell'atto oggettivante, ovvero che si tratta di una funzione essenzialmente vincolata al momento generico degli atti oggettivanti. Solo vissuti di questo genere ammettono sintesi categoriali, e la sintesi connette direttamente le essenze intenzionali. Specialmente nel caso di intuizioni sintetiche adeguate, che sono immediatamente fondate in intuizioni individuali, ci si deve guardare dall'apparenza illusoria secondo la quale, almeno a questo grado inferiore della sintesi categoriale, vi sarebbe un collegamento fenomenologico diretto che condurrebbe dai rappresentanti sensibili di un atto fondante ai rappresentanti degli altri atti. Per via della dipendenza funzionale dell'adeguazione (evidenza) dell'atto complessivo dall'adeguazione delle intuizioni fondanti, la situazione sembrerebbe qui configurarsi nel modo che segue: poiché gli atti fondanti sono adeguati, il contenuto rappresentante coincide con l 'oggetto rappresentato.
>
> Se ora su questa base ha luogo l'intuizione di una relazione, per esempio, tra la parte e l'intero, anche l'atto relazionante avrà il carattere dell'evidenza; la relazione è veramente data essa stessa con i contenuti veramente dati. Quindi il legame psichico del mettere in relazione, inteso come relazione in rapporto agli oggetti e ai contenuti sensibili, associa questi contenuti sensibili

> vissuti come un legame diretto. (Husserl, *Ricerche Logiche*, p. 729)

È possibile riconciliare le due interpretazioni dell'intuizione?

È possibile conciliare le due interpretazioni della nozione husserliana di intuizione, cioè intuizione intesa in termini di prova, e intuizione intesa come percezione? Un’opzione è interpretare le prove come percezioni. Ma esiste un altro modo di conciliare prove e percezione. La percezione degli oggetti spaziali avviene sempre da una certa prospettiva. Questa caratteristica può essere addotta anche rispetto alle dimostrazioni. Ogni dimostrazione coglie un valore matematico teorema o nozione solo parzialmente. Secondo questa interpretazione, l'obiettivo è accumulare dimostrazioni dello stesso teorema significa arrivare a una visione più completa del teorema.

Fenomenologia e matematica trascendentale

La svolta trascendentale nella fenomenologia porta a un cambiamento di focus: il modo in cui le cose sono date viene esaminato dalla prospettiva della coscienza e, in ultima analisi, dalla prospettiva dell’Io trascendentale. Un elemento centrale della svolta è l'attenzione di Husserl alla distinzione e correlazione tra *noesis* e *noema*. Così si pone la questione: per ogni data nozione, come possiamo garantire che diversi matematici costituiscano lo stesso significato? Affinché il significato di una nozione sia determinato, sosteneva Frege, la nozione deve essere determinata attraverso una definizione indipendente. Contra Frege, Husserl sostiene che i concetti logici e matematici di base non possono essere definiti (PA, 124–5). Alla luce di un'interpretazione dell'intuizione che la vede nascere dalla totalità delle dimostrazioni di una teoria, e non come una comprensione indipendente del significato di una nozione fondamentale. L’idea che i concetti di base della matematica siano costituiti, anziché scoperti, implica che la matematica sia intrinsecamente limitata. Nel paragrafo successivo prenderemo in considerazione due nozioni chiave della matematica e ne discuteremo la loro costituzione in modo sagittale e sicuramente non esaustivo. Affronteremo il concetto di insieme e quello di continuo.

Gli insiemi

Secondo Husserl

> Un insieme è pertanto un’oggettualità, che si precostituisce originariamente mediante un’attività di collegamento che connette mutuamente oggetti disgiunti; l'oggettualità degli insiemi può essere attivamente appresa in una semplice apprensione retrospettiva o nell'apprensione di ciò che si è appena costituito. In quanto formazione pura della spontaneità, l'insieme rappresenta una forma privilegiata, perché in essa possono rientrare come elementi gli oggetti di tutti i tipi possibili e, [una volta assunta la forma dell'insieme,] quegli stessi [oggetti] possono poi fungere da elementi in giudizi determinanti di qualsiasi tipo. Una delle sintesi di aggettivazione predicativa è quella della "e", e una delle sintesi di relazione, che ha senza dubbio tutt'altra direzione, è quella della "disgiunzione". Questi sono gli elementi fondamentali della peculiare forma sintattica della collezione, dell'insieme. (Husserl, *Esperienza e Giudizio*, p. 207)

