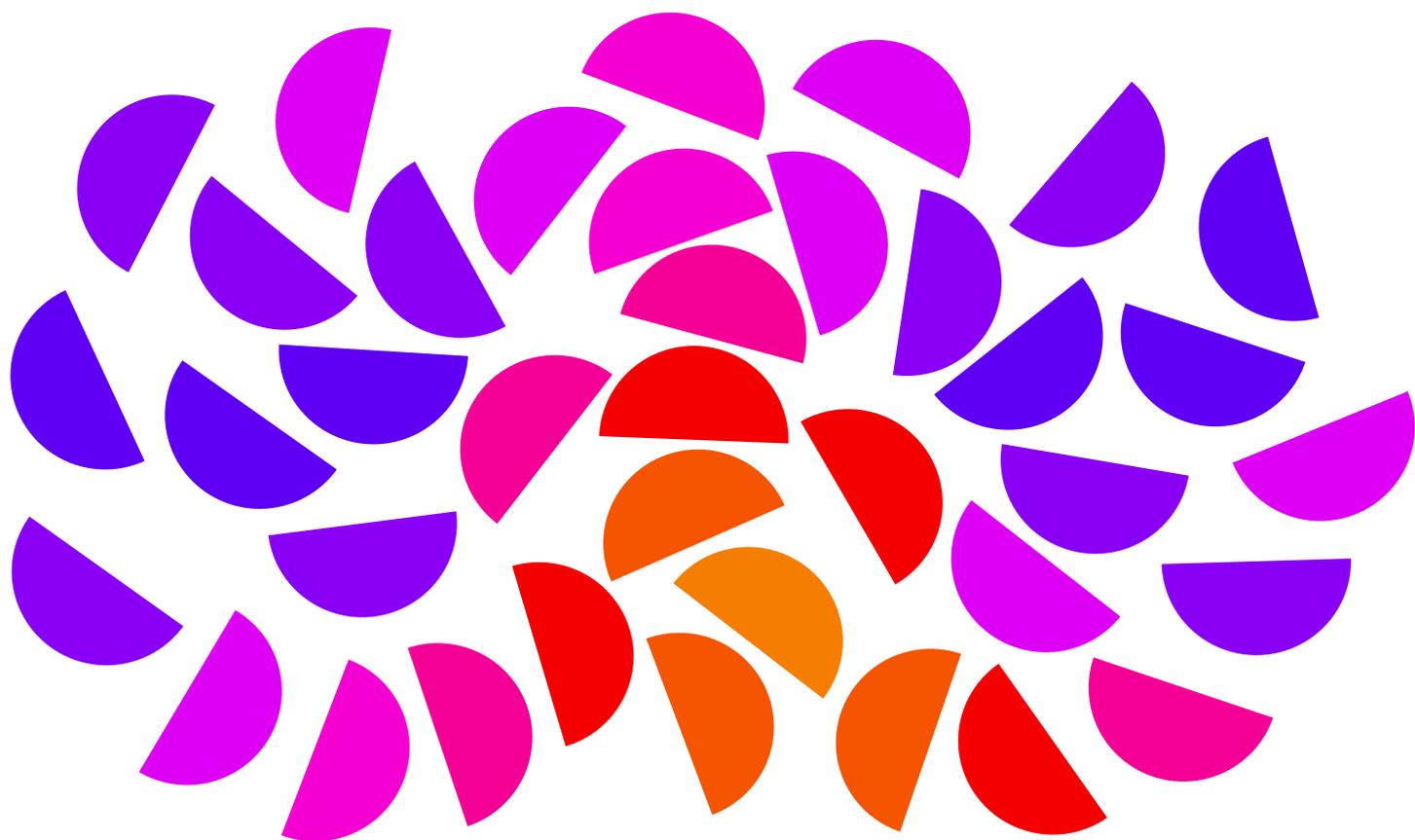


Numero VIII
Anno 2016



Viaggio nella Scienza

Ithaca



Convezione

Ithaca: Viaggio nella Scienza

Una pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” dell’Università del Salento.

Registrazione presso il Tribunale di Lecce n. 6 del 30 Aprile 2013.
e-ISSN: 2282-8079

Direttore Responsabile
Luigi Spedicato.

Ideatore
Giampaolo Co’.

Comitato di Redazione
Rocco Chirivì,
Paolo Ciafaloni,
Maria Luisa De Giorgi,
Vincenzo Flaminio,
Luigi Martina,
Giuseppe Maruccio,
Marco Mazzeo,
Francesco Paparella,
Carlo Sempi.

Segreteria di Redazione
Daniela Dell’Anna.

© 2013-2016 Dipartimento di Matematica e Fisica “*Ennio de Giorgi*”.

© 2016 per i singoli articoli dei rispettivi autori.

Il materiale di questa pubblicazione può essere riprodotto nei limiti stabiliti dalla licenza
“*Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia*” (CC BY-SA 3.0 IT).

Per il testo della licenza: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/deed.it>

Ithaca: Viaggio nella Scienza
è disponibile sul sito:

<http://ithaca.unisalento.it/>

Scriveteci all’indirizzo:

ithaca@unisalento.it

Ithaca

Viaggio nella Scienza

VIII 2016

3 In questo numero

5 La convezione da cima a fondo
Edward A. Spiegel

17 Convezione nel mantello
John A. Whitehead

33 L'esplorazione del sottosuolo alla ricerca di
correnti convettive
Gianluca Gola

43 Convezione atmosferica
Silvana Di Sabatino, Francesco Barbano

59 La convezione nelle stelle
Michaël Bazot

85 Convezione in fluidi stratificati: il caso delle dita di
sale.
Francesco Paparella

95 **Martingala: l'origine di un nome**
Carlo Sempi

La lezione mancata

101 **Le equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.**
Stefano De Leo

In questo numero

Convezione è l'argomento di riferimento della maggior parte degli articoli di questo numero di *Ithaca*.

L'articolo di Edward Spiegel è un'introduzione alla descrizione dei moti convettivi nei fluidi. In questo articolo la convezione è definita in modo sintetico: *Il termine "convezione" comunica in modo appropriato l'idea che il fluido, muovendosi, trasporta con sé qualcosa che lo caratterizza*. Gli articoli successivi discutono fenomeni convettivi in situazioni specifiche.

Gli articoli di John Witehead e di Gianluca Gola riguardano entrambi i moti convettivi nel sottosuolo. Il primo parla della convezione nel mantello terrestre, un fenomeno che si sviluppa nell'arco di milioni di anni, così che le stesse rocce che compongono il mantello si comportano in modo fluido. Il secondo prende in considerazione l'acqua che si muove nei pori e nelle fratture delle rocce terrestri.

L'articolo successivo, di Silvana Di Sabatino e Francesco Barbano, mette in relazione la formazione delle nubi, e i loro multiformi aspetti, con i moti convettivi dell'atmosfera.

L'articolo di Michaël Bazot descrive come le conoscenze sui moti convettivi permettano di comprendere la struttura delle atmosfere delle stelle.

Conclude la rassegna sulla convezione l'articolo di Francesco Paparella che presenta un caso peculiare di convezione: quando le quantità che influiscono sulla densità del fluido sono più di una è possibile che si inneschino moti convettivi anche quando le porzioni più dense del fluido giacciono al di sotto di quelle meno dense.

Seguono due articoli che trattano altri argomenti. Il primo di questi, di Carlo Sempi, raccon-

ta l'origine del nome di una quantità matematica utilizzata nella teoria delle probabilità. L'articolo prima presenta cosa sia la Martingala in matematica, e poi insegue l'origine storica di questo nome. Il secondo articolo, di Stefano De Leo, rientra nella rubrica *La lezione mancata* e presenta una tecnica unificata di soluzione delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Buona lettura,
il Comitato di Redazione.

La convezione da cima a fondo

Edward A. Spiegel

Astronomy Department, Columbia University, New York

Quando la densità di un fluido soggetto ad un campo di gravità sviluppa delle disomogeneità (per un qualunque motivo), il fluido tipicamente comincerà a fluire, e le sue porzioni meno dense si muoveranno verso l'alto. Questa descrizione eccessivamente coincisa si applica ad una vasta gamma di manifestazioni di un fenomeno che, per la importanza in natura e nell'industria, è stato largamente studiato da secoli, cominciando con le acute osservazioni di Archimede sul galleggiamento, intorno al 250 a.C. Dovette passare un certo tempo prima che Rinaldini, motivato dallo studio del trasporto di calore, conducesse degli esperimenti sulla convezione presso l'Accademia dei Lincei nel 1657. Il termine "convezione" fu coniato nel 1834 da Pruit, e comunica in modo appropriato l'idea che il fluido, muovendosi, trasporta con sé qualcosa che lo caratterizza.

La proprietà caratterizzante di un fluido che è stata maggiormente studiata negli esperimenti di convezione è la temperatura, le cui fluttuazioni generano fluttuazioni di densità negli oceani, nelle atmosfere, e nelle stelle e in altri scenari cosmici, così come in oggetti fatti dall'uomo come fornaci ed inceneritori. Il ruolo della temperatura è centrale nei processi convettivi che trasporta-

When a fluid lying in a gravity field develops inhomogeneities of density (by whatever mechanism), it will typically begin to flow with the less dense portions rising. This overly concise characterization covers a very large range of manifestations of a phenomenon whose importance in nature and in industry has caused it to be widely studied for centuries, beginning with Archimedes' penetrating thoughts on buoyancy in about 250 B.C. It was some time before Rinaldini, whose motivation was the study of heat transport, performed convection experiments at the Accademia dei Lincei in 1657. The term "convection" was coined in 1834 by Pruit and it conveys nicely the notion that the fluid motion carries with it some property of the fluid.

The most commonly studied fluid property in convection experiments has been temperature, whose fluctuations engender density fluctuations in oceans, atmospheres, and stars and in other cosmic settings as well as in manmade objects such as furnaces and incinerators. The role of temperature has been central to the convective process by which fluid properties are transported

no e mescolano le proprietà caratterizzanti di un fluido. Ma la temperatura non è l'unica fra queste proprietà le cui fluttuazioni producono le disomogeneità nella densità che guidano i moti convettivi e che, reciprocamente, sono trasportate da essi. Nella moltitudine di tali proprietà le più comunemente studiate sono impurità quali il sale disciolto nel mare, l'elio negli strati ricchi di idrogeno delle stelle, microorganismi che nuotano nell'agar nutriente, ed atomi di ferro nel nucleo liquido della Terra. L'argomento continua ancora oggi ad attrarre l'interesse sia dei teorici che degli sperimentali, ed il ruolo che la convezione deve giocare nello studio del clima aggiunge fascino agli occhi dei tanti studiosi di scienze planetarie che riescono a sfruttare grandi risorse computazionali al fine di elucidare le complessità dei moti convettivi. Questo è particolarmente importante quando le disomogeneità nella densità che guidano il flusso diventano sufficientemente intense da produrre moti turbolenti.

Possiamo considerare, in modo arbitrario, il ventesimo secolo come l'inizio dell'era moderna negli studi sulla convezione, quando H. Bénard osservò celle convettive esagonali scaldando dal basso un sottile strato di fluido. Egli potrebbe non aver colto che la tensione superficiale ebbe una influenza significativa sulle sue prime osservazioni, ma era consapevole delle sottigliezze e dell'interesse del problema che riguarda la formazione di strutture convettive: "Il mio problema sperimentale è stato quello di definire e misurare in uno strato orizzontale di liquido scaldato dal basso quali correnti convettive prevalgano, mantenendole il più vicino possibile al loro stato di maggior stabilità". Una eccellente tesi sulle strutture convettive fu scritta in seguito dal suo studente Dusan Avsec, e si capì che strutture convettive con la forma di rotoli costituiscono la forma geometrica preferita, sotto opportune condizioni, e che esse sono soggette a certi tipi di instabilità che sono state riscoperte solo in decenni recenti. Lo studio delle forme delle celle convettive ha fatto nascere la moderna teoria dei *pattern*, una affascinante branca della matematica applicata.

Aspetti qualitativi

In questa sede non abbiamo spazio per addentrarci nella teoria matematica della convezione,

and mixed. But temperature is not the only property whose fluctuations lead to the the density inhomogeneities that drive convective motions and that, reciprocally, are transported by those motions. Among the multitude of such properties the most commonly studied are impurities such as the salt dissolved in the sea, helium in the hydrogen-rich layers in stars, swimming microorganisms in nutrient agar, and iron atoms in the earth's liquid core. The subject continues to attract the attention of both experimentalists and theoreticians to this day and the role convection must play in the study of climate adds to its appeal for many planetary scientists who are able to bring large computing facilities to bear on the elucidation of the complexities of convective motions. This is especially important when the density inhomogeneities that drive the flow become large enough to cause the motion to become turbulent.

We may arbitrarily choose the beginning of the twentieth century as the start of the modern era of convection studies when H. Bénard observed hexagonal convective cells upon heating a thin layer of fluid from below. He may not have realized that surface tension had a significant influence on his earliest observations, but he was aware of the subtleties and the interest in the problem of convective pattern formation: "The laboratory problem that I have myself has been to define and to measure in a horizontal liquid layer heated from below, the convection currents that prevail, considered as near as possible to their state of greatest stability." An excellent thesis on convective patterns was later written by his student Dusan Avsec and it was realized that convective rolls were the preferred planform under suitable conditions and that these were subject to certain instabilities that have been re-discovered only in recent decades. The study of the shapes of convective cells has given rise to modern pattern theory, an intriguing branch of applied mathematics.

Qualitative aspects

We do not have space here to go far into the mathematics of convection theory but a rough and

ma un trattamento veloce e grossolano dell'instabilità convettiva può servire per illustrare il significato fisico dei parametri chiave. A questo scopo immaginiamo uno strato di fluido poco profondo, confinato fra piastre orizzontali mantenute a temperatura uniforme e costante. Quando il fluido è statico, se lo strato è assai sottile, ai fini della nostra discussione qualitativa, la temperatura all'interno dello strato fluido può essere approssimata da una funzione lineare della coordinata verticale z . Analogamente, possiamo ipotizzare che la densità del fluido, $\rho_0(z)$, nello stato stazionario sia (approssimativamente) lineare in z .

Adotteremo un punto di vista di tipo Lagrangiano¹ e concentreremo la nostra attenzione su di una porzione di fluido che si muove attraverso il mezzo fluido. La porzione di fluido ha una massa m , volume V , densità ρ . Il tempo è t e la sua posizione verticale è z . Le forze su tale porzione (che può essere pensato in guisa di una piccola palla sferica piena di fluido come quello circostante) sono la gravità, la spinta di Archimede (che, di fatto, è la pressione), e la frizione viscosa. Pertanto, le equazioni del moto sono

$$m\ddot{z} = -g(\rho - \rho_0)V - \mu\dot{z} \quad (1)$$

dove g , l'accelerazione di gravità, è costante attraverso lo strato di fluido ed agisce verso il basso (cioè nella direzione negativa dell'asse z), $\mu\dot{z}$ è la frizione viscosa, ed il punto sovrastante la lettera indica la derivata totale rispetto al tempo. Possiamo scrivere la massa della porzione (o particella, nel gergo della dinamica dei fluidi) come $m = \rho V$, oppure come $m = \rho_0 V$, usando una approssimazione che non è eccessiva se lo strato di fluido è sufficientemente sottile. Questo è il cuore dell'approssimazione che Lord Rayleigh attribuì a Boussinesq, in un articolo ben noto del 1916. In quella sede egli fornì una trattazione della dinamica più precisa del breve schizzo che stiamo per offrire, tenendoci aderenti al saggio detto che "Una piccola imprecisione fa risparmiare tante spiegazioni".

Tutto ciò è relativamente semplice, ma ci aspettiamo anche che la densità della particella di fluidi-

¹In un approccio *Lagrangiano* si descrive come cambiano le variabili di interesse lungo il moto di una particella di fluido; in uno *Euleriano* si descrivono i cambiamenti delle variabili in una posizione fissa (N.d.T.).

ready treatment of convective instability may serve to elucidate the physical meaning of the key parameters. For this, we imagine a shallow layer of fluid confined between rigid, horizontal plates maintained at fixed, uniform temperatures. In the static state of the fluid, if the layer is quite thin, the temperature in the body of a horizontal fluid layer may be approximated as a linear function of the vertical coordinate, z , for the purposes of this qualitative discussion. Likewise, we may assume that the fluid density, $\rho_0(z)$, in the basic static state is (roughly) linear in z .

We adopt a rather Lagrangian viewpoint and focus our attention on the motion of an idealized morsel of the fluid through the ambient fluid medium. The fluid morsel has mass m , volume V , density $\rho(t)$ with time t and vertical location z . The forces on such a morsel (which may be thought of as a small, spherical balloon filled with the ambient fluid) are gravity, buoyancy (which is really pressure), and viscous drag. The equation of motion is then

$$m\ddot{z} = -g(\rho - \rho_0)V - \mu\dot{z} \quad (1)$$

where g , the acceleration of gravity is constant over the thin layer and acts in the downward (or negative z) direction, $\mu\dot{z}$ is the viscous drag and a dot over a letter signifies total time derivative. We can write the mass of the morsel or parcel, in fluid dynamical parlance, as $m = \rho V$, or as $m = \rho_0 V$, an approximation that is not bad if the layer is thin enough. This is the heart of an approximation that Lord Rayleigh, in a well-known paper of 1916 attributed to Boussinesq. Therein he gave a more precise treatment of the dynamics that we are now only sketching in keeping with the wise dictum, "A little inaccuracy saves a lot of explaining."

This much is relatively simple but we also expect the density of the fluid parcel to depend on the pressure p and temperature, T . If the deviations in these quantities are not too extreme and the ambient pressure and temperature are ver-

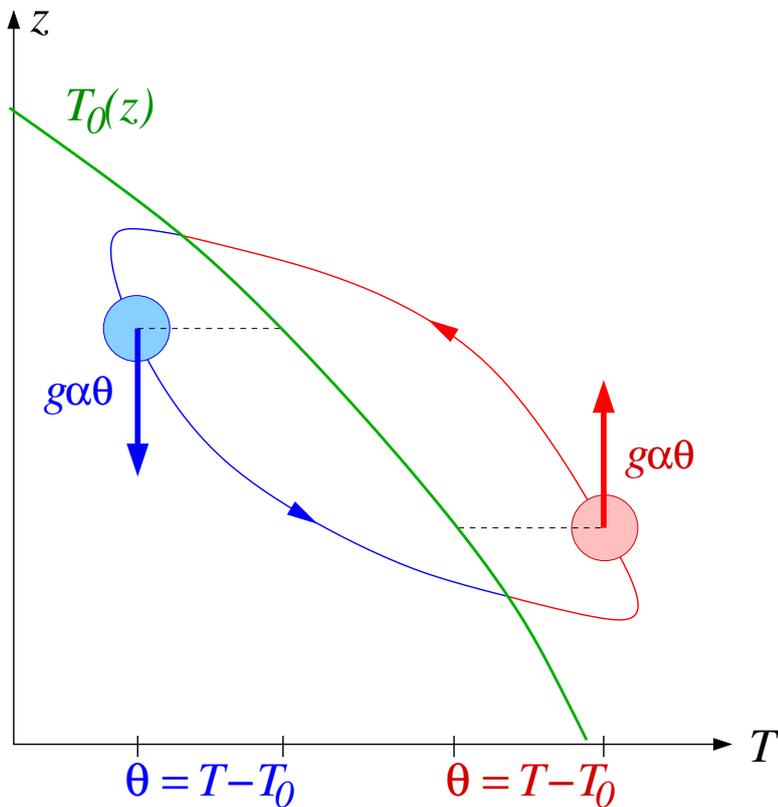


Figura 1: Rappresentazione schematica del semplice modello convettivo presentato nel testo. La linea verde rappresenta la temperatura T_0 del fluido ambiente in funzione dell'altezza z . La differenza θ tra la temperatura ambiente e quella della particella di fluido produce una accelerazione $g\alpha\theta$ dovuta alla spinta di Archimede.

Schematics of the simple convective model discussed in the text. The green line represents the local ambient temperature T_0 as a function of the height z . The difference θ between the ambient temperature and the parcel temperature engenders the buoyancy acceleration $g\alpha\theta$.

do dipenda dalla pressione p e dalla temperatura, T . Se le deviazioni di queste quantità non sono troppo violente e la pressione e la temperatura ambiente sono distribuite verticalmente con un profilo simile a quello della configurazione statica, possiamo far ricorso ad una formula termodinamica standard, e cioè

$$\rho = \rho_0[1 + \varkappa(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (2)$$

dove \varkappa e α sono i coefficienti, rispettivamente, di comprimibilità isoterma e di espansione termica. Questi ultimi sono dedotti dalle leggi della termodinamica tramite calcoli complicati, ma, in questa sede, ci accontenteremo di considerarli come parametri di ciascun fluido. Per molti fluidi comuni \varkappa è assai piccolo e può essere trascurato nell'ambito della approssimazione di Boussinesq. In tal caso l'equazione (2) si riduce a

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3)$$

e possiamo portare l'equazione (1) nella forma

$$\ddot{z} = g\alpha\theta - \nu\dot{z}. \quad (4)$$

dove $\theta = T - T_0$ e $\nu = \mu/m$, che è considerato costante nello spirito di questa discussione. Il coefficiente d'attrito ν è il reciproco di un tempo e

ticamente distribuita in un modo quasi statico, possiamo ricorrere ad una formula termodinamica standard, e cioè

$$\rho = \rho_0[1 + \varkappa(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (2)$$

dove \varkappa è il coefficiente di comprimibilità isoterma e α è il coefficiente di espansione termica. Questi ultimi sono dedotti dalle leggi della termodinamica tramite calcoli complicati, ma, in questa sede, ci accontenteremo di considerarli come parametri di ciascun fluido. Per molti fluidi comuni \varkappa è assai piccolo e può essere trascurato nell'ambito della approssimazione di Boussinesq. In tal caso, l'equazione (2) si riduce a

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3)$$

e possiamo portare l'equazione (1) nella forma

$$\ddot{z} = g\alpha\theta - \nu\dot{z}. \quad (4)$$

dove $\theta = T - T_0$ e $\nu = \mu/m$, che è considerato costante nello spirito di questa discussione. Il coefficiente d'attrito ν è il reciproco di un tempo e

specifica il tasso di decelerazione della particella a causa della frizione viscosa. Naturalmente, ciò che anche influisce sulla dinamica della particella è il valore di T_0 all'altezza z .

Mentre una particella di fluido attraversa il fluido, la sua temperatura, e quindi la sua densità, si riporta verso i valori dell'ambiente circostante. Dobbiamo tener conto di ciò tramite una equazione che descriva la variazione nel tempo della temperatura della particella, dT/dt , lungo il suo moto in verticale. Un modo comunemente usato per valutare come la temperatura della particella si riporta alla temperatura dell'ambiente è la legge di raffreddamento di Newton, in questa formulazione:

$$\frac{dT}{dt} = -q(T - T_0), \quad (5)$$

dove il termine sulla destra rappresenta il rilassamento della temperatura della particella alla temperatura dell'ambiente locale. Il tasso di questo processo di riaggiustamento è q . Esprimiamo la temperatura della particella come la temperatura dell'ambiente circostante $T_0(z(t))$ più la deviazione $\theta(t)$, dove $z(t)$ è la posizione verticale della particella al tempo t . A questo punto possiamo scrivere $\frac{dT_0}{dt} = \frac{dT_0}{dz} \dot{z}$ e quindi arrivare a

$$\dot{\theta} = \beta_0 \dot{z} - q\theta. \quad (6)$$

dove $\beta_0 = -dT_0/dz$.

Dimensioni

Finora abbiamo parlato delle particelle di fluido come se le loro dimensioni fossero irrilevanti. Tuttavia, la frizione che agisce su di un oggetto che si muove all'interno di un fluido deve chiaramente dipendere dalle sue dimensioni. Supponiamo che le particelle di fluido di cui stiamo parlando siano sferiche, con un diametro pari a ℓ . La frizione esercitata su di una particella in moto cresce con le dimensioni della particella proporzionalmente a ℓ^2 poiché, approssimativamente, dipende dall'estensione della superficie del fluido ambiente che si oppone al moto della particella. Questa raffigurazione assai fisica della dinamica del fluido è utile per evitare il molti dettagli matematici di un trattamento completo del problema, ma richiede uno spiccato intuito fisico.

As the fluid parcel traverses the layer, its temperature, hence its density, adjusts to those properties of the surroundings. We must allow for this by writing an equation for the time variation of temperature in the parcel, dT/dt , as it moves vertically. A commonly used way to estimate how the parcel's temperature adjusts to the temperature of its surroundings is Newton's law of cooling, expressed this way:

$$\frac{dT}{dt} = -q(T - T_0), \quad (5)$$

where the term on the right represents the relaxation of the parcel's temperature to the local ambient temperature. The rate of this adjustment process is q . We write the parcel's temperature T as the local ambient temperature $T_0(z(t))$ plus the deviation $\theta(t)$ where $z(t)$ is the vertical location of the parcel at time t . Now, we may write $\frac{dT_0}{dt} = \frac{dT_0}{dz} \dot{z}$ and so arrive at

$$\dot{\theta} = \beta_0 \dot{z} - q\theta. \quad (6)$$

where $\beta_0 = -dT_0/dz$.

Sizes

So far we have treated fluid parcels as if their sizes did not matter. However, the drag on an object moving through a fluid clearly must depend on its size. Suppose that the fluid parcels under discussion are spherical with diameters ℓ . The drag on a moving parcel grows with parcel size like ℓ^2 since that is roughly the area of ambient fluid blocking the parcel's motion. This physically more convenient image of the dynamics of the fluid avoids the many mathematical details in a full treatment of the problem but it does call for the application of physical intuition. In particular, we should improve the description of the viscous drag on a fluid parcel by the replacement of ν by $\hat{\nu}\ell^{-2}$ where the new parameter, $\hat{\nu}$, must have the physical dimensions of (ℓ^2 times $1/t$)

In particolare, è necessario migliorare la descrizione della frizione viscosa a cui è soggetta una particella rimpiazzando ν con $\hat{\nu}\ell^{-2}$ dove il nuovo parametro, $\hat{\nu}$, deve avere le unità di misura di (ℓ^2 moltiplicato $1/t$), in modo da legare l'intensità della frizione alle dimensioni della particella. Non è una coincidenza che le unità di misura di $\hat{\nu}$ siano le stesse del coefficiente di viscosità cinematica che si incontra in dinamica dei fluidi. Inatti, la frizione viscosa tende a rallentare il moto della particella in un tempo caratteristico $\tau_\nu = \ell^2/\hat{\nu}$.

Ancor più di ciò, proprio l'operatore laplaciano che appare nel progenitore matematico dell'equazione (6), attraverso la diffusione termica, fa sì che le differenze di temperatura tendano a smussarsi nel tempo. Ciò ha un ruolo essenziale nella dinamica della convezione perché fa sì che la spinta di Archimede a cui è soggetta una particella possa aumentare o diminuire grazie allo scambio di calore con l'ambiente circostante. Analogamente a ciò che abbiamo fatto con la viscosità, ora rimpiazziamo q nell'equazione (6) con $\hat{q}\ell^{-2}$. Questa è una approssimazione del tasso a cui la temperatura di una particella stazionaria rilassa verso la temperatura ambiente, dove \hat{q} è una forma più appropriata del coefficiente di scambio termico, espresso in unità di misura che tengono conto delle dimensioni della particella. Il tempo di rilassamento termico della particella, quindi, è $\tau_q = \ell^2/\hat{q}$. Poiché si può pensare che i due processi dissipativi, quello viscoso e quello termico, agiscano in serie, li possiamo combinare insieme in una scala di tempo dissipativa $\tau_{dis} = \frac{\ell^2}{\sqrt{\tau_\nu\tau_q}}$.

Una terza importante scala di tempo è dinamica: $\tau_{dyn} = 1/\sqrt{g\alpha\beta_0}$. Questo è il tempo di caduta libera di una particella sferica in moto all'interno del mezzo fluido soggetta alla gravità ridotta ($\approx g\alpha\beta_0 d$), dove d è la profondità del fluido. Se $\beta_0 > 0$, spostandosi verso l'alto T_0 diminuisce e quindi, come succede in quasi tutti i fluidi ordinari, la densità risulta maggiore in alto. Ciò produce una stratificazione di densità in cui il fluido più pesante sovrasta quello leggero, il che può essere instabile sotto certe condizioni. Questo è il caso interessante per la nostra discussione, e quindi da ora in poi considereremo $\beta_0 > 0$. Quando il tempo dissipativo è molto più breve di quello dinamico, la dissipazione opera molto

to allow for the dependence of drag on parcel size. It is no coincidence that the dimensions of $\hat{\nu}$ accords with the physical dimensions of the kinematic viscosity of fluid dynamics. In these terms, the viscous drag will tend to slow down the motion of the parcel on a timescale $\tau_\nu = \ell^2/\hat{\nu}$.

More than this, that selfsame Laplacian operator in the mathematical antecedent to equation (6), through thermal diffusion, causes temperature differences to decay. This plays a vital role in the dynamics of convection by causing a parcel to lose or gain buoyancy as it exchanges heat with its surroundings. In parallel with what we did with viscosity, we now replace q in equation (6) by $\hat{q}\ell^{-2}$. This is an estimate of the rate at which a stationary parcel's temperature relaxes to the ambient temperature where \hat{q} is an improved heat exchange coefficient with units that allow for the size of the parcel. The thermal adjustment time of the parcel is then $\tau_q = \ell^2/\hat{q}$. Since the two dissipative processes, viscous and thermal, may be thought of as acting in series, we may combine them into the dissipative timescale $\tau_{dis} = \frac{\ell^2}{\sqrt{\tau_\nu\tau_q}}$.

A third significant timescale is dynamical: $\tau_{dyn} = 1/\sqrt{g\alpha\beta_0}$. This is the free fall time of a roughly spherical parcel moving in the reduced gravity ($\approx g\alpha\beta_0 d$) of the fluid medium where d is the depth of the fluid. When $\beta_0 > 0$, T_0 decreases in the upward direction so that, as for most ordinary fluids, the density is larger above. This makes for a top-heavy density distribution which may be unstable under certain conditions. That is the interesting case for this discussion so we shall henceforth assume that $\beta_0 > 0$. Then, when the dissipation time is much shorter than the dynamical time, the dissipation operates more quickly than the dynamics and it inhibits the onset of convection. This conclu-

più velocemente della dinamica, e ciò impedisce l'innescò della convezione. Questa conclusione può essere espressa in termini del quadrato del rapporto delle scale di tempo dissipativa e dinamica. Ma, poiché ℓ caratterizza una soluzione, e non impone una condizione, non è una quantità adatta per valutare le condizioni che producono una instabilità convettiva. Quindi rimpiazziamo ℓ con d quando ragioniamo intorno a possibili instabilità che portino a moti convettivi. Pertanto concludiamo che la convezione può scatenarsi quando

$$R > f(a) \quad (7)$$

dove

$$R = \frac{gd^4\alpha\beta_0}{\kappa\nu} \quad (8)$$

è il numero di Rayleigh, $a = d/\ell$ e f è una funzione che può essere calcolata con alcune pagine di matematica relativamente semplice. (Una trattazione più elaborata di queste manipolazioni, che tenga traccia delle varie lunghezze, è troppo lunga per essere inclusa in questa sede, ma descritta nelle fonti per l'approfondimento che suggeriamo alla fine di questa introduzione).

All'innescò, il moto inizialmente appare sotto forma di movimenti regolari disposti in celle. In questa sede non siamo in grado di descrivere le celle, ma fondiamo la discussione sul concetto di particella, che si adatta meglio a questo tipo di presentazione. Il numero di Rayleigh è un indicatore dell'intensità della convezione. Quest'ultima si innesca quando R eccede un certo valore critico. Il numero di Rayleigh critico dipende dalle condizioni dell'ambiente, dalle condizioni al contorno, dalle proprietà che caratterizzano il fluido e da $a = d/\ell$. La scelta di a è in qualche modo arbitraria, ed è legata ai dettagli delle celle presenti nei modelli matematicamente più dettagliati. Nel caso preso in considerazione più di frequente, il numero di Rayleigh critico si ha per $a \approx 2$ ed il suo valore è circa 10^3 , sebbene le variazioni possano talvolta essere grandi. All'aumentare del numero di Rayleigh la convezione diventa più vigorosa. I valori di R che caratterizzano l'atmosfera terrestre ed ancor più quelli delle stelle sono particolarmente elevati, ed un problema interessante consiste nel determinare, sia sperimentalmente sia matematicamente, il flusso di calore verticale in funzione di R quando R tende all'infinito.

sion may be expressed in terms of the square of the ratio of the dissipative time to the dynamical time. But, since ℓ characterizes a solution rather than imposing a condition, it is not suitable for stating the conditions for convective instability. Hence we replace ℓ by d in thinking about the issue of instability to convective activity. We then conclude that convection can break out when

$$R > f(a) \quad (7)$$

where

$$R = \frac{gd^4\alpha\beta_0}{\kappa\nu} \quad (8)$$

is the Rayleigh number, $a = d/\ell$ and f is a function that may derived from a few pages of relatively simple mathematics. (A more elaborate treatment of these manipulations, keeping track of the various lengths, is too long for inclusion here but is described in the suggested additional reading at the end of this introduction.)

At onset, the initial motion may appear in the form of regular cellular motions. Here, we have no cells but base the discussion on the parcels, which are more adaptable to the character of this treatment. The Rayleigh number is an indicator of the intensity of convection whose onset occurs when R exceeds a certain critical value. The critical Rayleigh number depends on the ambient conditions, on the boundary conditions, on the properties of the fluid and on $a = d/\ell$. The choice of a is somewhat arbitrary and is related to the details of the cells in the more mathematical model. Under the most commonly considered of these quantities, the critical Rayleigh number occurs for $a \approx 2$ and is about 10^3 , though variations are sometimes large. As the Rayleigh number is increased, the convection grows more vigorous. The values of R that occur in the earth's atmosphere and especially in stars are particularly large and a problem of interest is that of determining the vertical heat flux as a function of R as R tends to infinity experimentally and mathematically.

Anche se il numero di Rayleigh è il più importante parametro che controlla la convezione, altri parametri sono pure significativi: il numero di Prandtl ($\hat{\nu}/\hat{q}$) e la forma e le dimensioni delle particelle di fluido (o delle celle). La convezione per valori molto alti di R è turbolenta, e questo crea un problema difficile in quanto sono coinvolte particelle che abbracciano un'intera gamma di dimensioni. Inoltre, altri processi possono aver luogo nei fluidi in convezione. Soluti che influenzano la densità, la rotazione, campi magnetici (in mezzi conduttori di elettricità) che influiscono sulla dinamica, e la comprimibilità del fluido, giusto per nominarne alcuni. Questi effetti introducono altri parametri che caratterizzano le condizioni di altre forme di convezione e producono numerose varianti del processo convettivo.

Retroazione

Finora abbiamo trascurato l'effetto dei moti verticali $w = \dot{z}$ e della deviazione della temperatura θ sullo stato statico dell'ambiente. Ma non appena il fluido comincia a muoversi, esso trasporterà, col moto convettivo, del calore. Ciò porterà a delle modifiche nella temperatura ambiente, e dunque richiede che la sostituzione di $T_0(z)$ con $T(z, t)$ e di β_0 con $\beta = -\partial T/\partial z$. Il flusso verticale di calore, che era proporzionale a $-\beta_0$, ora diventa $-\kappa\beta + w\theta$, dove w è un nuovo nome per \dot{z} e κ è la diffusività termica. La notazione w intende enfatizzare il ruolo della velocità verticale nel trasportare il calore verticalmente (verso l'alto o verso il basso). I coefficienti in queste espressioni coinvolgono quantità fisiche quali i calori specifici e le conduttività termiche. In questo interludio qualitativo, li tratteremo come dei parametri costanti, da menzionare esplicitamente solo se assolutamente necessario. Al di là di questi dettagli, osserviamo che il cambiamento nel flusso di calore verticale prodotto dalla convezione è la differenza fra i flussi nei due casi. Tale differenza è, approssimativamente $c[w\theta - \kappa(\beta - \beta_0)]$, dove c denota il calore specifico combinato con ciascuno altra quantità ad esso connessa. (Lo studio di tali dettagli per ora non è di nostro interesse).

A questo punto la domanda importante è in qual modo i cambiamenti del flusso di calore producono dei cambiamenti nella struttura verticale del campo di temperatura. Senza preoccuparsi

While the Rayleigh number is the most important of the control parameters of convection, there are other significant parameters: the Prandtl number ($\hat{\nu}/\hat{q}$) and the shapes and sizes of the fluid parcels (or cells). The convection at very large R is turbulent and this presents a difficult problem with parcels of a range of sizes involved. Moreover, other processes occur in convecting fluids such as solutes that affect the density, rotation and magnetic fields (in conducting media), which affect the dynamics, and compressibility, to name a few. These effects bring in other parameters characterizing the conditions in those other forms of convection and give rise to numerous variations on the convective process.

Feedback

So far, we have neglected the effects of the vertical motion $w = \dot{z}$ and of the temperature perturbation θ on the background static state. But once the fluid starts moving, it will transport, or convect, heat. This will lead to modifications in the background temperature and requires that we now replace $T_0(z)$ by $T(z, t)$ and β_0 by $\beta = -\partial T/\partial z$. The vertical heat flux, which was proportional to $-\beta_0$ now becomes $-\kappa\beta + w\theta$ where w is a new name for \dot{z} and κ is a thermal diffusivity. The notation w is introduced to emphasize the role of the vertical velocity in transporting heat vertically (up or down). The coefficients in these expressions involve physical quantities such as specific heats and thermal conductivities. In this qualitative interlude, we treat them as constant parameters to be mentioned explicitly only when absolutely necessary. Such details aside, we see that the change in vertical heat flux engendered by the convection is the difference between the fluxes in the cases. That difference is approximately $c[w\theta - \kappa(\beta - \beta_0)]$, where c stands for specific heat combined with any other of its usual concomitants. (Study of such details need not be of concern for now.)

The important question at this point is how does the change in heat flux cause changes in the vertical structure of the temperature field. Without worrying unduly about the thermodynamic

troppo delle complessità della termodinamica (ma sfruttando qualche conoscenza che arriva da approcci più formali al problema) possiamo affermare che il gradiente verticale della temperatura risponde ai cambiamenti nel flusso di calore nel modo seguente:

$$\dot{\beta} = w\theta - \kappa(\beta - \beta_0) \quad (9)$$

e pertanto osserviamo che il cambiamento del flusso conduttivo di calore è un aspetto centrale della variazione temporale nella struttura verticale del campo di temperatura descritto dal termine che contiene $\beta - \beta_0$. Se ora riscriviamo l'equazione (6) nella sua forma pienamente nonlineare

$$\dot{\theta} = \beta w - q\theta \quad (10)$$

e riutilizziamo l'equazione (4) nella forma

$$\dot{w} = g\alpha\theta - \nu w \quad (11)$$

possiamo concludere che le equazioni (9)-(11) costituiscono un sistema chiuso nelle incognite (w, θ, β) . Questa non è una coincidenza, in quanto questo insieme di equazioni differenziali ordinarie, con qualche piccola differenza nella notazione, furono dedotte nel contesto della convezione termica così come lo furono le equazioni di Lorenz, le cui soluzioni sono state ampiamente utilizzate come esempio di dinamica caotica.

Convection eolica

Sebbene la convezione generalmente è forzata da spinte di Archimede che agiscono lungo la verticale, molti studi trovano che le scale orizzontali e quelle verticali sono di lunghezza comparabile. Recentemente, sempre più attenzione è stata data allo sviluppo nella convezione di Rayleigh-Bénard di correnti orizzontali relativamente intense. Si può pensare a questi flussi come a dei venti, e la convezione che li genera è stata chiamata convezione ventosa. Qui la chiameremo eolica, da Eolo, l'antico dio greco del vento. Un simile nome potrebbe suggerire che siano i venti a generare la convezione, ma cediamo alla tentazione e usiamo questo nome per suggerire che i venti sono generati dalla convezione. Dopo tutto, Ithaca è un'isola greca.

Per mantenere le cose semplici in questo fina-

intricacies (but with some hindsight from more mathematical studies of the problem) we may surmise that the vertical temperature gradient responds to changes in heat flux in this manner:

$$\dot{\beta} = w\theta - \kappa(\beta - \beta_0) \quad (9)$$

and we see that the change in conductive heat flux is a central aspect of the temporal variation in the vertical structure of the temperature field as expressed by the term in $\beta - \beta_0$. If we now rewrite equation (6) in its fully nonlinear form

$$\dot{\theta} = \beta w - q\theta \quad (10)$$

and bring back equation (4) in the form

$$\dot{w} = g\alpha\theta - \nu w \quad (11)$$

we see that equations (9)-(11) form a closed system for (w, θ, β) . This is no coincidence since this set of ordinary differential equations, apart from minor changes in notation, were derived in the context of thermal convection as were the Lorenz equations whose solutions have been widely used to exhibit chaotic behavior.

Aeolian convection

Although convection typically is driven by vertical buoyancy forces, in many studies of convection the horizontal and vertical scales of motion are comparable. But increasing attention has lately been paid to the development of relatively strong horizontal currents in Rayleigh-Bénard convection. These flows may be thought of as winds and the convection that drives them has been called windy convection. Here, we call them Aeolian convection for aeolus, the ancient Greek god of the wind. That name might normally suggest that the winds drive the convection but here we yield to temptation and use the name to suggest that the winds are driven by the convection. After all, Ithaca is a Greek island.