Un insieme quindi è costituito da questo atto unificante della coscienza, solo successivamente, nell’apprensione retrospettiva, questo atto diventa oggetto. Rispetto alla loro caratterizzazione nel linguaggio, cioè nei giudizi, gli insiemi sono messi in relazione mediante congiunzioni (“e”) o disgiunzioni (“o”). L'idea che le nozioni matematiche si costituiscano solleva la questione del rapporto tra la nozione fenomenologica di costituzione e unità di una molteplicità. Una possibile risposta invoca la correlazione tra noesi e noema: ogni conoscenza relativa alla costituzione della nozione di insieme è correlata a un noema oggettivo, quindi la costituzione ha un lato oggettivo oltre che soggettivo. Secondo Husserl, un vantaggio dell'idea di costituire concetti matematici è quello di permettere di prevenire i paradossi logici, e in questo caso particolare quelli derivanti dalla nozione di insieme. Attraverso la costituzione, i significati delle nozioni matematiche, come quello di insieme, sono resi trasparenti e non si basano su presupposti nascosti.

Il Continuo

La natura del continuo ha coinvolto la matematica e la filosofia fin dall'antichità. Il continuo solleva due domande chiave: è possibile assegnare un numero a ogni segmento del continuo (il problema degli irrazionali) e il continuo è costituito da punti? Tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo i matematici proposero nuove risposte a queste domande. Insieme a Dedekind e Cantor, Weierstrass (maestro di Husserl). L'idea che i numeri naturali siano alla base della matematica nel suo insieme, e la concezione della matematica in termini di teoria delle varietà sembrano supportare la concezione del continuo come una molteplicità di punti, ciascuno dei quali ha un valore numerico. Eppure c'è tensione tra questa concezione aritmetizzata del continuo e le varie idee che Husserl arrivò a sostenere man mano che la sua fenomenologia si sviluppava, in particolare quella della coscienza del tempo. Husserl vede la coscienza del tempo come qualcosa di più di un semplice ambito specifico della coscienza, poiché svolge un ruolo centrale nella fenomenologia in generale. Secondo Husserl, la nostra coscienza fondamentale del tempo non è coscienza di un presente puntuale, ma coscienza di un intervallo che comprende una ritenzione del passato prossimo, un'impressione primordiale del momento presente e una propensione verso il futuro. In Idee, Husserl si chiede se la spiegazione matematica del continuo come insieme corrisponda alla nostra esperienza, chiedendosi:

> […] è la corrente della coscienza un'autentica varietà della matematica? […] È un problema epistemologico di grande importanza chiarire dalle fondamenta le questioni di principio che qui si impongono, quindi di esaminare, dopo che è stato fissato il concetto di varietà definita, le condizioni necessarie a cui deve soddisfare un territorio materialmente determinato pwe poter corrispondere a quest'idea. Una delle condizioni è l'esattezza della 'formazione dei concetti' […] (Husserl, Idee, p. 175)

Nei primi decenni del XX secolo le tensioni rilevate da Husserl hanno stimolato un'ampia discussione sulla relazione tra il continuo sperimentato e la concezione matematica del continuo in particolare un punto di vista particolarmente interessante è stato quello proposto da Hermann Weyl che nel 1918 pubblicò un saggio che esaminava la relazione tra il continuo intuitivo e la spiegazione matematica del continuo intuitivo. Secondo Weyl, il tempo è l'esperienza fondamentale del continuum

> Prendiamo anche nel seguito il tempo come continuo fondamentale per comprendere meglio il rapporto tra un continuo intuitivamente dato e il concetto di numero (dopo che l'esempio succitato ha messo in evidenza la discrepanza tra i due); atteniamoci, per rimanere strettamente nell'ambito di ciò che è immediatamente dato, al tempo fenomenico (in opposizione al tempo oggettivo), a questa forma generale di ciò che io vivo nella mia coscienza, che mi fa apparire i miei " vissuti " come susseguentisi un l'altro. (Per "vissuti" [*Erlebnisse*] intendo ciò che vivo [erlebe], esattamente così come lo vivo - e non avvenimenti reali psichici o addirittura fisici che potrebbero corrispondere ad essi, che avvengono in un certo individuo dotato di anima e corpo, e che appartengono ad un mondo reale). Intanto, per darci modo