To keep things simple in this coda, we confine

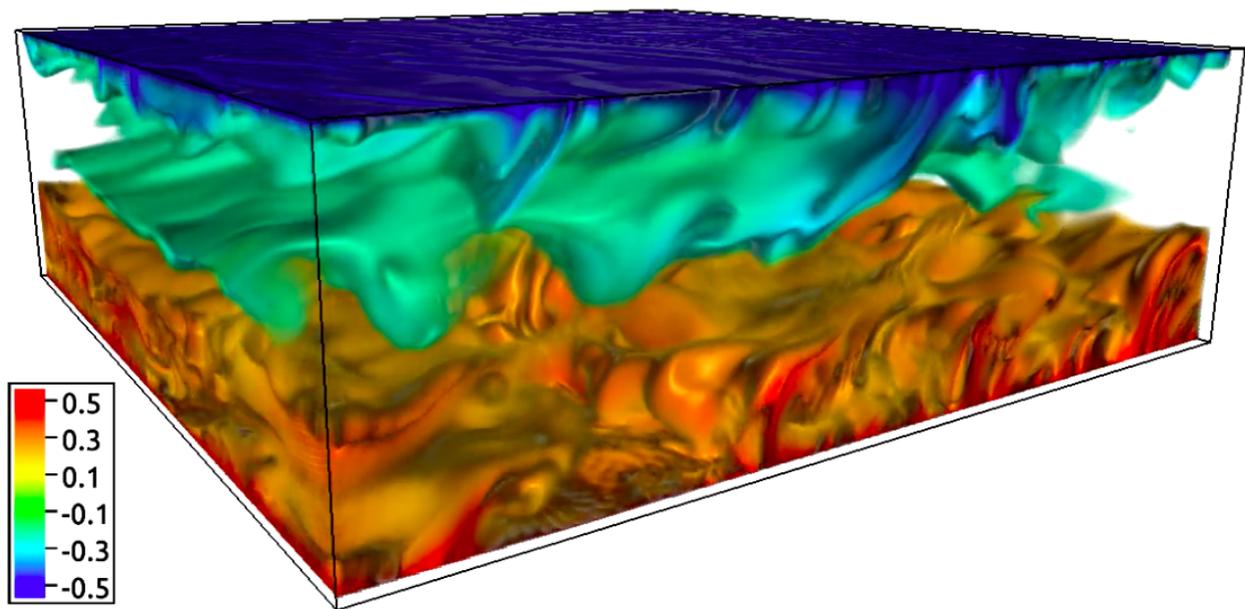


Figura 1: Campo di temperatura in una simulazione orizzontalmente periodica di convezione eolica, con bordi superiori e inferiori privi di attrito, $R = 10^7$, e $Pr = 0.71$. Il vento è evidente nelle distorsioni del campo di temperatura in prossimità dei bordi. In questo esempio tridimensionale la simmetria assiale è rotta dall'effetto della rotazione intorno ad un asse orizzontale con velocità angolare $2\Omega = 10^4$ in unità adimensionali.

Temperature in a horizontally periodic simulation of Aeolian convection with free-slip top and bottom boundaries, $R = 10^7$, and $Pr = 0.71$. The wind is evident in the distortion of the temperature field close to the boundaries. In this three-dimensional example the vertical axial symmetry is broken by the effect of rotation around a horizontal axis with dimensionless angular velocity $2\Omega = 10^4$.

le, limiteremo la discussione al caso della convezione in due dimensioni. In tal caso, quando il numero di Rayleigh è grande e la convezione è vigorosa, i venti si formano spontaneamente e diventano dominanti: l'energia cinetica della velocità orizzontale può diventare di molto maggiore dell'energia associata ai moti verticali. Il motivo per l'apparente facilità con cui i venti si formano nel caso bidimensionale è la forte anisotropia nel piano orizzontale del caso bidimensionale. Affinché la convezione tridimensionale possa generare dei venti, è necessario rompere la simmetria di rotazione intorno ad un asse verticale.

Quasi tutto ciò che si sa riguardo alla convezione eolica è dovuto a simulazioni numeriche, ma i venti possono anche essere facilmente prodotti sperimentalmente. Una pentola piena d'acqua posta su di un fornello contenente alcuni grani di pepe nero per visualizzare il flusso può mostrare dei forti venti vicino al bordo quando arriva all'ebollizione. Tuttavia, nelle simulazioni è necessario specificare condizioni al contorno che

the discussion to the case of two-dimensional convection. Then, when the Rayleigh number is large and the convection is vigorous, the winds form spontaneously and become prominent: the kinetic energy in the horizontal velocity can become far larger than the energy in the vertical motions. The reason for the apparent ease with which winds form in the two-dimensional case is that two-dimensional convection is highly anisotropic in horizontal planes. For three-dimensional convection to generate winds, the rotational symmetry about a vertical axis in the ambient conditions must be broken.

Most of what is known of Aeolian convection comes from numerical simulations but the winds can be easily produced experimentally. A pot of water on a hot stove with some small bits of black pepper to mark the flow can reveal strong boundary winds when the pot is boiling. However, for simulations one must specify boundary conditions that permit constant flow in the wind direction. Various special conditions are then

permettano un flusso costante del vento nella direzione orizzontale. Possono essere impiegate diverse condizioni speciali, come quelle periodiche nella direzione del vento. Dettagli tecnici di questo genere sono affrontati quotidianamente dagli analisti numerici, e qui non c'è bisogno di soffermarsi.

Sebbene sia necessario un maggiore sviluppo teorico riguardo alla formazione dei venti, ciò che già è emerso fa sorgere la domanda se qualcuno dei venti noti sia il prodotto di una forte convezione. Il terzo più esterno del sole (radialmente) è pienamente convettivo ed al suo fondo esiste uno strato soggetto a sforzi di taglio che, si ipotizza, sia causato dalla convezione. Ma nessun altro strato analogo è stato identificato quale prodotto di attività convettive. Siamo quindi testimoni di ciò che potrebbe essere la nascita di un nuovo filone di investigazione. Ciò che ora è necessario è accertare dei criteri che permettano di decidere quando un vento orizzontale può essere il prodotto della convezione.

Poiché questo lavoro non intende essere una rassegna ma una introduzione, non riportiamo una bibliografia completa. Di seguito si trovano alcuni suggerimenti per l'approfondimento.

called for, such as periodic boundary conditions in the wind's direction. Such technical matters are routinely dealt with by numerical analysts and need not be spelled out here.

Though more theory of the wind formation is needed, what has emerged already raises the question of whether any known winds may result from strong convection. The outer third (in radius) of the sun is fully convective and there is a shearing layer at the bottom of the so-called convection zone that has been ascribed to convection. But no other such layer as been has attributed to convective activity. We witness here what may be the birth of a new line of investigation. What is needed now are criteria for deciding when a horizontal wind may be driven by convection.

As this is not meant as a review but an introduction, we do not give full bibliography. Here with a few suggestions for further reading.



- [1] S. CHANDRASEKHAR: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, ristampa Dover Publications, New York (1961–2013).
- [2] J. S. TURNER: *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1973).
- [3] N. O. WEISS E M. R. E. PROCTOR: *Magnetoconvection*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2014).



Edward A. Spiegel: è il professore Rutherford di Astronomia, emerito, presso la Columbia University di New York. Il prof. Spiegel ha conseguito la laurea presso la UCLA ed il dottorato presso l'Università del Michigan. Ha ricoperto posizioni di ricerca presso l'Università di Princeton, la NYU e l'Università di Cambridge. I suoi interessi di ricerca si focalizzano in modo particolare sugli aspetti matematici della meccanica dei fluidi, ed in particolare della convezione, applicati a problemi di natura astrofisica.

Edward A. Spiegel: is the Rutherford Professor emeritus of Astronomy at Columbia University in New York. Professor Spiegel received his B.A. from UCLA and his Ph.D. from the University of Michigan. He held research positions at Princeton University, NYU, and Cambridge University. His research interests focus on the mathematical aspects of fluid mechanics, and in particular of convection, applied to astrophysical problems.

Convezione nel mantello

John A. Whitehead

*Department of Physical Oceanography,
Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, MA 02540 USA*

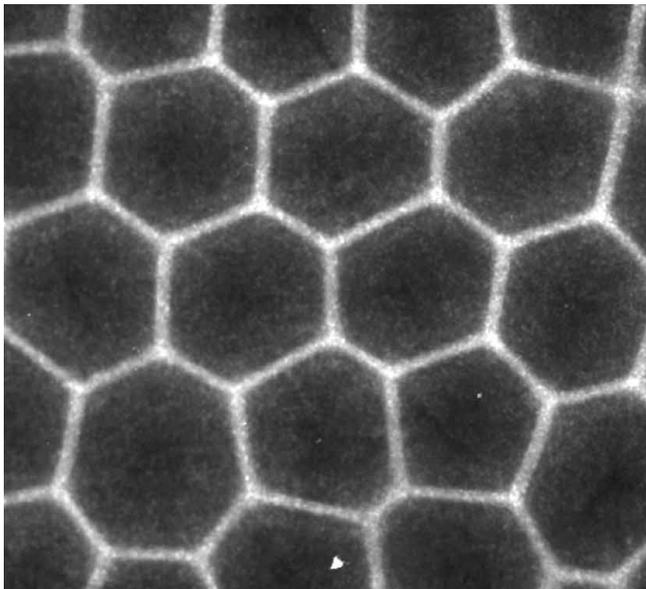
È noto che la convezione nel mantello terrestre determina i moti della tettonica a placche. Elencheremo i vincoli imposti dalle osservazioni geofisiche e geochemiche. Spiegheremo la natura dello strato limite superiore nel caso di convezione con un numero di Prandtl infinito ed un numero di Rayleigh molto alto. Formuleremo un esempio molto semplice, mostrando celle di convezione bipolari, con particolare attenzione allo strato limite termico superiore. Mostriamo poi due esempi aggiuntivi. Nel primo, il risalire dal fondo di un fluido a bassa viscosità attraverso un fluido più viscoso produce un pennacchio con una grande testa e un piccolo condotto sottostante. Nel secondo, una cella di convezione unipolare della deriva continentale, al di sotto di elementi galleggianti ed isolanti, produce una auto-propulsione. Questo flusso semplice ha una zona di subduzione inclinata che non è presente nella convezione ordinaria. Citeremo recenti articoli e libri che descrivono il grande numero di modelli numerici che cercano di incorporare tutte le complessità della Terra nelle simulazioni.

L'esempio più semplice possibile di convezione di Rayleigh-Bénard è quello di uno strato orizzontale di fluido con una viscosità Newtoniana immobile in un campo di gravità. Se il gradiente verticale di temperatura eccede un valore critico, crescono piccole perturbazioni ed emerge un

Convection in the mantle of the earth is known to drive plate tectonics. The constraints imposed by geophysical and geochemical observations are listed. The nature of the top boundary layer for convection with infinite Prandtl number and high Rayleigh number is explained. A very simple example is formulated and the bipolar convection cells shown, with emphasis upon the top thermal boundary layer. Two examples of additional processes are shown: In the first, upwelling of low viscosity fluid from the bottom of a deep more viscous fluid produces a plume with a large head and small trailing conduit. In the second, a monopolar continental drift convection cell under floating insulators produces self-propulsion. The simple flow has a tilted subduction zone that is lacking in ordinary convection. Some recent articles and books are listed that describe the large suite of numerical models that try to incorporate all the complexities of the earth into the simulations.

The simplest possible example of Rayleigh-Bénard convection starts with a horizontal layer of motionless fluid with a Newtonian viscosity in a field of gravity. If the vertical temperature gradient exceeds a critical value, small perturbations grow and cellular motion emerges. The parame-

moto cellulare. Il parametro che descrive il gradiente è chiamato numero di Rayleigh Ra . Le sezioni orizzontali dei flussi cellulari mostrano molte strutture distinte nelle loro sezioni orizzontali che dipendono da Ra , e dal numero di Prandtl Pr che è il rapporto tra diffusività viscosa e quella termica. Altri parametri esprimono gli effetti della compressione, i cambiamenti della fase di solido cristallino, variazioni di viscosità, variazioni di conduttività termica, viscosità non-Newtoniana, viscosità elastica, ed effetti di superficie.



La Figura 1 mostra poligoni nella glicerina con Ra vicino al valore critico. I poligoni emergono dalla dipendenza della viscosità dalla temperatura [1]. Questa struttura si trasforma in una con celle a forma di rotoli paralleli per valori di Ra più grandi.

Negli anni che vanno dal 1965 al 1975, ho eseguito un certo numero di esperimenti per documentare la forma e la lunghezza d'onda delle strutture cellulari [2, 3, 4]. Ho iniziato questi studi come studente in un dipartimento di ingegneria interessato alla fisica in generale, ma, poiché il tipo di convezione che stavo studiando era applicabile alla convezione del mantello terrestre, gravitavo verso progetti di scienze della terra e dell'oceano e mi sono associato al Woods

ter describing the gradient is called the Rayleigh number Ra . Many horizontal patterns of cellular flow have been found, depending on Ra and the ratio of viscous to thermal diffusivity—the Prandtl number Pr . Additional parameters express the effects of compression, solid crystal phase changes, viscosity variation, thermal conductivity variation, non-Newtonian viscosity, visco-elasticity, and surface effects.

Figura 1: Celle di convezione poligonali in glicerina con Ra di poco superiore a quello critico. L'immagine è formata con una luce quasi perfettamente parallela da un punto distante che è inviata attraverso uno strato di fluido e sopra uno schermo. Le regioni fredde in affondamento agiscono come lenti convergenti e producono un'area bianca, e le regioni calde in risalita al centro agiscono come lenti divergenti e trasmettono pochissima luce. Lo schermo è posizionato ad una distanza dallo strato di fluido che produce il fuoco principale da luce convergente, perciò la netta localizzazione dei bordi bianchi del poligono è un effetto ottico.

A shadowgraph of polygonal cells in glycerin with Ra slightly above critical. The image is formed with almost perfectly parallel light from a distant point source that is sent up through the fluid layer and onto a screen. The cold sinking regions act as convergent lenses and produce a white region, and the hot rising regions at the center act as divergent lenses and show almost no light. The screen is located at a distance from the fluid layer that produces the most focus by the convergent light, so the sharp localization of the white polygon boundaries is an optical effect.

Figure 1 shows polygons in glycerin with Ra close to the critical value. The polygons arise from viscosity dependence on temperature [1]. The pattern gives way to two-dimensional roll cells at larger Ra .

In the years 1965 to 1975, I conducted a number of laboratory experiments to document the form and wavelength of the cellular structure [2, 3, 4]. I began these studies as a student in an engineering department with an emphasis on general physics, but since the type of convection I was studying was applicable to mantle convection, I gravitated toward projects in earth and ocean science and joined Woods Hole Oceanographic Institution as a scientist in 1971.

Hole Oceanographic Institution come scienziato nel 1971.

In questo processo di cambiamento, ho incontrato il professore Edward Spiegel e abbiamo continuato ad essere amici e colleghi da allora. La sua abilità di trasmettere il suo entusiasmo nella scienza mi ha sempre motivato ed ispirato. Come tributo alla nostra perdurante amicizia e con l'amichevole stile del professor Spiegel presenterò questa descrizione della convezione nel mantello della Terra con qualche nota personale legata alle mie esperienze.

Tettonica a placche

Nel corso degli anni '60 si costituì l'idea della tettonica a placche e fu ipotizzato che la circolazione all'interno della terra si muovesse tramite una qualche sorta di celle di convezione. [5]. Speravo che il mio lavoro potesse essere utile nel comprendere la convezione del mantello, e quindi iniziai il viaggio senza fine del cercare di comprendere la terra e l'oceano. Innanzi tutto, era ben noto anche allora che la Terra è composta da molti strati [6, 7]. In cima ci sono due corpi differenti. Il primo è formato dai continenti con uno strato di sedimenti che copre roccia granitica (la crosta continentale) con uno spessore di poco meno di 40 km, in media. L'altro corpo è il fondo oceanico che è composto da uno strato di sedimenti che coprono basalto (la crosta oceanica), che ha uno spessore medio di circa 5 km. Sotto entrambi queste regioni c'è il mantello, che si estende in basso fino alla frontiera del ferro liquido ad un raggio di circa 3400 km. La temperatura aumenta con la profondità del mantello a causa dell'aumento del valore della pressione idrostatica, ed esistono delle discontinuità nel valore della densità del mantello a profondità diverse in corrispondenza dei cambiamenti di fase della struttura cristallina dei vari minerali. Un nocciolo interno di materiale solido ha un raggio di 1200 km.

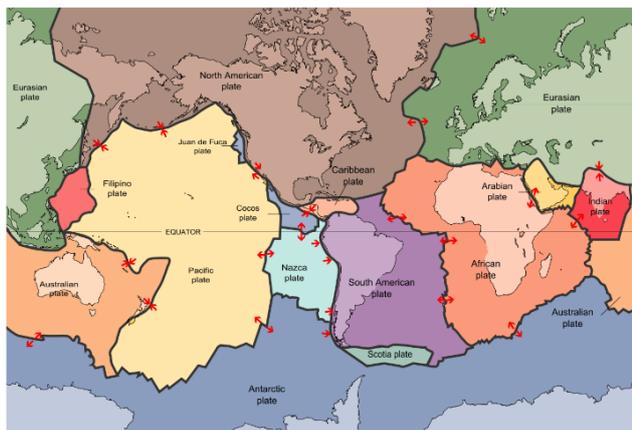
Numerosi dati di geologia marina divennero disponibili dopo il 1965 e confermarono fin nei dettagli il quadro della tettonica a placche (Figura 2). Sebbene il mantello sia elastico fino a circa 50km di profondità, possiamo considerare il mantello terrestre come un materiale viscoso che si muove lentamente alla temperatura di 1400

In the process, I met Professor Edward Spiegel and we have continued to be a friends and colleagues ever since. His ability to convey his scientific enthusiasm has always motivated and inspired me. In tribute to our continuing friendship and with Professor Spiegel's friendly and wonderfully warm style, I am writing this description of convection in Earth's mantle with some personal notes about my own experiences.

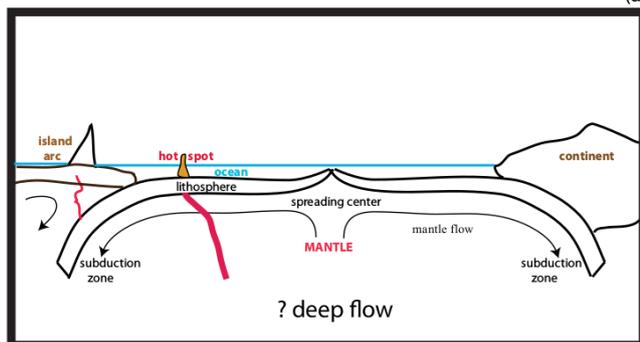
Plate tectonics

During the 1960's, the idea of plate tectonics was forming and it was hypothesized that circulation within the earth itself moved with a form of cellular convection [5]. I hoped my work might help understand mantle convection, and thus I began the never-ending journey of trying to understand the earth and ocean. First, it was well known even then that Earth has many internal layers [6, 7]. At the top are two different bodies. One body is the continents with a layer of sediment covering granitic rock (the continental crust) averaging a little less than 40 km in thickness. The other body is the ocean floor that is composed of a layer of sediment overlying basalt (the oceanic crust), which averages approximately a thickness of 5 km. Below both regions lies the mantle, which extends down to the iron liquid core boundary at a radius of 3400 km. Temperature increases with depth in the mantle due to increasing hydrostatic pressure and there are jumps in density of the mantle at a number of depths corresponding to phase changes in the crystalline structure of the various minerals. An inner core of solid material has a radius of 1200 km.

Numerous marine geology data sets were coming to light after 1965 to verify the picture of plate tectonics (Figure 2) in great detail. Although the mantle is elastic in the upper 50km, we consider Earth's deeper mantle to be a viscous creeping material. It has a temperature of about 14000 °C and lies above a hot liquid iron core.



(a)



(b)

Figura 2: (a) Una mappa semplificata delle maggiori placche tettoniche. Queste placche si muovono su un mantello più profondo e si generano lungo i centri di espansione localizzati negli oceani (frecche divergenti) e sprofondano nella terra lungo i margini convergenti che sono anche zone di subduzione (frecche convergenti). La maggior parte dei margini convergenti sono ai bordi dell'oceano Pacifico e sono associati con vulcanismo. Quando sono vicino ad un continente sono responsabili della formazione delle montagne (figura di pubblico dominio NOAA). (b) Una rappresentazione schematica della sezione verticale della terra dal mantello intermedio alla superficie che mostra le strutture principali.