> di realizzare anzitutto la connessione con il mondo concettuale della matematica, si ammetta la possibilità ideale di porre in questo tempo un “adesso” rigorosamente puntuale, di mettere in evidenza dei punti temporali, degli istanti. Di due istanti diversi, l'uno sarà allora sempre quello che viene prima, e l'altro verrà dopo. (Weyl, *Il Continuo*, pp. 138-39)

Weyl si chiede se sia possibile matematizzare una concezione della nostra esperienza del tempo che permetta sia la determinazione delle relazioni temporali (prima e dopo) sia il confronto degli intervalli di tempo. Dopo aver esplicitato le condizioni alle quali questa matematizzazione è possibile, egli sostiene che, dalla prospettiva del continuum temporale sperimentato, queste condizioni non possono essere soddisfatte. Inoltre, i punti non vengono vissuti come entità che esistono in sé stesse. Quindi, i sistemi numerici formali devono essere distinti dal continuum sperimentato, sebbene esista una relazione tra loro. La concezione di Weyl della relazione tra la nozione formale di continuo (cioè il continuo matematico) e il continuo sperimentato può essere interpretata come un parallelo con la spiegazione di Husserl della relazione tra significazione e intuizione.

Durante gli anni '20 la posizione di Weyl subì due cambiamenti. Nel 1921, Weyl si avvicinò alla posizione di Brouwer sulla relazione tra l'intuitivo (cioè l'esperienza) e il continuo matematico (Weyl 1998). Weyl ora dice che il continuo matematico è un continuo del divenire. Weyl e Brouwer ritengono che il continuo sperimentato sia un vincolo sulle concezioni matematiche del continuo, determinando quali concezioni sono accettabili. Per ridurre il divario tra il continuo sperimentato e quello matematico, Brouwer ha sviluppato la nozione di sequenze di scelta. Questa nozione introduce nella matematica un elemento di divenire ed evolversi nel tempo. Weyl non accetta la nozione di sequenza di scelta arbitraria come nozione matematica. Successivamente Weyl prese le distanze sia dalla fenomenologia husserliana che dall'intuizionismo di Brouwer, preferendo il formalismo di Hilbert. La motivazione per questo cambiamento è stato il riconoscimento del fatto che l’intuizionismo è troppo restrittivo, ci permette di accogliere solo alcune aree della matematica applicata, in particolare la fisica-matematica. A questo punto Weyl sostiene che è l'applicabilità della matematica a rendere le formule matematiche significative[2].

Brevi riflessioni di sintesi

Ciò che è stato detto sui numeri naturali e sugli insiemi finiti come "oggetti" dell'intuizione dovrebbe essere confrontato con le nostre osservazioni sugli oggetti fisici e sulla riduzione fenomenologica o epoché. Abbiamo detto che dal punto di vista della fenomenologia non abbiamo bisogno di considerare nulla più della struttura degli atti e delle sequenze di atti in cui gli oggetti sono dati, che siano fisici o matematici. Non dobbiamo supporre che ci sia una sorta di relazione indipendente da questi processi che ci mette in contatto con gli oggetti. Quello che la fenomenologia cerca di fare è analizzare l'esperienza o la struttura degli atti che è necessaria per la conoscenza degli oggetti. Questo tipo di impegno potrebbe suggerire che la fenomenologia sia impegnata in una versione di idealismo riguardo agli oggetti matematici. Come ha espresso Aron Gurwitsch in una discussione sulle opinioni di Husserl sulla logica e sulla matematica:

> Le riflessioni filosofiche sulla logica... hanno infatti portato Husserl a stabilire il principio dell'idealismo fenomenologico secondo il quale tutto ciò che esiste e ha validità deriva il senso della sua esistenza e della sua validità dalla vita cosciente e può trovare la sua ultima chiarificazione e giustificazione finale solo mediante analisi degli atti e dei gruppi di atti in cui si presenta come esistente e come valido.

---

[2] Per maggiori approfondimenti sul pensiero di Hermann Weyl si rimanda al nostro Ria D., (2005) *L'unità fisico-matematica nel pensiero di Hermann Weyl*, Congedo.

Per la matematica nel suo complesso, la fenomenologia è quindi pensata per suggerire un vasto programma di ricerca sugli atti e sui processi coinvolti nella costituzione di diversi tipi di oggetti matematici e sulle verità su di essi. Non sarebbe troppo lontano dal vero dire che indagini matematiche del tipo rilevante sono state condotte nella matematica costruttiva. Tuttavia, come abbiamo già accennato, potremmo sollevare delle questioni sulla possibilità che il resoconto che abbiamo dato dell'intuizione dei numeri naturali e degli insiemi finiti sia compatibile con la visione che questi sono oggetti indipendenti dalla mente su cui le affermazioni potrebbero essere vere o false indipendentemente dalla nostra conoscenza. Se così fosse, la visione che stiamo sviluppando potrebbe portare a una comprensione più raffinata del rapporto tra costruttivismo e platonismo in matematica.

Va notato che non stiamo dicendo, come talvolta accade nello sviluppo costruttivista, che numeri e insiemi finiti sono nostre costruzioni mentali, in modo tale che non potrebbero essere considerati come esistenti indipendentemente da queste costruzioni. Al contrario, le costruzioni stesse sono processi mentali, ma numeri e insiemi finiti non sono dati come nostre costruzioni mentali. Equivarrebbe a una sorta di grossolano psicologismo attribuire ai numeri e agli insiemi finiti proprietà degli oggetti mentali. Le costruzioni sono date come aventi una durata temporale, ad esempio, ma numeri e insiemi finiti non lo sono. Come Husserl mette in chiaro in *Esperienza e Giudizio*, le intuizioni sono processi temporali, ma gli oggetti come i numeri naturali e gli insiemi finiti che sono dati in questi atti sono dati come "omnitemporali".

Husserl offre argomentazioni in diversi luoghi nei suoi scritti successivi per mostrare che gli oggetti matematici potrebbero essere considerati come "esistenti" indipendentemente dalle nostre menti, o dalle nostre costruzioni. In *Esperienza e Giudizio* lo troviamo dire, ad esempio, che "esistono" oggetti irreali matematici e altri che nessuno ha ancora costruito. La loro esistenza, è vero, è rivelata solo dalla loro costruzione (la loro "esperienza"), ma la costruzione di quelli già noti apre anticipatamente un orizzonte di oggetti capaci di essere ulteriormente scoperti, sebbene ancora sconosciuti. Finché non sono scoperti (da nessuno), non sono effettivamente nella spaziotemporalità; e finché è possibile (fino a che punto questo è possibile, non c'è bisogno di decidere qui) che non verranno mai scoperti, potrebbe essere che non avranno realtà nel mondo.

In altre parti troviamo Husserl affermare che in ogni caso gli oggetti matematici sono dati come indipendenti da noi negli stessi atti in cui veniamo a conoscenza di essi. Acquisiscono questo "significato dell'essere" nei nostri atti. Da questo punto di vista, il costruttivismo non è necessariamente incompatibile con l'idea che ci siano oggetti matematici che esistono indipendentemente dalle nostre menti, e che le affermazioni su di essi possono essere vere o false indipendentemente dalla nostra conoscenza.

Una visione fenomenologica più completamente sviluppata comporterebbe una critica o una correzione della filosofia intuizionista su diversi fronti: (i) sulla comprensione delle costruzioni nel senso di "oggetti" ottenuti come risultato dei processi di costruzione, e nel senso di processi di costruzione come "oggetti", (ii) su questioni di idealismo, psicologismo e solipsismo in matematica, e (iii) sulla teoria del significato delle affermazioni matematiche.

Qual è allora il ruolo dell'intuizione matematica in chiave didattica? Quella di incoraggiare il pensiero libero e creativo. Reuben Hersh, nel suo libro *Cos'è veramente la matematica*, dice che se guardiamo alla pratica matematica, l'intuitivo è ovunque. Gli insegnanti possono incoraggiare gli studenti a utilizzare l'intuizione con qualsiasi tema matematico semplicemente chiedendo loro cosa pensano si potrebbe fare o come possa funzionare, prima che vengano insegnati i modi di risoluzione. Le opportunità per gli studenti di pensare in modo intuitivo si presentano in tutta la matematica e ad ogni livello scolastico.