(a) A simple map of the largest plates in plate tectonics. These plates move over the deeper mantle and are generated at mid-ocean spreading centers (diverging arrows) and sink into the earth at converging margins, which are also subduction zones (converging arrows). Most converging margins are at the rim of the Pacific Ocean and are associated with volcanism. If they are also near a continent they produce mountain building. (NOAA public domain figure) (b) A sketch of a vertical section of the earth from the mid-mantle to the surface showing the major structures.

°C e giace su un nocciolo di ferro liquido ancor più caldo.

Su entrambe le parti della dorsale medio oceanica, l'oceano diventa gradualmente più profondo e, alla fine, supera la profondità di 4 km. Lungo la dorsale il fondo oceanico si frattura costantemente e le due metà si muovono lateralmente, mantenendo la natura di corpi solidi. Il movimento di ciascuna "placca" è confermato sia dai dati di campo magnetico, sia dal ritrovamento di fossili più antichi nei sedimenti maggiormente distanti dalla cresta. La risalita del mantello verso i centri di espansione è accompagnato da una piccola componente di magma fuso che sgorga dal fondo oceanico, in luoghi ampi solamente uno o due chilometri posti esattamente sul centro di espansione. Questo magma si solidifica e forma una crosta oceanica di basalto. Il profilo di velocità laterale al variare della profondità al di sotto di una placca non è determinabile sulla base dei dati ad oggi disponibili, e sono pochi anche i dati riguardo al flusso che riporta il materiale verso i centri di espansione. Il profilo di temperatura di un corpo che si raffredda per conduzione termica mentre si allontana costantemente dal centro di espansione può essere

On both sides of a mid-ocean ridge, the ocean floor gradually becomes deeper and ultimately exceeds depths of over 4 km. The ocean floor steadily splits at the ridge and spreads apart as two solid bodies. The speed of each "plate" is verified both by magnetic field data and by dating older life in the sediment away from the crest. Upwelling of the mantle at spreading centers is accompanied by a small component of melted magma that rises to the ocean floor at a location that is only one or two kilometers wide on the exact spreading center. This magma solidifies and forms the basaltic ocean crust. The profile of the lateral velocity under a plate with depth is presently not determined by data, and return flow to the spreading center is poorly constrained. The temperature profile is easily calculated for a body cooled by thermal conduction as it steadily moves away from the spreading center. Results agree with extensive heat flow measurements on the ocean floor. The deeper ocean floor away from the ridge crest is the result of the hydrostatic pressure balance of the developing cold boundary layer (Figure 2b). Ocean depth

calcolato facilmente. I risultati sono in accordo con le abbondanti misure del flusso di calore dal fondo oceanico. L'approfondirsi del fondo oceanico lontano dalla cresta della dorsale è il risultato del bilancio della pressione idrostatica dello strato freddo che si sviluppa ai bordi (Figura 2b). Questo è confermato dalle misure di profondità oceanica fatta in molte parti del globo. Lungo i margini convergenti, le placche fredde affondano nel mantello della terra spinte dalla loro grande densità perché sono fredde. Queste zone erano note perché i sismografi registrano in abbondanza i grandi terremoti generati dalla loro tensione in epicentri posizionati a profondità di centinaia di chilometri lungo le placche discendenti. Quindi, si è verificato che questo strato superficiale (chiamato litosfera dai geofisici) funge da strato limite freddo per la convezione del mantello [5]. Di solito per la tettonica a placche si possono ignorare i continenti. Tuttavia, quando il materiale continentale incontra le zone di subduzione, molto di esso rimane alla superficie dove si formano le montagne.

La dinamica che governa il moto

Presento un modello semplice di convezione che era di moda nel 1980. Anche allora, e certamente adesso, la maggior parte dei modelli numerici della convezione del mantello sono molto più complicati di questo. Cominciamo con una equazione che esprime la conservazione della massa di un fluido incompressibile

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0 . \quad (1)$$

Gli apici denotano che tutto è dimensionale. La ragione sarà chiara presto. Una seconda equazione esprime la conservazione della quantità di moto e dello stress interno per un fluido viscoso.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \rho(\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \nabla' \cdot \boldsymbol{\tau}' + g\alpha\rho_0 T' \hat{k} . \quad (2)$$

Il primo e il secondo termine della (2) rappresentano l'accelerazione calcolata in un certo punto ed il passaggio di quantità di moto attraverso quel punto. Il terzo termine è il gradiente di pressione; il quarto è la divergenza del tensore degli sforzi interni; l'ultimo è la forza di gravità che agisce sulle fluttuazioni della densità rispetto

measurements over many parts of the globe confirm this. At convergent margins, the dense cold plates sink into the mantle of the earth propelled by their own large density because they are cold. These were known because large tensile generated earthquakes are prolifically recorded by seismometers from locations at depths of hundreds of kilometers in the descending plates. Therefore, it is verified that this top layer (called the lithosphere by geophysicists) is like the cold thermal boundary layer of mantle convection [5]. Generally for plate tectonics the continents are ignored. However, when continent material encounters subduction zones, much of it remains at the surface where mountains are built.

Governing dynamics

Here is a simple model of mantle convection that was popular in 1980. Even then, and certainly now, most numerical models of mantle convection are considerably more complicated than this one. We start with an equation expressing the conservation of mass for an incompressional fluid

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0 . \quad (1)$$

The primes denote that everything is dimensional. The reason will become clear soon. A second equation expresses the conservation of momentum and internal stress for a viscous fluid.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \rho(\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \nabla' \cdot \boldsymbol{\tau}' + g\alpha\rho_0 T' \hat{k} . \quad (2)$$

The first and second terms of (2) are acceleration at a point and movement of momentum into and out of a point. The third term is the gradient of pressure; the fourth is the divergence of internal stress; and the last is the force of gravity acting on deviations of density from uniform density. Vertical change in pressure from the uniform com-

alla densità uniforme. Sono stati sottratti i cambiamenti verticali di pressione dovuti alla componente uniforme della densità del fluido soggetto alla gravità. Una terza equazione esprime la conservazione dell'energia termica

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' T' = \kappa \nabla'^2 T' + \frac{H'}{\rho C_p} . \quad (3)$$

Il primo e il secondo termine in (3) sono il cambio della temperatura nel tempo e la derivata avvevativa, che esprime il trasporto della temperatura dovuto ad un campo di velocità attraverso un punto dato. Il terzo termine è il modo usuale di rappresentare la conduzione termica molecolare del calore. Il quarto è il calore generato internamente, ad esempio, per decadimento radioattivo o per riscaldamento joule se il fluido trasporta elettricità. Nelle equazioni (1-3), il vettore velocità è \mathbf{u}' , la densità media è ρ_0 , la temperatura T' , il tempo t' , l'accelerazione di gravità g , il coefficiente di espansione termica lineare è α , la diffusività termica κ , il calore generato internamente H' , il calore specifico a pressione costante C_p , \hat{k} è un vettore unitario nella direzione z' , con la forza di gravità diretta verso il basso, e, infine, il tensore degli sforzi è

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) ,$$

dove la viscosità, indicata con μ , è costante. All'inizio la temperatura è dappertutto T'_0 . Il fluido è in una camera bidimensionale di profondità D' . La temperatura è uniforme, e la temperatura lungo il fondo è $T'_0 + \Delta T'$.

Nel passo successivo, queste verranno trasformate in equazioni prive di unità dimensionali, una tecnica normalmente usata in fluidodinamica. Le variabili diventano adimensionali dividendo la velocità per una velocità κ/D' , ed analogamente si procede con le altre variabili usando una scala di temperatura $\Delta T'$, di tempo D'^2/κ , una scala di lunghezza D' , e una scala di calore interno $\rho C_p \kappa \Delta T'/D'^2$ dove $\kappa = k_T/\rho C_p$ e k_T è la conduttività termica. La temperatura adimensionale è $T = (T' - T'_0)/\Delta T'$.

Le variabili adimensionali non hanno primi.

ponent of density of the fluid in gravity has been subtracted away. A third equation expresses the conservation of thermal energy

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' T' = \kappa \nabla'^2 T' + \frac{H'}{\rho C_p} . \quad (3)$$

The first and second terms of (3) are the change in temperature with time at a point and the advective derivative, which expresses the movement of temperature by a flow field into and out of a point. The third term is standard molecular thermal conduction of heat. The fourth is heat generated internally, perhaps for example by radioactive decay or by joule heating if the fluid conducts electricity. In equations (1-3), the velocity vector is \mathbf{u}' , the average density is ρ_0 , temperature is T' , time is t' , acceleration of gravity is g , the linear thermal coefficient of expansion is α , thermal diffusivity is κ , internal heat generation is H' , specific heat at constant pressure is C_p , \hat{k} is a unit vector in the upward z' coordinate direction with the force of gravity directed downward, and finally the stress tensor is

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) ,$$

where viscosity denoted by μ is constant. Initially the temperature everywhere is T'_0 . The fluid is in a two-dimensional chamber of depth D' . Temperature is uniform, and the temperature along the bottom is $T'_0 + \Delta T'$.

Next, these will be transformed to dimensionless equations, a technique that is commonly done in fluid dynamics. The variables are made dimensionless by dividing velocity by a velocity κ/D' , and likewise for the other variables using temperature scale $\Delta T'$, time scale D'^2/κ , length scale D' , and internal heating scale $\rho C_p \kappa \Delta T'/D'^2$ where $\kappa = k_T/\rho C_p$ and k_T is thermal conductivity. Dimensionless temperature is $T = (T' - T'_0)/\Delta T'$.

Dimensionless variables have no primes. The

L'equazione del calore adimensionale è

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + h . \quad (4)$$

Per l'equazione della quantità di moto, il nostro processo di riscaldare le variabili introduce un numero di Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ nel denominatore di entrambi i termini che corrispondono alla parte sinistra dell'Eq. (2). Poichè il mantello terrestre ha $Pr > 10^{20}$, quei termini saranno trascurati. Per semplificare ulteriormente, studieremo un fluido bidimensionale. Usiamo vorticità $\zeta = \partial w/\partial x - \partial u/\partial z$ che obbedisce all'espressione

$$\nabla^2 \zeta = -Ra \frac{\partial T}{\partial x} , \quad (5)$$

e, per soddisfare automaticamente l'Eq. (1), viene usata una funzione di corrente ψ dove $u = -\partial\psi/\partial z$ e $w = \partial\psi/\partial x$. Questo soddisfa

$$\nabla^2 \psi = \zeta . \quad (6)$$

Il numero di Rayleigh è $Ra = g\alpha\Delta D^3/\kappa$ dove $\nu = \mu/\rho_0$. Il numero di Rayleigh per il riscaldamento interno è $Rai = hRa$. Per fornire degli esempi, le equazioni (4,5,6) sono risolte numericamente. Le condizioni al contorno sono $\psi = \zeta = 0$ per tutti i bordi, che corrispondono a bordi lisci e impenetrabili dal fluido, privi di attrito viscoso lungo tutti e quattro i lati. Sul bordo superiore, la temperatura è mantenuta completamente uniforme in modo che $T = 0$, e il bordo inferiore ha $T = 1$. Non c'è flusso di calore attraverso i lati della camera. La versione adimensionale della legge di Fourier per la conduzione di calore, con x la coordinata longitudinale, è $\partial T/\partial x = 0$. Le condizioni iniziali sono $\psi = \zeta = T - 1 = 0$ nell'interno. L'equazione (4) è risolta numericamente usando uno schema *leapfrog*-trapezoidale ad ogni passo. Quindi (5) è risolta usando uno dei codici di soluzione numerica veloce dell'equazione di Poisson, disponibili per queste particolari condizioni al contorno. Successivamente, (6) è risolta nello stesso modo, ed il ciclo è poi ripetuto per il numero desiderato di iterazioni.

Il flusso

Ogni sequenza di calcolo riproduce delle strutture nel campo di velocità e di temperatura. Un

dimensionless heat equation is

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + h . \quad (4)$$

For the momentum equation, our scaling places a Prandtl number $Pr = \nu/\kappa$ in the denominator of both terms corresponding to the left hand side of (2). Since the mantle of the earth has $Pr > 10^{20}$, those terms will be dropped. To further simplify, two dimensional flow is studied. We use vorticity $\zeta = \partial w/\partial x - \partial u/\partial z$ which obeys

$$\nabla^2 \zeta = -Ra \frac{\partial T}{\partial x} , \quad (5)$$

and, to automatically satisfy (1), a stream function ψ is used where $u = -\partial\psi/\partial z$ and $w = \partial\psi/\partial x$. This satisfies

$$\nabla^2 \psi = \zeta . \quad (6)$$

The Rayleigh number is $Ra = g\alpha\Delta D^3/\kappa$ in which $\nu = \mu/\rho_0$. Internal heating Rayleigh number is $Rai = hRa$. To illustrate examples, equations (4,5,6) are solved numerically. Boundary conditions are set to $\psi = \zeta = 0$ on all boundaries, which corresponds to no penetration by fluid and to slippery boundaries with zero viscous drag along all four sides. At the top boundary, the temperature is kept completely uniform so $T = 0$ and the bottom boundary has $T = 1$. Chamber sides have zero heat flux. The dimensionless version of Fourier's law of heat conduction with x the sideways coordinate is $\partial T/\partial x = 0$. The initial conditions are in the interior. Equation (4) is advanced numerically using a leapfrog-trapezoidal scheme for each time step. Then, (5) is solved using one of the many available Poisson's equation fast numerical solver codes available for these particular boundary conditions. Next, (6) is solved in the same way followed by a repeat of the cycle for as many time steps as desired.

The flow

Each calculation sequence generates flow and temperature patterns. A good example of flow

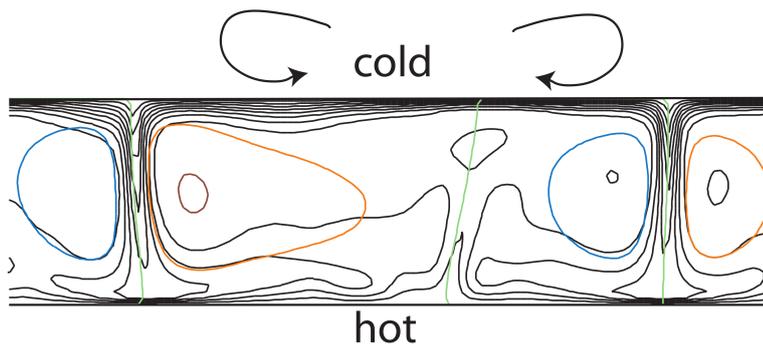


Figura 3: Vista laterale di una coppia di celle convettive con $Ra = 2 \times 10^5$, $h = 8$ (quindi $Rai = 1.6 \times 10^6$), e valore infinito di Pr . Le linee di flusso sono mostrate a colori, e le direzioni delle due celle sono schematizzate sopra ognuna. Le isoterme sono mostrate in nero e sono equispaziate di un intervallo di 0.1 tra freddo e caldo. La dimensione laterale della camera è di 16 volte la profondità del fluido.

View from the side showing a pair of convection cells with $Ra = 2 \times 10^5$, $h = 8$ (thus $Rai = 1.6 \times 10^6$), and infinite Pr . Flow lines are shown in color and the directions of the two cells are sketched above each. Isotherms are shown in black and are equally spaced every 0.1 interval between hot and cold. The lateral size of the actual chamber is 16 times the fluid depth.

buon esempio del campo di moto e di temperatura è mostrato nella Figura 3. Gran parte del moto è prodotta dallo strato limite freddo vicino al bordo superiore che genera una forza verso il basso nelle regioni dove il fluido affonda a causa della sua alta densità. Moti più deboli occorrono nelle regioni ascendenti al di sopra del più debole strato limite inferiore caldo vicino al pennacchio al centro. Le celle mostrano uno strato limite superficiale con uno spessore verticale leggermente maggiore di quello delle placche tettoniche. Nel modello si trova un flusso di calore che è in accordo generale con il corrispondente flusso di calore del fondo oceanico. In aggiunta, le velocità sono in accordo con le vere velocità delle placche, ma questo solo se facciamo i calcoli per valori di Ra più grandi, e selezioniamo con cura i valori della viscosità e profondità per la penetrazione del flusso. Questi valori stanno all'interno di un grande intervallo di possibili valori di viscosità trovati all'interno del mantello dalle misure geofisiche.

Progressi

Sebbene l'intero quadro della tettonica a placche e della deriva dei continenti sia stato abbondantemente verificato negli ultimi 50 anni, la documentazione dei moti profondi del mantello ha fatto progressi lenti. Qui elenchiamo alcune scoperte [8, 9].

and temperature at one instant is shown in Figure 3. Much of the motion is produced by a top cold boundary layer that generates a downward force in the sinking regions because of its high density. Smaller motion rises above the weaker bottom hot boundary layer near the plume in the center. The cells have a surface thermal boundary layer with a vertical thickness slightly greater than the tectonic plates. One can find a heat flow in the model that is in general agreement with corresponding heat flows on the ocean floor. In addition, the speeds are in agreement with actual plate speeds but this is true only if we do the calculation for larger Ra and pick certain values of viscosity and depth for the penetration of flow. These values lie within a large range of possible values of viscosity inside the mantle found by geophysical measurements.

Advances

Although the entire picture of plate tectonics and continental drift has become abundantly verified over the past 50 years, documenting the deep flow within the mantle have progressed slowly. Here are a few advances [8, 9]:

1. La geochimica che misura diversi elementi ed isotopi, rivela numerosi dettagli dei processi di fusione che producono lava e rocce superficiali. Queste indicano che c'è più di una riserva di materiale nel mantello profondo che fornisce lava ai centri di espansione ed agli *hotspots*. La posizione della maggior parte di queste riserve all'interno del mantello non è ancora chiara.
 2. Le diverse velocità delle onde sismiche (sia elastiche che di compressione) hanno rivelato grandi chiazze nel mantello in aggiunta alla struttura a strati conosciuta da decenni. Nonostante alcune di queste chiazze siano chiaramente associate a placche che sprofondano, altre sono probabilmente collegate all'allineamento cristallino, alla temperatura, ai cambiamenti di fase, e forse anche alla composizione chimica della roccia nel vasto interno del mantello. Qualunque implicazione riguardo al campo di velocità è assai vaga. Al fondo del mantello esiste uno strato distinto. Questo strato non è uniforme intorno al bordo nucleo-mantello. Potrebbe trattarsi di una chiazza di tipo termo-chimico simile alla base del pennacchio nella Figura 3.
 3. Per descrivere in modo sistematico queste osservazioni, sono stati sviluppati diversi modelli numerici di convezione del mantello. Questi hanno numerose proprietà a) Lo strato superficiale non è facilmente caratterizzabile matematicamente come un materiale solido tridimensionale che però fluisce costantemente. Soltanto recentemente si è stati capaci di riprodurre placche tridimensionali su una sfera. b) Strati interni prodotti da cambiamenti di fase nella struttura cristallina del mantello a causa di effetti di pressione e temperatura possono generare improvvisi e rapidi cambiamenti di velocità (valanghe). c) Lo strato limite inferiore è difficile da inserire perché gli effetti dell'alta temperatura e pressione sul lento fluire del mantello sono poco noti. Se il materiale in questa zona differisca da quello del mantello, o se questo sia semplicemente uno strato limite freddo, non è noto. d) In generale, la domanda se il
1. Geochemistry that measures assorted elements and isotopes reveals numerous details of melting processes that produce lavas and surface rocks. These indicate that there is more than one deep mantle reservoir of material supplying lavas at spreading centers and hotspots. The locations of most of the large bulk reservoirs within the mantle remains unclear.
 2. Different seismologic wave speeds (both elastic and compression waves) have revealed large patches in the mantle in addition to the layered structure that has been known for decades. Although some patches are clearly associated with sinking slabs, others are probably connected to crystal alignment, temperature, phase changes, and perhaps even bulk composition in the vast mantle interior. Any connections with actual flows are vague. At the bottom of the mantle a distinct layer exists. This layer is not uniform around the core-mantle boundary. It may be a thermo-chemical patch like the plume base in Figure 3.
 3. To sort out these observations, numerical models of mantle convection have been developed. These have numerous features: a) The surface layer is not easily mathematically characterized in three dimensions as a solid material that also flows steadily. Only recently have people been able to make three-dimensional plates on a sphere. b) Internal layers from phase changes in the crystalline structure of the mantle due to pressure and temperature effects can lead to abrupt and rapid velocity changes (avalanches). c) The bottom boundary layer is difficult to include since the effects of high temperature and pressure upon the creeping behavior of the mantle are vaguely known. Whether material in this zone differs from other mantle material or whether the layer is just a cold boundary layer is unknown. d) Generally speaking, the question of a shallow or deep return flow from subduction zone to ridge is not clearly resolved by numerical models. It is not known exactly how the return flow interacts with phase changes, and the three dimensional

flusso di ritorno dalla zona di subduzione alla dorsale sia più o meno profondo non è chiaramente risolta dai modelli numerici. Non è noto esattamente come il flusso di ritorno interagisca con i cambiamenti di fase, e il flusso di ritorno in tre dimensioni in una sfera non è ancora stato chiaramente studiato.

4. Stime del tasso di raffreddamento della Terra mostrano che il mantello è quasi del tutto scaldato dall'interno dal decadimento radioattivo di minime quantità di radio, uranio e torio. Il mantello e il nucleo sono ancora in corso di raffreddamento pur essendosi formati 4.6 miliardi di anni fa. La localizzazione della fonte di calore interna e della convezione transiente del mantello nell'arco della storia della Terra non è ancora chiaramente identificata dalle simulazioni numeriche. Lentamente stiamo imparando sempre di più sulla convezione nel nucleo che produce il campo magnetico terrestre. Questa potrebbe essere accompagnata dalla crescita del nucleo interno.
5. Esiste un ciclo interessante detto ciclo di Wilson. I continenti formano ciclicamente un grande supercontinente che lentamente si rompe in un certo numero di continenti che vanno alla deriva per poi riassemblarsi in un altro supercontinente dopo circa 500 milioni di anni. Al momento, il ciclo di Wilson è riprodotto in alcuni modelli, ma il ruolo dei continenti in questi modelli non è chiaro. Discuterò ulteriormente questo problema.
6. Luoghi di attività vulcanica concentrata con eruzioni sequenziali lungo una linea dritta sulla superficie di una placca tettonica potrebbero essere una chiara indicazione che la placca si sta muovendo al di sopra di un pennacchio caldo che risale dal mantello producendo l'apparente movimento dell'"hot spot". Un ampio dibattito si è sviluppato negli ultimi 40 anni se questi ascendessero attraverso il mantello inferiore e superiore partendo dall'interfaccia tra nucleo e mantello, o comunque da grandi profondità dove il mantello è relativamente

return flow on a sphere is not clearly constrained yet.

4. Estimates of Earth's cooling rate show that the mantle is largely heated from within by radioactive decay from trace amounts of radium, uranium and thorium. The mantle and core may also be still slowly cooling from the formation period 4.6 billion years ago. The location of internal heating and transient mantle convection over the history of Earth is not clearly resolved numerically. Slowly we are learning more about the convection in the core that produces Earth's magnetic field. This may be accompanied by growth of the inner core.
5. An interesting cycle known as the Wilson cycle exists. The continents cyclically form one large supercontinent that slowly breaks into a number of continents drifting apart only to reassemble into another supercontinent approximately 500 million years later. To date, the Wilson cycle is reproduced in some models, but the exact role that the continents play in this is still unclear. More discussion about this is given below.
6. Locations of concentrated volcanic activity that have sequentially erupted along a straight line on the surface of the tectonic plates may be signatures of the plate material travelling above an ascending hot thermal mantle plume in a "hot spot" frame of motion. A large debate occurred during the past 40 years about whether or not these rise up through the lower and upper mantle from the core-mantle interface, or at least from some great depth where the mantle is relatively motionless. Geochemical and geometric constraints of these "hot spots" indicate an origin from a region different from the very top of the mantle below the plates. Seismic resolution capabilities to view the proposed deep mantle plumes developed slowly, but recent seismic results show the origins of some hotspots to be deeper than 2000 km.

privo di moto. Vincoli geochimici e geometrici di questi "hot spot" indicano un'origine da una regione diversa da quella parte del mantello posta immediatamente al di sotto delle placche. Le capacità di risoluzione sismica per osservare questi ipotetici pennacchi nella profondità del mantello si è sviluppata lentamente, ma recentemente risultati sismici mostrano le origini di qualche "hot spot" a profondità superiori ai 2000 km.

Qualche esempio

Il mio coinvolgimento con gli "hot spots" dell'argomento 6 cominciò per caso. Avevamo condotto degli esperimenti nei quali un olio "intrusivo" con una certa viscosità e densità era iniettato nel fondo di una camera che conteneva olio di un'altra viscosità e di densità leggermente più alta [10]. L'olio più profondo e più leggero fluttuò verso l'alto dal fondo poiché era meno denso. La forma e la velocità del materiale che emergeva fu fotografata e la posizione dell'intrusione fu registrata. Una prima motivazione era quella di capire la struttura delle cupole salifere e di altre strutture geologiche nelle quali uno strato di sale emerge attraverso rocce più dense dopo che il sale diventa caldo e mobile. Le cupole salifere sono di grande interesse per l'industria del petrolio perché formano eccellenti campi di petrolio. Gli esperimenti mostrarono che, nei casi in cui il materiale inserito aveva viscosità inferiore a quella ambientale, il materiale inserito inizialmente forma una sfera di raggio crescente. Dopo qualche tempo, la sfera diventa sufficientemente grande da sollevarsi dal fondo grazie alla spinta di Archimede (come un grande pallone liquido in un bagno di olio denso). Poi si muove verso l'alto ad una velocità relativamente costante lasciandosi dietro un condotto verticale.

Successivamente, il liquido fluisce verso l'alto attraverso il condotto, come se fosse un tubo solido, e raggiunge il bozzo sferico. Ipotizzammo che questa struttura fosse realizzata sotto la catena delle isole Hawaii, e le parole "testa del pennacchio" e "coda a condotto" sono poi state spesso utilizzate per descrivere la sfera ed il condotto. Le teste dei pennacchi e le code sono

Some examples

My involvement with the "hot spots" in topic 6 began by accident. We had conducted some experiments in which an "intrusive" oil of one viscosity and density was injected into the bottom of a chamber holding oil of a second viscosity and slightly higher density [10]. The lighter deep oil floated upward from the bottom since it was less dense. The shape and speed of the rising material was photographed and the location of the intrusion recorded. One primary motivation was to learn the structure of salt domes and other geological structures in which a layer of salt rises through denser rock after the salt becomes heated and mobile. Salt domes are of great interest to the oil industry because they form excellent oil fields. The experiments showed that for runs in which the intrusive material is lower in viscosity than the ambient material, the intrusion first formed a sphere of gradually increasing radius. After some time, the sphere became large enough to rise buoyantly (like a big liquid balloon in a bath of thick oil) away from the bottom. Then it moved upward at relatively constant speed followed by a vertical cylindrical conduit.

Subsequently, the liquid flowed up by ordinary pipe flow through the conduit into the spherical head. We suggested that this structure was occurring under the Hawaiian Island chain and the words "plume head" and "conduit tail" have become the words commonly used to describe the sphere and the conduit. Plume heads and tails are very robust and found using many other

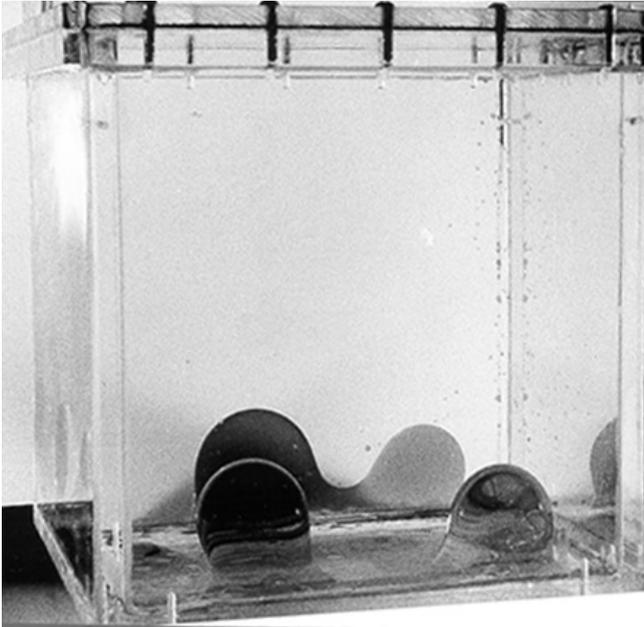


Figura 4: Quattro teste corrispondenti a pennacchi in formazione in un sottile strato di glicerina colorata meno denso, posto al di sotto di uno strato molto più spesso di olio di silicone trasparente, molto più denso. La viscosità della glicerina è circa pari a quella dello sciroppo riscaldato, e la viscosità dell'olio al silicone è di molti ordini di grandezza più grande.

Four plume heads forming in a thin layer of lighter, dyed glycerin under a much thicker layer of denser, clear silicon oil. The viscosity of the glycerin is about the same as warmed syrup, and viscosity of the silicon oil is many orders of magnitude greater.

strutture osservate frequentemente, e si trovano usando molti altri liquidi di viscosità diversa come sciroppo, glicerina ed in diverse simulazioni numeriche. Si trovano anche quando la sorgente del fluido che risale non è localizzata. Per esempio, la Figura 4 mostra un esperimento dove uno strato sottile di fluido con viscosità e densità inferiori è inserito sotto un fluido più viscoso. Quattro teste di pennacchi si sono formate e stanno ascendendo. Più tardi, i condotti cilindrici sotto di loro permetteranno al fluido di fluire verso l'alto dopo questa prima ascesa. Il concetto di testa/coda è stato applicato in vari modi. Primo, quando la sfera arriva alla cima spiega le gigantesche inondazioni di basalto. Apparentemente, queste avvengono quando appare sulla superficie terrestre un nuovo "hotspot" e la maggior parte di esse è poi seguita da una catena di "hotspot". Questi eventi possono aver prodotto qualche evento di estinzione. Secondo, il movimento del mantello può piegare i condotti e, sotto particolari condizioni, formare nuove teste di pennacchi che emergono dalle pieghe formatesi nel condotto. È stato suggerito che l'inclinazione aiuta a produrre una successione di vulcani ben separati l'uno dall'altro lungo una catena di "hotspot" [11, 12]. Studi quantitativi indicano che alcuni condotti sono troppo larghi per sviluppare pieghe sufficienti ma altri non lo sono. Un'applicazione dettagliata alle catene di "hotspot" note diventerà presto possibile grazie ai progressi della sismologia.

liquids of assorted viscosities such as syrups and glycerin as well as with numerical runs. They are even found when the fluid source is not localized. For example, Figure 4 shows an experiment where a thin sheet of fluid with lower viscosity and density is placed under a more viscous fluid. Four plume heads have formed and are rising up. Later, the cylindrical conduits under them will support upward flow of remaining fluid after this first event. The head/tail concept has been applied to the earth in many ways. First, when the sphere arrives at the top it explains gigantic flood basalts. These apparently occur when a new hotspot arrives on the earth's surface and most are trailed by hotspot tracks. These events may have produced some of the extinction events. Second, mantle shear can tilt conduits and under certain conditions lead to new plume heads breaking out above a tilted conduit. It was suggested that the tilt helps to produce the discrete volcanoes along some hotspot tracks [11, 12]. Quantitative studies indicate that in the earth some conduits are too large to develop sufficient tilt and others are not. Detailed application to known hotspot tracks is becoming developed because of advances in seismology.

Un secondo mio interesse è stato quello dell'interazione tra i continenti e la convezione nel mantello (argomento 5). Questa è la migliore ipotesi riguardo alle cause del ciclo di Wilson. Nei primi anni '70, fu trovato che delle sorgenti di calore poste a galleggiare in un liquido viscoso sviluppano un flusso che sospinge il galleggiante [13]. Un tale galleggiante, posto in un acquario, viaggerebbe avanti ed indietro se potesse cambiare direzione ogni volta che colpisce uno dei bordi [14]. Uno strato leggermente meno denso di materiale che sviluppa calore posto sopra ad un fluido in convezione può produrre onde oscillanti che viaggiano avanti ed indietro [15, 16]. Esperimenti di laboratorio nel 2000 hanno mostrato che anche un isolante termico (un rozzo modello di continente) che galleggia sopra un fluido in convezione di Rayleigh-Bénard si auto-spinge [17]. Studi numerici di celle di convezione bidimensionale con blocchi isolanti e rigidi indicano risultati simili [18].

Calcoli numerici come quelli della Fig. 3 con un isolante termico galleggiante hanno mostrato più dettagli riguardo all'auto-propulsione, includendo il ciclo di Wilson dato che il galleggiante va da un bordo della camera all'altro e ritorno [19]. La Figura 5 mostra la circolazione sotto il galleggiante. È diversa dalle altre celle convettive perché è un monopolo e non un dipolo come nelle celle convettive ordinarie. Noi chiamiamo questa cella auto-propagantesi come la "cella convettiva della deriva continentale" o "cella di deriva" in breve. Gli studi numerici producono due scoperte inaspettate. La prima è che la cella di deriva aumenta grandemente il trasferimento di calore dal mantello alla superficie. Secondo, la placca in subduzione nella cella di deriva affonda diagonalmente invece che verticalmente come succede nelle celle di convezione ordinaria. (Per esempio le coppie di circolazione alternata senza inclinazione nella Figura 3). Questa placca piegata assomiglia a quella che affonda nel mantello nella Figura 2b.

Progredendo

Studi numerici che investigano molti dei concetti sono condotti da un grande numero di gruppi. Alcuni modelli numerici tentano di essere più realistici incorporando numerosi processi che av-

A second interest of mine has been the interaction of continents and mantle convection (topic 5). This is a primary candidate for causing the Wilson cycle. In the early 1970's it was found that floating surface heaters in a viscous liquid develops a flow that self propels the float [13]. Such a float in a tank will travel back and forth if the float can reflect from each boundary [14]. A slightly less dense layer of heat producing material on the top of convection can develop oscillating waves travelling back and forth [15, 16]. Laboratory experiments in 2000 showed that a thermal insulator (a crude model of a continent) floating on top of Rayleigh-Bénard convection also self propels [17]. Numerical studies of two dimensional convection cells with both insulating and also rigid floating blocks show similar results [18].

Calculations like those in Figure 3 along with a floating thermal insulator showed more details of the self-propelling aspect, including the Wilson cycle as the float goes from one end of a chamber to the other and back [19]. Figure 5 shows the circulation under the float. It is different from other convection cells because it is a monopole rather than the bipole of ordinary convection cells. We call the self-propagating cell the "the continental drift convection cell" or "drift cell" for short. The numerical studies produced two unexpected new findings. First the drift cell greatly enhances heat transfer from the mantle to the top. Second, the subducting slab in the drift cell sinks at an angle rather than vertically downward as happens in the ordinary convection cells. (See the pairs of alternating circulation and no tilts in Figure 3). This tilted slab resembles the tilted plate sinking into the mantle in Figure 2b.

Continuing progress

Numerical studies that investigate many of the concepts are conducted by a large number of groups. Some numerical models attempt more realism by incorporating the numerous processes

(a) *The continental drift cell*

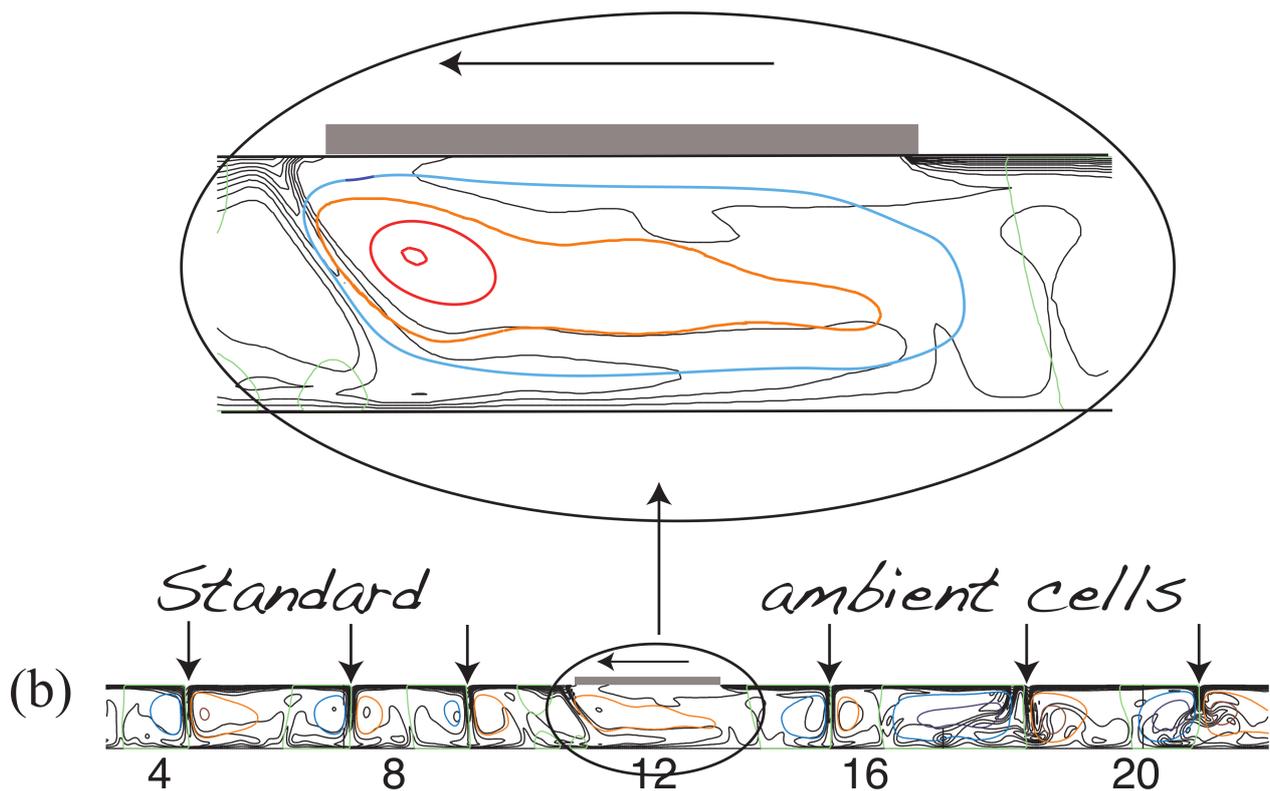


Figura 5: Una cella di deriva continentale prodotta da un continente isolante termico con una larghezza adimensionale (divisa per la profondità) di 2.5 e una lunghezza adimensionale di 32. Il numero di Rayleigh basato sul riscaldamento interno è 1.6×10^6 . (a) Questa immagine laterale ingrandita mostra la placca fredda inclinata che si immerge sotto il bordo che avanza del continente grigio che si muove verso sinistra. Il monopolo sotto il continente galleggiante ha una circolazione antioraria. Un piccolo pennacchio cresce dal fondo alla destra del continente. Le linee di flusso sono mostrate da contorni colorati. Le isoterme ogni 0.1 unità sono mostrate in nero. (b) Una immagine meno ingrandita della stessa cella di deriva. Le celle di convezione su entrambi i lati del continente in moto sono indisturbate. I contorni in colori caldi individuano la circolazione antioraria, e quelli in colore freddo la circolazione oraria. Dalla Figura 1 di [19].

The Continental drift convection cell produced by a thermally insulating continent with a scaled width (divided by the depth) of 2.5 and scaled chamber length of 32. The Rayleigh number based on internal heating is 1.6×10^6 . (a) This close-up side view shows the tilted cold slab dipping under the leading edge of the grey continent moving to the left. The monopole under the float has counterclockwise circulation. A small plume rises from the bottom to the right of the continent. The flow lines are shown by color contours. Every 0.1 isotherm is shown in black. (b) A more distant view of the same drift cell. The convection cells on either side of the moving continent are undisturbed. The warmer color contours show counterclockwise circulation and the colder color contours show clockwise circulation. From Figure 1 of [19].

vengono nella Terra [8, 9]. Qui ne citiamo alcuni. Leggi di flusso non-Newtoniane. Convezione in tre dimensioni, sia in una sfera o in una scatola. Effetti della pressione includendo la compressione dei materiali e i suoi cambiamenti di fase. La formazione di liquidi nel mantello. L'inclusione di piccole tasche di liquido. La migrazione del liquido nel mantello superiore. Il raffreddamento transiente su scale di centinaia di milioni o addi-

occurring in the earth [8, 9]. Here are a few. Non-Newtonian flow laws. Convection in three dimensions either on a sphere or in a box. Pressure effects including compression of material and phase changes in the material. The formation of melts within the mantle. The inclusion of small pockets of melt, The migration of melt in the upper mantle. Transient cooling over hundreds of millions and even billions of years. The



John A. Whitehead: ha conseguito la laurea in ingegneria meccanica presso la Tufts University nel 1963 ed il master ed il dottorato presso la Yale University nel 1965 e nel 1968, rispettivamente. Dopo aver lavorato come ricercatore post-doc ed assistente ricercatore in geofisica presso l'Istituto di Geofisica e Fisica Planetaria della UCLA, nel 1971 si è unito allo staff scientifico del Woods Hole Oceanographic Institution dove è stato scienziato assistente, associato e senior, fino a diventare emerito nel 2007. Ha diretto per oltre trent'anni il laboratorio di Dinamica dei Fluidi Geofisici, ed ha partecipato alla Scuola Estiva in Dinamica dei Fluidi Geofisici per oltre quaranta anni. Buona parte della sua attività di ricerca si è concentrata sulla comprensione della complessa meccanica dei fluidi degli oceani e dell'interno dei pianeti utilizzando esperimenti di laboratorio e la teoria fluidodinamica. Inoltre, ha partecipato a diverse crociere, programmi di studio, gruppi di lavoro e studi scientifici in tutto il globo.