Deborah Ball in un articolo provocatorio cita lo psicologo Jerome Bruner:

> Partiamo dall'ipotesi che qualsiasi materia può essere insegnata efficacemente in una forma intellettualmente onesta a qualsiasi bambino in qualsiasi stadio di sviluppo. È un'ipotesi audace e fondamentale nel pensare alla natura di un curriculum. Non esiste alcuna evidenza per contraddirla; sta venendo raccolta

> considerevole evidenza che la supporta. (Ball, *With an Eye*, p. 374)

Deborah Ball è piuttosto convinta che se insegnanti e studenti si liberano dalla gerarchia prescritta della matematica data dagli standard di contenuto e si ingaggiano nell'esplorazione di idee anche di livello superiore, potrebbero essere molto coinvolti fino a raggiungere una vera e propria eccitazione. Non sto suggerendo di insegnare formalmente la matematica di livello superiore ai bambini, ma mi piace la possibilità che Bruner e Ball discutono ovvero che qualsiasi parte della matematica può essere introdotta in una forma intellettualmente onesta a qualsiasi livello.
Sono state proposte varie teorie su come nascano le idee creative nel dominio matematico. Un noto quadro teorico è quello introdotto da Alan Schoenfeld (2014), che ha proposto, sulla scia di Polya, alcune fasi che concorrono alla risoluzione (creativa) dei problemi. La prima è la lettura del problema, poi, vi è l'analisi delle proprietà del compito, segue l'esplorazione di diverse possibili soluzioni, e ancora la pianificazione di come raggiungere una determinata soluzione, di seguito l'implementazione corretta della soluzione e, infine, la verifica (assicurandosi che la soluzione funzioni). In generale, i modelli di fase della risoluzione creativa dei problemi sono stati criticati perché rappresentano la creatività come un processo lineare che si svolge attraverso una sequenza chiaramente definita di passaggi (ad esempio, Lubart, 2018). Appare più plausibile che le idee creative derivino anche da un processo disordinato di andare avanti e indietro tra i passaggi, con cicli di pensiero divergente e convergente incorporati in ogni momento (Lubart, 2018). Sheffield (2009) ha proposto un tale processo non lineare per la matematica, ha suggerito che la creatività in matematica è caratterizzata dalla flessibilità: gli studenti passano attraverso diverse attività come creare, valutare e collegare e il processo esatto può variare in base al problema e all'esperienza dello studente e a moltissimi altri fattori che costituiscono l'universo classe.

Riferimenti Bibliografici

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, *93*(4), 373-397.

Bruner, J. S. (2016). *Il processo educativo: dopo Dewey*. Roma Armando.

Cellucci, C. (2005). Mathematical discourse vs. mathematical intuition. *Mathematical reasoning and heuristics*, 137-165.

Descartes, R. (2013). *Opere filosofiche*, a cura di B. Widmar ed E. Lojacono, UTET, Torino.

Feferman, S. (2012). Kurt Gödel: conviction and caution. In *Godel's Theorem in Focus* (pp. 96-114). Routledge.

Fine, K. (2002). *The limits of abstraction*. Clarendon Press.

Hersh, R. (2001). *Cos'è davvero la matematica.* Milano Mondolibri.

Husserl, E. (1988). *Ricerche logiche*. Il saggiatore.

Husserl, E. (2001). *La filosofia dell'aritmetica*. Bompiani.

Husserl, E. (2002). *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, 2 voll., trad. it. a cura di V. Costa, Einaudi, Torino.

Husserl, E. (2009). *Logica formale e logica trascendentale*. Mimesis Edizioni.

Husserl, E., (2007). *Esperienza e giudizio: ricerche sulla genealogia della logica*. Bompiani.

Kant, I. (2004). *Critica della ragione pura*, introduzione, traduzione e note di Giorgio Colli. Adelphi.

Kripke, S. (2021). *Riferimento ed esistenza*. Bollati Boringhieri.

Lubart, T. (2018). Creative process. *Palgrave Studies in Creativity and Culture,(Online), https://doi. org/10.1057/978-1-137-50563-7_1*.

Maddy, P. (1980). Perception and mathematical intuition. *The Philosophical Review*, *89*(2), 163-196.

Penrose, R. (2011). Gödel, the Mind, and the Laws of Physics. *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics: Horizons of Truth*, 339-358.

Reinach, A. (1969). Concerning phenomenology. *The Personalist*, *50*(2), 194-221.

Ria, D. (2005). *L'unità fisico-matematica nel pensiero epistemologico di Hermann Weyl.* Congedo.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity–Questions may be the answer. In *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87-100). Brill.

Weyl, H. (1967). *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*. Paolo Boringhieri.

Weyl, H., (1977). *Il continuo: indagini critiche sui fondamenti dell'analisi*. Bibliopolis.