John A. Whitehead: earned his bachelor's degree in mechanical engineering from Tufts University in 1963 and his master's degree and Ph.D. from Yale University in 1965 and 1968, respectively. After working as a postdoctoral fellow and then an assistant research geophysicist at the Institute of Geophysics and Planetary Physics, UCLA he joined the Scientific Staff at Woods Hole Oceanographic Institution in 1971 and was an assistant, associate and senior scientist and became Scientist Emeritus in 2007. He ran the Geophysical Fluid Dynamics laboratory for over thirty years and has participated in the Geophysical Fluid Dynamics Summer School for over forty years. Much of his research has focused on understanding the complex fluid mechanics of the oceans and planetary interiors through the use of laboratory experiments and fluid dynamics theory. In addition, he has been active in many cruises, programs, working groups and scientific studies around the globe.

L'esplorazione del sottosuolo alla ricerca di correnti convettive

Verso il basso tendono terra e acqua, verso l'alto aria e fuoco.

Aristotele

Gianluca Gola

Istituto di Geoscienze e Georisorse - CNR Pisa

La Geotermia (dal greco *geo*-terra e *thermòs*-calore) è la disciplina che studia i meccanismi di trasporto dell'energia termica all'interno della Terra. Se da un lato la conduzione risulta essere il meccanismo di trasporto di calore dominante nella crosta terrestre, in prossimità della superficie la distribuzione di temperatura può essere fortemente influenzata dalla circolazione dei fluidi che si muovono attraverso i pori e le fratture delle rocce. In condizioni geologico-strutturali favorevoli i fluidi che hanno circolato ad elevate profondità, possono risalire verso la superficie guidati dal gradiente idraulico (*convezione forzata*) e dalle forze di galleggiamento risultanti dai contrasti di densità entro la colonna di fluido (*convezione libera*). Il trasporto di calore per convezione risulta assai più efficiente della conduzione e può dar luogo ad anomalie di flusso di calore misurabili dalla superficie attraverso sondag-

gi di profondità variabile da alcune centinaia di metri sino a qualche chilometro. In questo breve articolo saranno presentati alcuni aspetti di base della Geotermia e degli effetti termici della convezione nei pozzi e nelle rocce permeabili circostanti.

Sistemi geotermici convettivi intrusivi

Un sistema geotermico è definito *convettivo* quando il trasporto di calore dalla sorgente termica alla superficie, dove il calore stesso è disperso o utilizzato, avviene grazie ad un fluido termovettore. Un sistema convettivo (anche detto *idrotermale*) risulta costituito da quattro elementi fondamentali (vedi Figura 1):

- *la sorgente di calore*, per esempio un'intrusione magmatica a grandi profondità ($\geq 5 - 10 \text{ km}$) o semplicemente il flusso di calore terrestre basale diretto verso la superficie ($\sim 33 \text{ mW/m}^2$ alla Discontinuità Crosta-Mantello),

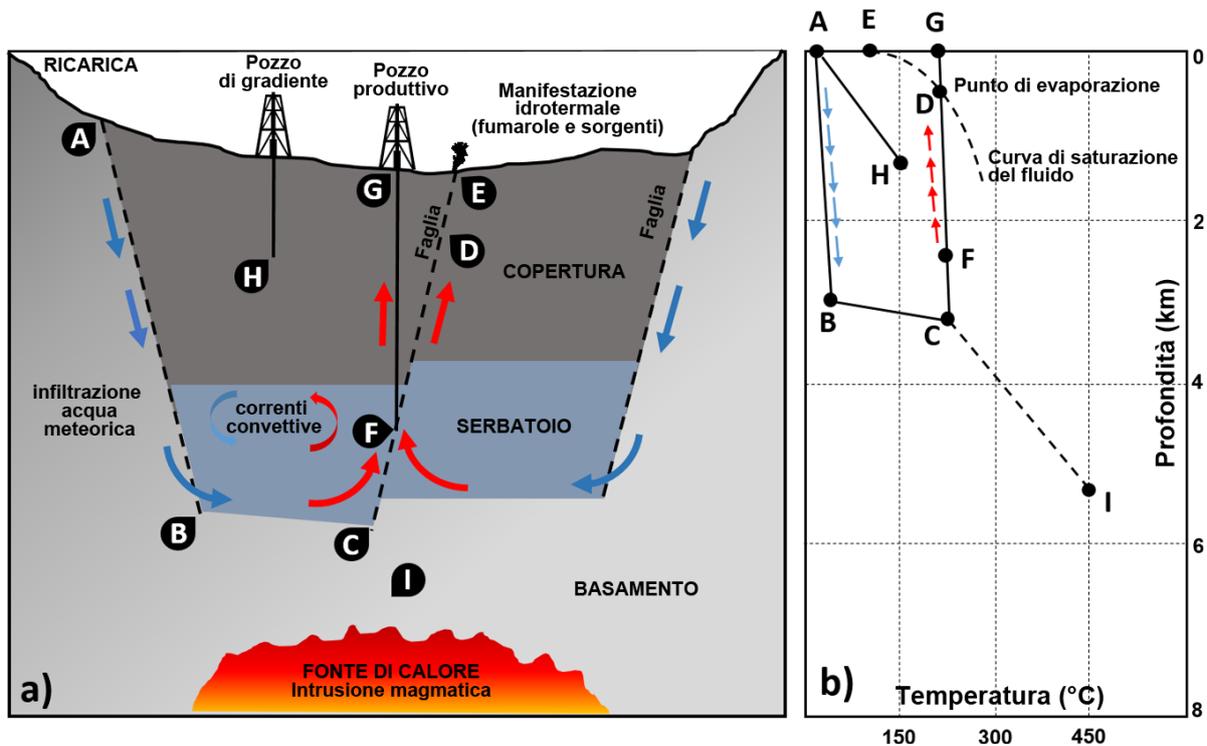


Figura 1: Schema di un sistema geotermico (a) e andamento della temperatura in funzione della profondità (b) nei diversi settori del circuito idrotermale. Una parte delle acque meteoriche superficiali s’infiltra nel sottosuolo (A) fino a raggiungere le rocce serbatoio (B). Durante il suo percorso il fluido acquista energia termica ceduta dalla fonte di calore e aumenta la sua temperatura (C). In presenza di zone fratturate (faglie) il fluido risale verso la superficie trasportando con sé energia termica. In natura, il fluido che risale attraverso le fratture depressurizza e ad una certa quota evapora (D), questo processo è all’origine delle fumarole e delle sorgenti termali (E), quando il vapore ricondensa nel sottosuolo a contatto con le acque fredde più superficiali. I livelli molto fratturati costituiscono l’obiettivo minerario dei pozzi geotermici, da questi è possibile produrre fluidi ad alta temperatura (F) con portata sufficiente ad alimentare l’impianto. A causa della rapidissima risalita del fluido geotermico su per il pozzo, il vapore prodotto è surriscaldato (G), cioè un vapore ad una temperatura superiore a quella di ebollizione alle condizioni di pressione superficiali. Accanto al pozzo di produzione, è raffigurato un pozzo di gradiente. Questi pozzi, generalmente profondi poche centinaia di metri, forniscono dati di temperatura (H) delle rocce di copertura in cui si suppone prevalga un regime conduttivo a causa della loro scarsa permeabilità. Il gradiente termico misurato è un parametro indispensabile nell’esplorazione geotermica e al calcolo del flusso di calore terrestre. Oggi la ricerca è interessata a rendere economicamente e tecnicamente utilizzabili anche quelle risorse a grande profondità ad elevata temperatura in condizioni non convenzionali (I).

- il serbatoio sepolto, cioè una serie di rocce permeabili in cui i fluidi possono muoversi attraverso i pori e le fratture,
- la copertura, cioè una serie di rocce impermeabili spessa anche alcune migliaia di metri che sigilla verso l’alto il serbatoio,
- l’area di ricarica, laddove una parte delle acque meteoriche s’infiltra in profondità alimentando il serbatoio idrotermale.

I sistemi idrotermali rappresentano la fonte di energia geotermica (cioè l’energia generata per mezzo di fonti di calore naturali nel sottosuolo) più diffusa e largamente utilizzata, essi

sono infatti classificati come *convenzionali*. Le aree in cui i fenomeni magmatici profondi hanno avuto luogo in un passato non troppo lontano (età dell’intrusione $\leq 10^6$ anni) o sono ancora in atto, rivestono un ruolo importante nel panorama geotermico globale. In presenza di un corpo magmatico in profondità ed un volume di rocce fratturato sovrastante la fonte di calore, possono originarsi nel serbatoio correnti di convezione. In corrispondenza dei rami ascendenti, i fluidi a temperatura anche superiore a $150 - 200^\circ\text{C}$ possono risalire fino ad alcune centinaia di metri o pochi chilometri dalla superficie. Questi sistemi sono classificati come *sistemi geotermici convettivi*

Pozzi da record

In termini di profondità verticale il *Kola Superdeep Borehole* è il punto artificiale più profondo sulla Terra. Il pozzo è stato realizzato nell'ambito di un progetto scientifico dell'Unione Sovietica nel Distretto di Pechengsky, nella Penisola di Kola, con l'obiettivo di perforare la massima profondità raggiungibile attraverso la crosta terrestre per studiarne la composizione e lo stato termico.

La perforazione iniziò nel Maggio 1970 e negli anni a seguire sono stati perforati un numero di pozzi devianti a partire dal foro centrale. Nel 1989 il ramo più profondo ha raggiunto la profondità di 12.262 m ed ha esplorato la crosta continentale Baltica per un terzo del suo spessore, stimato essere circa 35 km. Le rocce più profonde sono state datate 2,7 miliardi di anni e sono rappresentate da *gneiss*, rocce metamorfiche derivanti da graniti esposti ad elevate condizioni di pressione e temperatura. La temperatura di 180°C a 12 km ed il gradiente geotermico a fondo pozzo più alti delle stime fatte in fase di progettazione non hanno permesso di raggiungere i 15 km di profondità.

La crosta continentale Europea è stata studiata grazie al *German Continental Deep Drilling Programm*. Tra il 1987 ed il 1995 nella regione della Bavaria in Germania è stato completato il pozzo denominato *KTB* profondo 9.101 m e posizionato in un settore geologicamente molto interessante: la zona di sutura derivante dalla collisione tra le placche tettoniche continentali Europea ed Africana. Anche in questa occasione la temperatura di fondo pozzo pari a 265°C è risultata essere più alta di quella presunta ed ha impedito l'approfondimento del pozzo a 10 km.

Superare il limite termico dei 250 – 300°C ha richiesto un grande sforzo sia economico che intellettuale per migliorare le tecniche di perforazione in condizioni di alta temperatura. Anche grazie al crescente interesse industriale nella ricerca di fluidi in condizioni supercritiche ($T \geq 374^\circ\text{C}$ e $p \geq 22 \text{ MPa}$, vedi anche la Figura 4 nel testo) per produrre energia geotermoelettrica, sono state testate nuove tecnologie che hanno permesso di esplorare aree geotermicamente anomale e produrre fluidi a temperature maggiori di 400°C. Il progetto islandese *Iceland Deep Drilling Project* ne è un esempio.

Nel 2009 il pozzo *IDDP-1* nel campo geotermico di Krafla, inizialmente progettato per raggiungere fluidi supercritici alla profondità di 4,5 km, si è fermato alla profondità di 2.096 m quando la trivella ha intercettato un serbatoio magmatico a circa 900°C. Il pozzo quindi è stato completato per produrre fluidi in condizioni subcritiche dalla zona di contatto con l'intrusione magmatica. Dal 2011 il pozzo eroga vapore secco surriscaldato ad una portata controllata di 10 – 12 kg/s con temperature e pressioni a testa pozzo rispettivamente di 450°C e 140 bar e potrebbe produrre sino a 35 MW elettrici. Sebbene il principale obiettivo del progetto sia fallito, è stato provato che è possibile produrre fluidi in ambienti magmatici in prossimità di intrusioni dove le temperature superano i 500°C. Il pozzo *IDDP-1* si aggiudica il record di pozzo geotermico più caldo al mondo.

intrusivi [1]. Il serbatoio idrotermale influenza lo stato termico delle rocce di copertura, nelle quali si misurano gradienti geotermici prevalentemente conduttivi, molto più alti del valore medio globale ($\sim 30^\circ\text{C}/\text{km}$). Anche le *manifestazioni idrotermali* (sorgenti, fumarole, geyser) che si concentrano in superficie in prossimità di strutture tettoniche (faglie) che incanalano verso l'alto il fluido, sono una evidenza diretta della presen-

za in profondità di un serbatoio geotermico. La "Solfatarà" a Pozzuoli (Campania) e la "Valle del Diavolo" a sud di Volterra (Toscana) sono due esempi di località in Italia dove l'energia termica della Terra si manifesta in superficie attraverso fumarole e soffioni boraciferi. Si racconta che la "Valle del Diavolo" fosse famosa già all'epoca di Dante Alighieri, e che si ispirò proprio a questo paesaggio per descrivere l'Inferno nella "Divina

Commedia”.

La perforazione di un pozzo esplorativo

L'esplorazione ha il compito di fornire le informazioni necessarie a sviluppare ipotesi sulla geologia e le condizioni fisiche del sottosuolo. I pozzi esplorativi forniscono le uniche evidenze dirette riguardo la natura delle rocce, la pressione e la temperatura in profondità. Questi dati hanno un grande valore scientifico per le Scienze della Terra e per i geologi e geofisici che si occupano di formulare teorie sulla struttura della crosta terrestre e di comprendere i processi che avvengono al suo interno. Purtroppo perforare un pozzo è un'operazione lunga e costosa e gli investimenti crescono in modo esponenziale all'aumentare della profondità. Per quest'ultimo motivo la maggior parte dei pozzi è eseguita da compagnie private a scopo minerario (prevalentemente per la ricerca di idrocarburi o per finalità geotermiche). Esistono comunque pozzi profondi eseguiti puramente a scopo scientifico nati nell'ambito di progetti internazionali per studiare i continenti e gli oceani (alcuni di questi progetti sono presentati nel riquadro "Pozzi da record").

Durante la perforazione di un pozzo, qualunque sia la sua profondità ed obiettivo, occorre esercitare contemporaneamente le seguenti azioni:

- vincere la resistenza del materiale roccioso, frantumandolo in particelle millimetriche,
- rimuovere e portare verso l'alto i detriti di roccia, continuando ad agire su materiale sempre nuovo,
- dissipare il calore generato dall'attrito tra lo scalpello e la roccia,
- mantenere la stabilità delle pareti del foro,
- impedire l'ingresso dei fluidi di strato contenuti nelle formazioni attraversate.

Le rocce sono frantumate dallo *scalpello* fissato all'estremità della *batteria di aste di perforazione*

in rotazione da una piastra (nel gergo tecnico chiamata *tavola rotary*) azionata da un motore elettrico. Le aste sono cave per permettere la circolazione di un apposito fango che svolge molteplici funzioni, tra cui raffreddare lo scalpello, rimuovere e portare a giorno i detriti, evitare la sedimentazione delle particelle in sospensione quando si arresta la sua circolazione. Questi compiti sono realizzati formulando un fango con opportuna *densità*, in modo da determinare un effetto di galleggiamento del materiale solido, ed elevate *proprietà tissotropiche*, in modo che, passando dal moto allo stato di quiete, possa rapidamente formare una struttura elastica capace di trattenere in sospensione le particelle. Inoltre, la densità controlla la spinta idrostatica che la colonna di fango esercita sulle pareti del pozzo evitando allo stesso tempo il collasso del foro e l'entrata in pozzo dei fluidi di strato. In condizioni idrostatiche normali, la densità del fango impiegato varia da 1050 kg/m^3 a 1150 kg/m^3 , qualora venissero attraversate formazioni geologiche profonde che ospitano fluidi in sovrappressione, è necessario operare con fanghi aventi densità anche di $1400 - 1500 \text{ kg/m}^3$.

Le operazioni di approfondimento di un pozzo prevedono delle soste programmate durante le quali viene estratta la batteria di aste di perforazione per sostituire lo scalpello usurato, per misurare a foro ancora scoperto il profilo verticale di alcune proprietà fisiche delle rocce (detti *log geofisici*) ed in ultimo per tubare e cementare il foro fino alla profondità raggiunta. I pozzi profondi hanno di norma un profilo telescopico, cioè all'aumentare della profondità si riduce il diametro dello scalpello e dei tubaggi (vedi Figura 2).

Attraverso l'analisi dei detriti portati in superficie dal fango, il prelievo di carote di roccia e l'analisi del segnale registrato dai log geofisici (sono di *routine* le misure di resistività elettrica, radioattività naturale, velocità delle onde elastiche) è possibile ricostruire in dettaglio il profilo verticale del pozzo. Nella ricerca della fonte geotermica, la perforazione di un pozzo esplorativo profondo avviene a valle della fase di esplorazione geofisica di superficie. In questa fase preliminare, l'esecuzione di pozzi poco profondi ($200 - 300 \text{ m}$) per la misura del gradiente geotermico permette di meglio definire l'area poten-

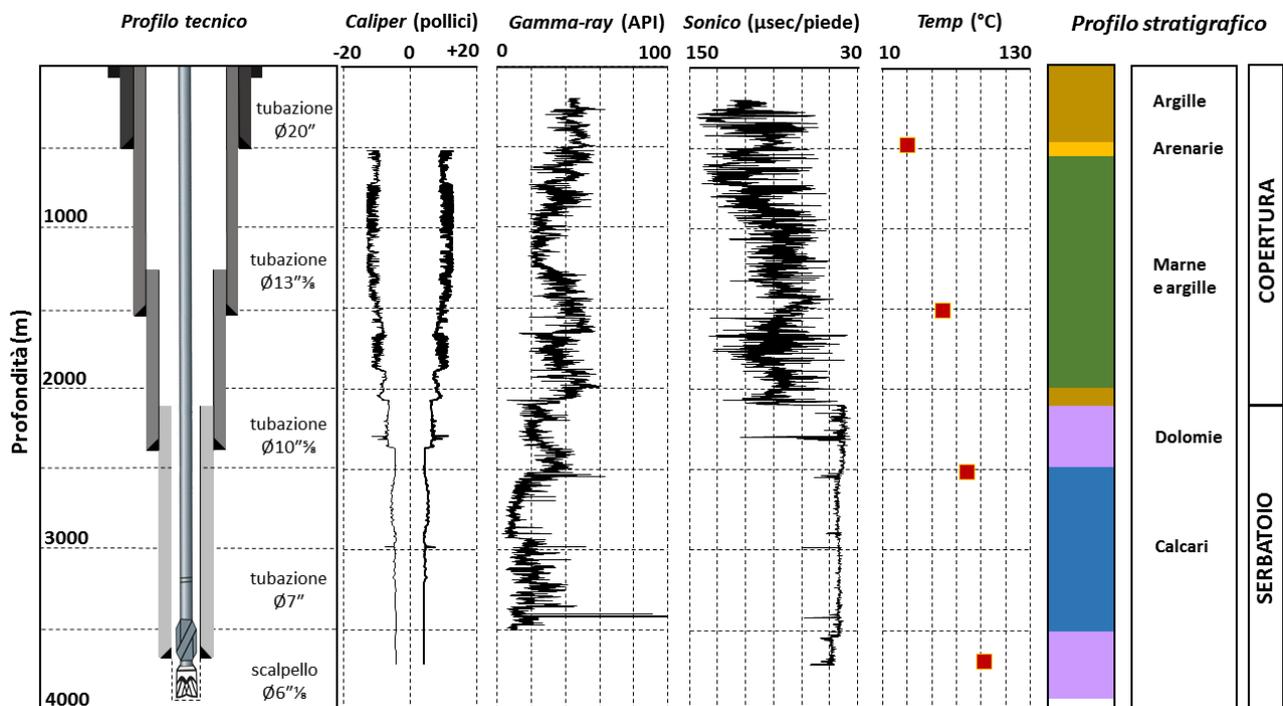


Figura 2: Esempio di profilo finale del pozzo esplorativo Monte Taburno-1, situato nel settore esterno dell'Appennino Meridionale. Il profilo tecnico riporta in sezione i tubaggi e le zone cementate. I log geofisici forniscono informazioni sul diametro del foro scoperto (caliper), sulla radioattività delle rocce (gamma-ray) e sulla velocità delle onde acustiche nelle rocce (sonico). La colonna stratigrafica deriva dall'interpretazione dei log e dallo studio petrografico dei detriti e delle carote di roccia prelevati in pozzo. In questo pozzo sono facilmente individuabili le condizioni geologiche necessarie allo sviluppo di un sistema idrotermale: formazioni impermeabili che fungono da copertura ad una serie di rocce calcaree, permeabili per fratturazione.

zialmente interessante per l'estrazione del fluido geotermico. Individuata l'area, la perforazione di un pozzo fino a 2,5 km di profondità con un diametro di soli 8 – 12 cm (detto *slim-hole*) permette di misurare nel serbatoio la temperatura, la permeabilità e la pressione. I pozzi *slim-hole* stanno diventando sempre più comuni poiché hanno costi minori rispetto ai pozzi destinati alla produzione e forniscono informazioni che migliorano notevolmente le probabilità di successo dei progetti geotermici.

Misure di temperatura e convezione in pozzo

Numerosi studi sono stati condotti per sviluppare uno strumento che misuri la temperatura delle formazioni geologiche attorno al pozzo, piuttosto che quella del fluido che lo riempie. Tuttavia tutti gli strumenti in utilizzo al giorno d'oggi misurano la temperatura del fango. Comunemente un *termometro a massima* è calato in foro insieme

ad altri strumenti di misura durante le soste della perforazione, prima che il pozzo venga tubato e cementato. Questa tipologia di termometro registra la massima temperatura incontrata durante la discesa e ragionevolmente è associata alla profondità di fondo foro. Questo approccio fornisce una misura di temperatura per ogni discesa. Se necessario, dei profili termici *continui* possono essere eseguiti anche a pozzo completato e ripetuti nel tempo. Utilizzando un *termistore* collegato ad un cavo è possibile misurare il profilo verticale di temperatura con una spaziatura minima di 3 – 9 cm. L'intervallo tra una misura e la successiva dipende dalla velocità di discesa (dell'ordine di 5 – 10 m/min) e dal tasso di campionamento del segnale (2 – 3 s⁻¹).

La teoria e la pratica mostrano che la temperatura di equilibrio del fluido in pozzo è quella delle formazioni geologiche circostanti e non sono necessarie correzioni anche nel caso di pozzi rivestiti e cementati. Ciò è vero solo se il fango ha scambiato calore sufficientemente a lungo con le pareti del pozzo e si è raggiunto l'equilibrio

Proprietà	ρ [kg/m ³]	μ [mPa s]	ν [m ² /s]	κ [m ² /s]	α [1/K]
Valore	1100	14,7	1,3 10 ⁻⁵	1,7 10 ⁻⁷	5,0 10 ⁻⁴

Tabella 1: Parametri fisici del fango di perforazione a 25°C.

termico. Poiché sono necessari anche mesi affinché il recupero termico del pozzo si concluda, la temperatura misurata non coincide con quella reale della formazione, cioè quel valore di temperatura che si avrebbe dopo un tempo d'attesa infinitamente lungo. La soluzione analitica del problema ricondotto al modello di una sorgente lineare [2] è la seguente:

$$T(r, t) = T_{\infty} + \left(\frac{Q}{4\pi\lambda}\right) \left[E_i\left(\frac{-r^2}{4\kappa t}\right) - E_i\left(\frac{-r^2}{4\kappa t_1}\right) \right] \quad (1)$$

dove r è la distanza dalla sorgente (assunta pari al raggio del foro), t è il tempo, λ la conducibilità e κ la diffusività termiche del sistema *fango-roccia*, t_1 è il tempo trascorso dall'arresto della circolazione del fango alla misura della temperatura (*tempo di stop*) e la funzione $E_i(-x)$ è l'integrale esponenziale. Il modello assume che un flusso di calore conduttivo radiale riscaldi tutti i punti lungo la verticale del pozzo. È interessante valutare quali siano le condizioni per le quali il modello della sorgente lineare risulta valido. Infatti, in una colonna verticale di fluido che possiede un gradiente verticale di temperatura potrebbero svilupparsi celle convettive. In presenza di convezione, il flusso di calore verticale in pozzo aumenta e contribuisce all'aumento di temperatura della porzione di fluido al di sopra della zona di convezione. A fondo pozzo quindi l'equilibrio termico si raggiunge con un minor tempo. L'applicazione del modello puramente conduttivo della sorgente lineare potrebbe portare ad una sovrastima della reale temperatura di formazione. In presenza di celle convettive è opportuno eseguire log termici ripetuti nel tempo in modo da meglio identificare le modalità di circolazione.

Tipicamente, un profilo di temperatura disturbato in cui sono attive celle convettive risulta circa costante in ogni cella e subisce un brusco salto al passaggio da una cella all'altra; ne risulta un andamento termico a gradini. La possibilità

che si instauri tale regime dipende, oltre che dai parametri termici e dinamici del fluido, anche dal raggio del pozzo. In Geofisica un parametro che permette di determinare le condizioni d'innescio dei moti verticali in fluidi viscosi incompressibili è il numero di Rayleigh, definito come il rapporto tra le forze di galleggiamento e le forze di attrito viscoso. Per un lungo cilindro riempito da un fluido, il gradiente termico critico, sopra il quale la convezione può manifestarsi, vale:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_c = \left(\frac{g\alpha(T + 273)}{c_p}\right) + R_a \frac{\nu\kappa}{g\alpha} \left(\frac{\gamma}{r}\right)^4 \quad (2)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, α il coefficiente di espansione termica, c_p il calore specifico, ν la viscosità cinematica e κ la diffusività termica del fluido, R_a è il numero di Rayleigh, r è il raggio del pozzo e $\gamma = r/L$ è il rapporto d'aspetto con L uguale all'altezza della cella convettiva. Il primo termine dell'Eq. 2 è il gradiente adiabatico che generalmente è trascurabile, essendo dell'ordine di 0,2°C/km. Dall'analisi del secondo termine, si evince che i pozzi a raggio più piccolo sono più stabili e aumentando la viscosità cinematica del fango si potrebbero avviare questi inconvenienti. In natura la convezione in pozzo si organizza attraverso celle convettive di altezza

\varnothing [cm]	γ			
	0,1	0,2	0,3	0,5
6	131,0	145,8	233,5	355,9
8	41,4	46,1	73,9	112,6
10	17,0	18,9	30,3	46,1
15	3,35	3,73	5,98	9,11
20	1,06	1,18	1,89	2,88
25	0,43	0,48	0,77	1,18

Tabella 2: Gradienti termici critici in funzione del diametro (\varnothing) del pozzo e del rapporto d'aspetto (γ) della cella convettiva.

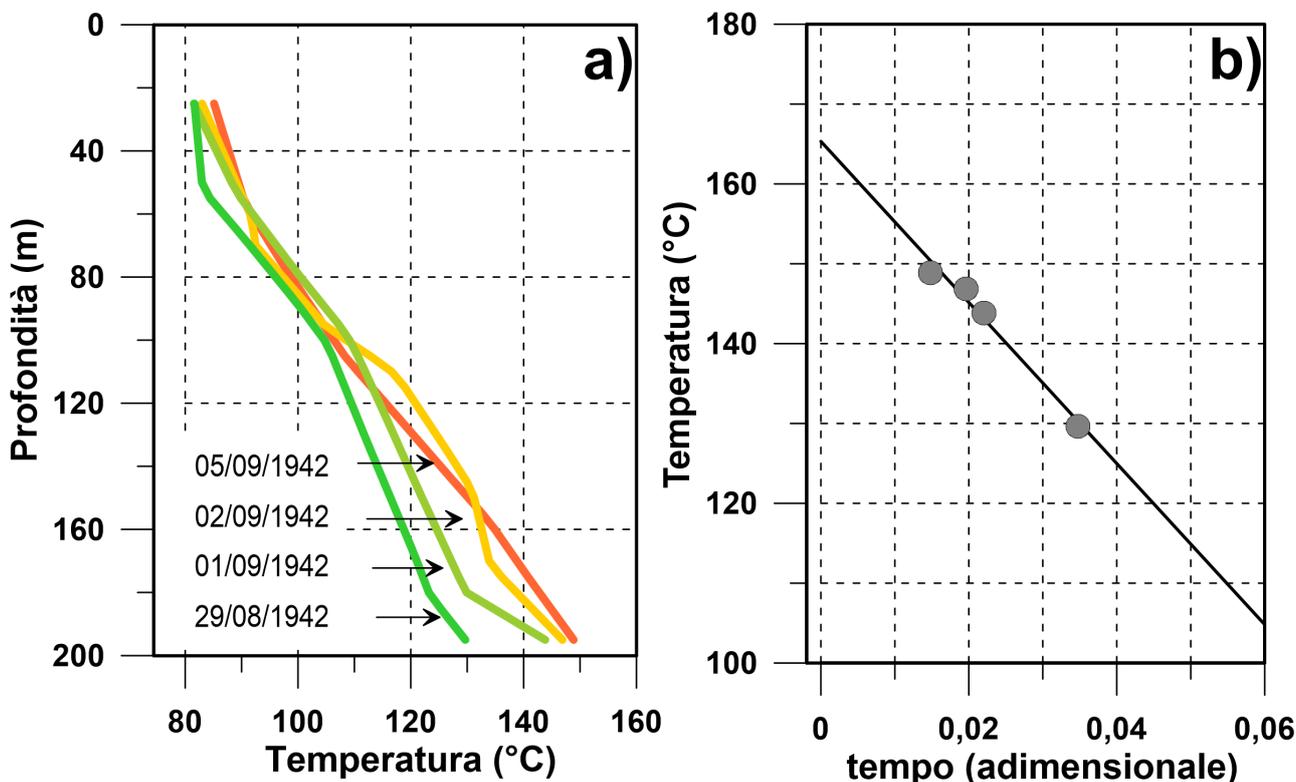


Figura 3: Log termici in un pozzo di gradiente durante il periodo di sosta della perforazione (a) ed applicazione di un metodo di correzione (Horner plot) alla serie di temperature di fondo pozzo (b). L'esempio riportato si riferisce al foro IFV-2 eseguito sull'isola di Ischia, località Fumarole. Il pozzo è tubato con tubi \varnothing 250 mm fino alla profondità di 155 m.

approssimativamente da 2 a 5 volte il diametro del foro, quindi $\gamma < 1$. Il valore del gradiente critico è determinato dal minimo valore di $R_a\gamma^4$ e per $\gamma = 0,1$ il valore minimo di $R_a\gamma^4$ vale circa 230 e aumenta a circa 625 per $\gamma = 0,5$. Per valori tipici delle proprietà dei fanghi di perforazione riportati in Tabella 1 ed un gradiente geotermico medio di $30^\circ\text{C}/\text{km}$, la colonna di fluido risulta instabile in fori aventi un diametro maggiore di 10 cm (vedi Tabella 2).

Questi valori rappresentano un limite superiore teorico; fortunatamente nella realtà il fluido risulta stabile anche a gradienti termici più elevati. Inoltre, è opportuno notare che, data l'altezza limitata delle celle convettive in foro, solo log termici continui con una risoluzione verticale inferiore a circa 1 m sono in grado di cogliere tali fluttuazioni. Per valutare il gradiente geotermico regionale temperature equilibrate misurate ogni 5-10 m in pozzi profondi almeno qualche centinaio di metri sono ampiamente sufficienti.

In Figura 3a sono riportati alcuni log termici in un pozzo geotermico profondo 197 m ripetuti nel tempo. L'elevato gradiente geotermico delle

formazioni attraversate supera di gran lunga il gradiente critico, le fluttuazioni periodiche che si osservano nella sezione più superficiale e centrale provano l'esistenza di celle convettive nella colonna di fluido in pozzo. Si osserva, inoltre, un costante aumento della temperatura di fondo pozzo anche a distanza di numerosi giorni con una tendenza a stabilizzarsi attorno ai 150°C . In Figura 3b è riportata l'applicazione di un metodo grafico per risolvere l'Eq. (1) attraverso il quale si ottiene una stima della temperatura di formazione. La temperatura ottenuta pari a 165°C potrebbe essere una sovrastima di quella reale in virtù della evidente componente convettiva di trasporto di calore.

Simulare la convezione in serbatoi geotermici

Se una lunga sezione del pozzo esibisce un gradiente molto basso, o addirittura negativo, allora è probabile che all'interno delle formazioni attraversate avvenga convezione ed il profilo termico

stabilizzato misurato descrive lo stato termico del serbatoio geotermico. Le formazioni geologiche che fungono da serbatoio sono costituite da rocce porose o fratturate, quindi permeabili, i cui vuoti sono occupati da una o più fasi fluide (liquido e/o vapore). Lo stato fisico del fluido nella roccia dipende dalle condizioni di pressione e temperatura, in profondità generalmente l'acqua si presenta allo stato liquido in quanto la temperatura di ebollizione aumenta con la pressione. Poiché all'aumentare della temperatura la densità diminuisce, i contrasti di densità che ne derivano possono innescare correnti di convezione nella colonna di fluido: le porzioni profonde a temperatura più alta e quindi a minore densità tendono a risalire verso la superficie guidate dalla forza risultante tra la spinta di galleggiamento (diretta verso l'alto) e la forza di gravità (diretta verso il basso). In Figura 4 è riportata la curva di saturazione liquido-vapore e la densità dell'acqua lungo questa curva.

In situazioni 3-D complesse, come spesso accade quando si studiano i sistemi geotermici naturali, le equazioni di trasporto che descrivono il sistema fisico sono risolte attraverso metodi numerici. Le soluzioni del sistema di equazioni differenziali sono approssimate riducendo queste ultime ad un sistema di equazioni algebriche valutato ai nodi di una griglia (detta anche *mesh*) che discretizza l'intero dominio in sub-volumi (generalmente parallelepipedi o tetraedri). Nei problemi di *thermo-fluidodinamica* il sistema di equazioni differenziali che descrive il sistema geotermico in condizioni stazionarie è:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla p = \frac{\mu_f}{\phi} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{\mu_f}{K} \mathbf{u} + F \quad (4)$$

$$\lambda \nabla^2 T - (\rho c_P)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T = A \quad (5)$$

dove le variabili risolte sono la temperatura T , la pressione p e il campo di velocità del fluido \mathbf{u} (definito dalle tre componenti u_x , u_y e u_z). Il sistema roccia-fluido è caratterizzato da opportune proprietà termiche ed idrauliche che sono: la viscosità dinamica μ , la porosità ϕ , la permeabilità K , la conducibilità termica λ , la capacità termica volumetrica (ρc_p) e la produzione di calore radiogenico A . Il pedice f si riferisce al fluido. L'equazione (3) rappresenta la *conservazione della*

massa, l'equazione (4) la *conservazione del momento* e l'equazione (5) la *conservazione dell'energia*. A secondo membro dell'equazione (4) il termine F rappresenta la forza di volume agente sul fluido e vale:

$$F = -\rho_f(p, T) g \quad (6)$$

con $\rho_f(p, T)$ la funzione di stato dell'acqua. Quest'ultima rappresenta inoltre la relazione costitutiva che lega la legge della conservazione del momento con quella dell'energia. Infatti la temperatura controlla la densità del fluido che, a sua volta, determina il risultante campo di velocità \mathbf{u} . Quest'ultimo entra in gioco attraverso il termine advettivo, $(\rho c_P)_f \mathbf{u}$, nell'equazione (5) determinando una nuova distribuzione di temperatura. La soluzione del problema è raggiunta attraverso un procedimento iterativo basato sull'analisi di convergenza.

La modellistica numerica associa alla comprensione dei processi naturali la capacità di fornire una rappresentazione quantitativa del fenomeno. La simulazione prevede varie fasi di lavoro, la prima delle quali consiste nella raccolta dei dati utili alla descrizione del sistema geotermico. Lo sviluppo del modello concettuale prevede una schematizzazione del caso naturale ed una sua descrizione rigorosa dal punto di vista fisico-matematico. La soluzione del sistema di equazioni differenziali richiede la definizione delle condizioni al contorno e delle condizioni iniziali. Le condizioni al contorno sono il valore della soluzione delle equazioni ai margini del dominio. Nei problemi di *thermo-fluidodinamica* le condizioni al contorno riguardano l'assegnazione dei valori di temperatura, pressione e velocità ai bordi del modello (*condizione al contorno di Dirichlet*), e l'assegnazione dei flussi di calore e di massa attraverso le superfici esterne del dominio (*condizioni al contorno di Neumann*). Le condizioni iniziali descrivono lo stato iniziale in cui si trova il sistema in termini di temperatura, pressione e velocità. Se le condizioni iniziali del modello (definite *a priori*) risultano vicine alla soluzione, saranno necessarie meno iterazioni per raggiungere la soluzione finale. Poiché quest'ultima non è nota, come condizioni al contorno sono spesso attribuite un campo di temperatura in regime conduttivo, di pressione idrostatica e di velocità nullo. La validazione del modello è

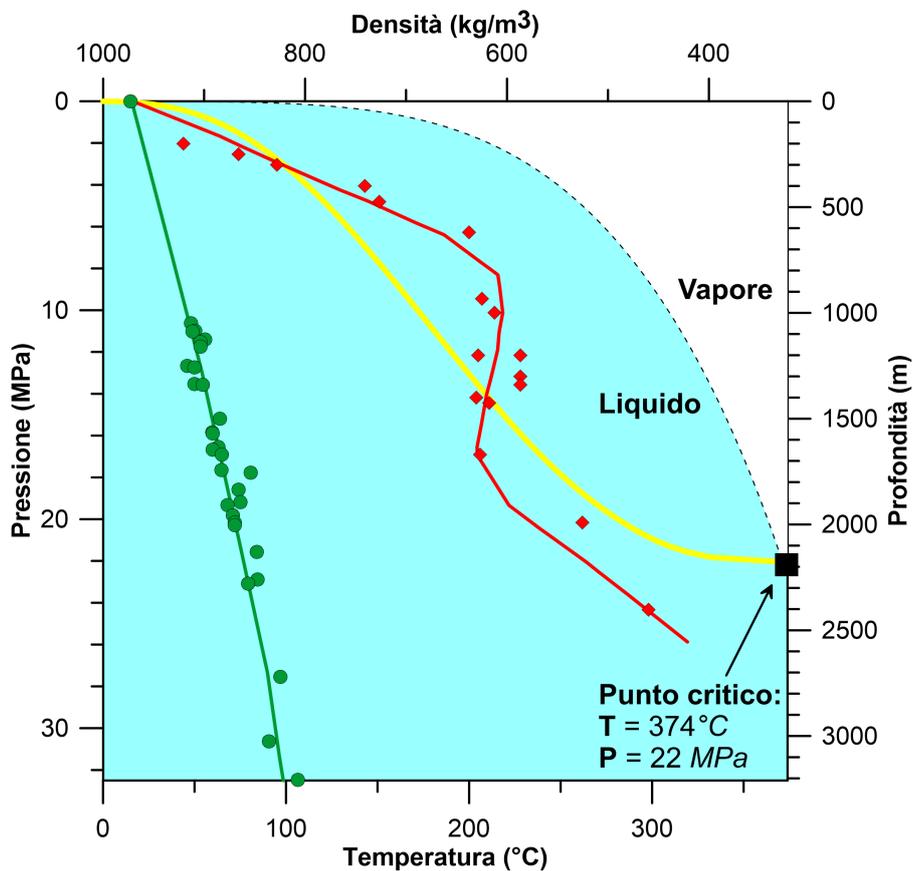


Figura 4: Diagramma pressione-temperatura di evaporazione dell'acqua. La curva di saturazione liquido-vapore (linea tratteggiata) separa i due campi in cui sono stabili, rispettivamente, la fase liquida e la fase vapore; sono riportati inoltre la densità (linea gialla) lungo la curva di saturazione ed il punto critico dell'acqua. Le profondità sono ottenute assumendo un gradiente di pressione idrostatico. Le temperature misurate in due pozzi profondi (cerchi verdi e rombi rossi) sono graficate insieme alla relativa geoterma calcolata dal modello numerico.

l'ultima fase del lavoro e consiste nel confronto tra i dati sperimentali, nel nostro caso le misure di temperatura in pozzo, ed i risultati della simulazione. Si parla anche di *calibrazione parametrica del modello* che consiste nel determinare i valori numerici di alcuni parametri in modo da minimizzare la differenza fra la sua risposta ed i dati sperimentali. Il numero di variabili in gioco nei modelli termo-fluidodinamici è elevato, pertanto la scelta dei parametri da ottimizzare deve ricadere su quelli più sensibili. Nelle simulazioni di sistemi geotermici convettivi intrusivi, l'ottimizzazione si rivolge ai parametri *permeabilità delle rocce serbatoio* e *temperatura della sorgente di calore* in quanto rappresentano le variabili che maggiormente controllano la distribuzione di temperatura osservata. In Figura 4 sono riportati a titolo d'esempio le temperature misurate in due pozzi profondi e la distribuzione di temperatura ottenuta dalla simulazione numerica.

Conclusioni

La Geotermia, nell'accezione di valutazione ed utilizzazione del calore interno della Terra, è un

campo di ricerca multidisciplinare che comporta l'interazione di conoscenze geologiche, geofisiche, ingegneristiche ed economiche. Le risorse geotermiche sono perlopiù concentrate in settori particolari della crosta terrestre (*margini di placca*) perciò lo studio scientifico e indipendente dei fenomeni geotermici e geodinamici hanno una ricaduta ed applicazione nella ricerca dell'energia geotermica a scopo industriale. L'interesse per le fonti energetiche rinnovabili, tra cui la Geotermia, è cresciuto in quest'ultimo decennio guidato dal rispetto del Protocollo di Kyoto e gli obiettivi dello *European Strategic Energy Technology Plan* entro il 2020. A livello internazionale, sono in corso progetti scientifici europei con l'obiettivo di migliorare e sviluppare tecniche di esplorazione geotermica integrata (IMAGE Project) e dimostrare la possibilità di eseguire pozzi geotermici profondi alla ricerca di fluidi in condizioni supercritiche (DESCRAMBLE Project). In ambito nazionale si sono conclusi due importanti progetti, VIGOR e ATLANTE, per avviare e promuovere l'utilizzo dell'energia geotermica e caratterizzare, classificare e mappare le risorse geotermiche convenzionali e non convenzionali per la produzione di energia elettrica.



- [1] A. SANTILANO, A. MANZELLA, G. GIANELLI, A. DONATO, G. GOLA, I. NARDINI, E. TRUMPY, S. BOTTEGHI: "Convective, intrusive geothermal plays: what about tectonics?", *Geoth. Energ. Sci.* **3** (2015) 51-59.
- [2] E. C. BULLARD: "The time taken for a borehole to attain temperature equilibrium", *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **5** (1947) 127-130.
- [3] A. MANZELLA, C. UNGARELLI: *La geotermia - L'energia sotto i nostri piedi*. Il Mulino, Bologna (2011, p. 127).
- [4] J. BUNDSCHUH, M. C. SUÁREZ ARRIAGA: *Introduction to the numerical modeling of groundwater and geothermal Systems - Fundamentals of mass, energy and solute transport in poroelastic rocks*. CRC Press, Leiden, The Netherlands (2010, p. 479).
- [5] E. BARBIER, G. SANTOPRETE: *L'energia geotermica - Una fonte di energia dall'interno della Terra*. G. Giappichelli Editore, Torino (1993, p. 171).



Gianluca Gola: Gianluca Gola ha studiato geologia presso l'Università di Genova ed ha conseguito il Dottorato di Ricerca nel 2009 in Geofisica. Attualmente è ricercatore presso l'Istituto di Geoscienze e Georisorse (IGG) del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR). L'area di ricerca comprende studi sugli aspetti termici e reologici del Mantello litosferico e della Crosta terrestre nonché sulle proprietà di trasporto delle rocce. Ha partecipato a diversi Progetti di Ricerca nazionali e internazionali in Geotermia applicando tecniche analitiche e numeriche per lo studio e la caratterizzazione delle risorse geotermiche nel sottosuolo in contesti geodinamici differenti.

Convezione atmosferica

Silvana Di Sabatino

Dipartimento di Fisica & Astronomia - Università di Bologna

Francesco Barbano

Dipartimento di Fisica & Astronomia - Università di Bologna

La convezione è una forma di trasporto di energia e materia caratteristica dei fluidi, attribuita all'azione del campo gravitazionale terrestre in risposta ad una variazione di densità del fluido. In atmosfera la convezione è sinonimo di moti verticali d'aria, sotto opportune condizioni di riscaldamento del suolo e stratificazione termica (stabilità) dell'atmosfera. I moti convettivi comportano spostamenti verticali delle masse d'aria, con la possibilità di formare nubi di carattere cumuliforme sia di natura precipitativa che non. In questo articolo entreremo nell'ambito della convezione atmosferica spiegandone la fisica e la dinamica, descrivendo in particolare le condizioni in cui i moti convettivi possono svilupparsi. Successivamente ci dedicheremo alla trattazioni delle nubi che si possono originare in seguito alla convezione, partendo dai cumuli di bel tempo fino ad arrivare ai cumulonembi temporaleschi.

Introduzione

Tutti i moti che possono essere attribuiti all'azione di un campo gravitazionale stazionario in risposta ad una variazione della distribuzione di densità in un fluido possono essere definiti convettivi. Si tratta quindi di moti relativi di alcune particelle di fluido all'interno del fluido stesso. Lo scompenso di densità può avere origine diversa, generalmente termica o dinamica. Il moto

convettivo è quindi una tipologia di trasporto, sia di materia che di energia, presente solamente nei fluidi (liquido o gassoso). La convezione è maggiormente efficace in quei fluidi la cui viscosità, ovvero la resistenza allo scorrimento delle particelle che compongono il fluido, è piccola (acqua o aria), mentre è pressoché assente, ma non trascurabile, ad alte viscosità (moti convettivi all'interno del mantello terrestre).

I moti convettivi generano un mescolamento ed un omogenizzazione del fluido che può variare a seconda del regime dinamico in cui il fluido si trova durante il processo di convezione. *Regime*



Figura 1: Tipico esempio di nubi generate da moti convettivi poco intensi.

laminare: la convezione è debole e le particelle di fluido si spostano a velocità piccole; il numero di Reynolds, che esprime il rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosive, è anch'esso piccolo; gli urti tra le particelle sono scarsi ed avvengono ad energie cinetiche basse, di conseguenza gli

scambi di energia e quantità di moto sono poco efficaci; il fluido risulta quindi poco mescolato. *Regime turbolento*: la convezione è intensa e le particelle di fluido si spostano a velocità elevate; il numero di Reynolds è grande; gli urti tra le particelle sono abbondanti ed avvengono ad energie cinetiche elevate, di conseguenza gli scambi di energia e quantità di moto sono molto efficaci; il fluido risulta quindi mescolato ed omogeneo. Per quanto concerne le scienze atmosferiche, tuttavia, si tende a considerare come convettivi soltanto quei moti a limitata estensione orizzontale ($\sim 1 \text{ km}^2$) e pronunciato sviluppo verticale (fino ad interessare tutta la troposfera¹), come conseguenza di una distribuzione instabile di densità lungo la colonna di fluido. Nella maggior parte dei casi a rendere instabile la distribuzione verticale di densità è una variazione locale del profilo verticale di temperatura del fluido. Infatti il forte riscaldamento della superficie o il raffreddamento di una porzione di fluido ad una certa quota sono i fattori che maggiormente generano variazioni locali della densità e di conseguenza le condizioni ideali per l'instaurarsi di un regime convettivo.

Anche nella sua forma ristretta, la definizione di convezione applicata all'atmosfera identifica un ampio ventaglio di fenomeni che si sviluppano su differenti scale, specialmente energetiche; si passa infatti dalle strutture convettive all'interno dello strato limite atmosferico (entro cioè i primi 1 – 3 km di atmosfera) fino ad arrivare alle strutture che contribuiscono alla formazione degli uragani (che invece interessano tutta la troposfera).

La descrizione fisico-dinamica della convezione è semplice soltanto in casi fortemente approssimati. La fonte di maggior complicazione risiede nella facilità con cui il vapor acqueo contenuto nell'atmosfera cambia di fase; questo fenomeno infatti porta alla variazione del bilancio tra quantità di nubi e precipitazioni. Pertanto è opportuno fare una distinzione tra moti convettivi in presenza o assenza di vapor acqueo in atmosfera: si parla di *dry convection* quando l'ammontare di vapor acqueo in atmosfera è del tutto trascurabile (atmosfera secca) o, in prima approssimazione, quando è lontano dalla condizione di saturazione (atmosfera umida); si parla invece di *moist*

¹Primo strato di atmosfera di circa 10 km.

Fluido come continuo

In fisica i fluidi sono descritti come un mezzo *continuo*, ovvero si supporrà che ogni porzione di fluido sia infinitamente suddivisibile in porzioni sempre più piccole, e che procedendo in questa suddivisione le grandezze in gioco tendano a diventare costanti su tutta la porzione di fluido considerata. Allora si possono descrivere le grandezze che caratterizzano i fluidi geofisici attraverso i *campi* di queste quantità. Tali campi possono essere *scalari*, ovvero descritti in ogni punto da un'unica grandezza, o *vettoriali*, quando in ogni punto la grandezza è caratterizzata da modulo, direzione e verso. Assunta l'ipotesi del continuo, una *particella* rappresenta un volume regolare di fluido contenente un certo numero di molecole che può variare a seconda della densità del fluido stesso. Generalmente una buona approssimazione di particella d'aria è un cubo con spigolo di pochi μm , cioè contenente un numero di molecole dell'ordine dei cento milioni.

convection quando la convezione avviene in presenza di vapor acqueo vicino alla saturazione (atmosfera satura) che, per effetto delle variazioni di pressione e temperatura cui è sottoposto durante la sua ascesa in quota, può facilmente cambiare di fase, dando luogo a variazioni nella dinamica convettiva. Per semplicità di notazione useremo i termini *particella satura*, per indicare contenuti di vapor acqueo a saturazione, e *particella secca*, per indicare contenuti di vapor acqueo trascurabili o ininfluenti.

Teoria elementare della particella

Prima di addentrarsi nella descrizione delle due forme di convezione è bene soffermarsi su quelle che sono le forze generatrici dei moti convettivi. Abbiamo detto che convezione è sinonimo di movimenti verticali d'aria. In atmosfera la forma di convezione maggiormente efficiente è originata dalla forza di galleggiamento, la quale comporta un trasporto verticale di massa, calore e momento. All'atto pratico essa agisce come una spinta

che la particella d'aria riceve e che la sposta verticalmente rispetto al resto del fluido. La forza di galleggiamento si origina qualora ci siano delle variazioni locali di densità atmosferica tra le particelle di riferimento e l'ambiente circostante. Considerando una particella di aria secca di volume V , temperatura T e densità ρ durante il suo moto convettivo, essa sposta un uguale volume di aria dell'ambiente circostante la cui temperatura e densità sono rispettivamente T' e ρ' . La forza peso in unità di volume che agisce sulla particella è uguale a ρgV , dove $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità, mentre quella agente sull'aria spostata è $\rho'gV$. Per il principio di Archimede, l'intensità della forza in unità di massa necessaria a spostare verticalmente una particella di fluido è data dalla differenza tra i pesi della particella e del fluido spostato. Questa forza in unità di volume, chiamata appunto forza di galleggiamento, individua l'accelerazione con la quale la particella si sposta verticalmente all'interno del fluido:

$$F_B = \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{\rho' - \rho}{\rho}\right)g,$$

dove z rappresenta la quota e t il tempo. In atmosfera non è semplice fare misurazioni di densità dell'aria; tuttavia considerando la particella in esame e l'ambiente esterno alla stessa pressione, la densità diventa funzione della sola temperatura, quantità molto più facilmente misurabile. Pertanto l'equazione per la forza di galleggiamento può essere riscritta in termini di differenze di temperatura:

$$F_B = \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{T - T'}{T'}\right)g = Bg, \quad (1)$$

dove B è chiamato termine di galleggiamento. La forza risulta quindi essere positiva quando la particella è più calda dell'aria ambiente e negativa quando la particella è più fredda dell'ambiente. Quest'equazione, valevole strettamente per un'atmosfera secca, si può generalizzare al caso di atmosfera umida semplicemente sostituendo la temperatura con la temperatura virtuale. D'ora innanzi pertanto si userà il termine temperatura riferendosi tuttavia alla temperatura virtuale, anche nel caso di temperatura potenziale.

Sostituendo la velocità verticale $w = dz/dt$ della particella nell'equazione (1) ed integrando il

Temperatura virtuale

L'aria umida ha un peso molecolare inferiore a quello dell'aria secca ($M_v < M_d$), e di conseguenza ha una costante dei gas R maggiore ($R_v > R_d$). I pedici v e d indicano rispettivamente il vapor acqueo (*vapour*) e l'aria secca (*dry*). Anziché avere due costanti diverse per aria secca e umida, e di conseguenza due diverse equazioni per i gas perfetti, è più comodo scrivere tutto in funzione della sola R_d ed inglobare la presenza del vapore in una temperatura fittizia chiamata appunto temperatura virtuale. La temperatura virtuale di una particella di aria umida viene pertanto definita come la temperatura che una teorica particella di aria secca avrebbe se posta alla stessa densità e pressione della particella di aria umida:

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{e}{p}(1 - \epsilon)}$$

dove e rappresenta la pressione di vapore, p la pressione totale della particella ed $\epsilon = \frac{R_d}{R_v}$. Quando la particella non contiene vapor acqueo $T = T_v$.

risultato rispetto a due altezze z_0 e z , si ottiene un'equazione per la velocità delle particelle in un moto convettivo:

$$w^2 = w_0^2 + 2g \int_{z_0}^z B(z)dz,$$

dove w_0 è la velocità verticale all'altezza z_0 . Questo è il modello più semplice possibile per lo studio della convezione di una particella di aria secca o umida in atmosfera. Tuttavia esso è anche fortemente approssimato, soprattutto per quanto riguarda la velocità della convezione che risulta generalmente maggiore di quanto non sia realmente. Infatti per rendere semplici le equazioni, si sono trascurati tutta una serie di fattori che possono influire sull'effettiva velocità di spostamento della particella, quali il trascinamento aerodinamico, il mescolamento con l'aria circostante, i moti di compensazione verso il basso e il peso dell'acqua condensata all'interno della particella.

Temperatura potenziale

La *temperatura potenziale* è una grandezza fondamentale nella trattazione dei fenomeni atmosferici. Essa esprime la temperatura θ che la particella di fluido avrebbe se fosse spostata adiabaticamente (senza scambi di calore con l'ambiente esterno) ad una quota di riferimento con pressione p_0 , tipicamente assunta pari a 1000 hPa:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p},$$

dove T è la temperatura assoluta della particella, R è la costante dei gas e c_p è il calore specifico a pressione costante. La temperatura potenziale si misura in Kelvin.

L'importanza della temperatura potenziale risiede nel suo legame con l'entropia specifica; quest'ultima infatti è funzione della sola temperatura potenziale, pertanto una superficie adiabatica è sia una superficie a temperatura potenziale costante che isoentropica. Per questo motivo, il significato della temperatura potenziale è quello di fornire informazioni circa il calore assorbito da uno strato d'aria rispetto ad un altro. Quando le differenze di temperatura dipendono dalla quota in maniera adiabatica, la quantità di calore globalmente scambiata è la stessa per tutte le particelle.

Dry convection

Si può affermare che lo studio della convezione nasca con la scoperta da parte di Archimede del galleggiamento. Verso la fine del XIX e l'inizio del XX secolo sono stati compiuti numerosi passi avanti riguardo la comprensione fisica di questo fenomeno, grazie agli esperimenti in laboratorio di Benard e alle analisi teoriche di Lord Rayleigh. Gli esperimenti prevedevano lo studio della convezione, e delle sue proprietà, originatasi in una regione di fluido compresa tra due lastre orizzontali parallele a diversa temperatura (nello specifico la lastra inferiore fu posta a temperatura maggiore rispetto a quella superiore). Fintanto che la differenza di temperatura risultava piccola, non si generava nessuna forma di convezione e il calore veniva condotto dalla lastra più in basso a quella più in alto per mezzo della diffusione molecolare. Da una certa differenza di temperatura in poi si instaurano dei moti convettivi che prendono la forma di vortici regolari e stazionari, le cui dimensioni orizzontali dipendono dall'estensione delle lastre riscaldate, come mostrato in figura 2. Per quantificare l'instaurarsi della convezione, si ricorre all'uso di un numero adimensionale noto come *numero di Rayleigh*, il quale rappresenta il rapporto tra l'effetto destabilizzante delle forze di galleggiamento rispetto a quello

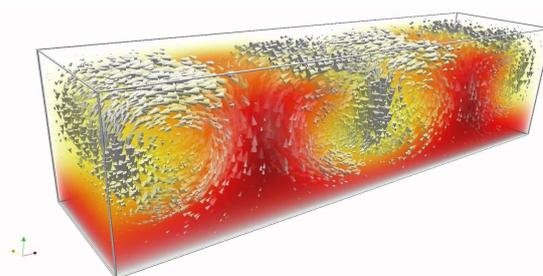


Figura 2: Convezione di Rayleigh-Benard tra due lastre orizzontali parallele delle quali quella inferiore ha temperatura maggiore rispetto a quella superiore (lastre non visibili nell'immagine). Il fluido segue un moto rotatorio variando la sua temperatura man mano che si avvicina alle lastre.

stabilizzante delle forze viscosive. Al superamento del valore critico del numero di Rayleigh si innescano i moti convettivi. Tale valore cambia in base alle proprietà delle lastre (estensione e temperatura), della distanza tra esse e del fluido tra loro compreso. Dalla figura 2 emerge chiara la dinamica del moto convettivo; la piastra inferiore trasferisce calore al fluido che riscaldato sale in quota avvicinandosi alla lastra superiore, cedendo via via calore al fluido circostante. Una volta raggiunta la lastra superiore la sua temperatura sarà inferiore rispetto a quella del fluido a quote inferiori. Pertanto si formeranno due rami come motori del vortice convettivo: uno ascen-

dente con fluido caldo e uno discendente con fluido freddo, come rappresentato dalle frecce rispettivamente rosse e blu in figura 2.

Un altro importante risultato dell'esperimento di Benard è l'organizzazione del fluido alla superficie superiore del fluido stesso. Infatti, rimuovendo la lastra superiore e guardando dall'alto verso il basso il fluido all'interno del quale si stanno svolgendo i moti convettivi precedentemente descritti, noteremmo una struttura a celle regolari che si distribuiscono su tutta la superficie. Tali celle, chiamate *celle di Benard*, sono il risultato stazionario della convezione di un fluido riscaldato dal basso. In figura 3 si può osservare un esempio di questa distribuzione a celle. La strut-

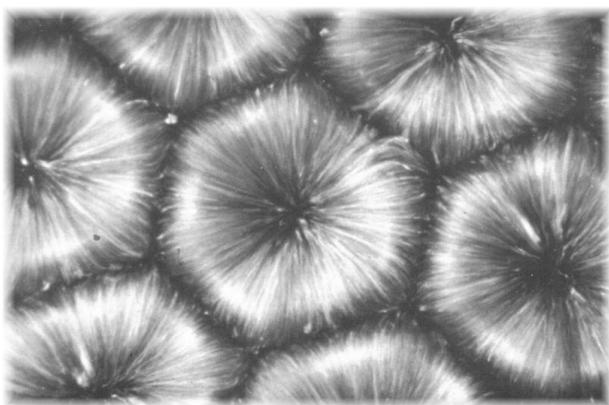


Figura 3: Celle di Benard regolari ottenute in un gas in condizioni convettive stazionarie.

tura a celle è dovuta al trasporto di calore per mezzo della convezione dal fondo alla superficie del fluido, e alla conseguente alterazione della sua tensione superficiale; quest'ultima infatti tende a diminuire all'aumentare della temperatura, giustificando così la formazione delle celle caratteristiche. Il moto all'interno delle celle è differente a seconda del fluido che stiamo considerando: infatti nei gas il moto delle particelle è discendente nel centro della cella, mentre nei liquidi tale moto è ascendente. Questa differenza è dovuta al fatto che mentre nei gas all'aumentare della temperatura aumenta anche la viscosità, nei liquidi avviene l'opposto. In entrambi i casi il numero e l'estensione delle celle variano all'aumentare del gradiente verticale di temperatura e il loro andamento è necessariamente l'uno l'opposto dell'altro.

Le strutture convettive precedentemente descritte rimangono facilmente riconoscibili anche al-

l'aumentare del gradiente verticale di temperatura nel fluido, almeno fino al raggiungimento di una seconda soglia critica. Oltre tale soglia, molto variabile da fluido a fluido, la struttura della convezione cambia; essa diventa sempre più complessa e non stazionaria fino a quando il fluido assume un comportamento del tutto caotico. Non è un caso quindi che la teoria del caos di Lorenz sia nata partendo da considerazioni riguardanti la convezione nei fluidi geofisici.

Le prime forme di convezione studiate al di fuori del laboratorio furono quelle originatesi da sorgenti localizzate, come ad esempio gli incendi. In questi casi tuttavia la dinamica convettiva è fortemente influenzata dalla turbolenza che si genera all'interno del fluido, la quale fa sì che il moto ascendente risulti molto caotico e non si riesca a distinguere una struttura netta come nel caso degli esperimenti in laboratorio. Guardiamo ora

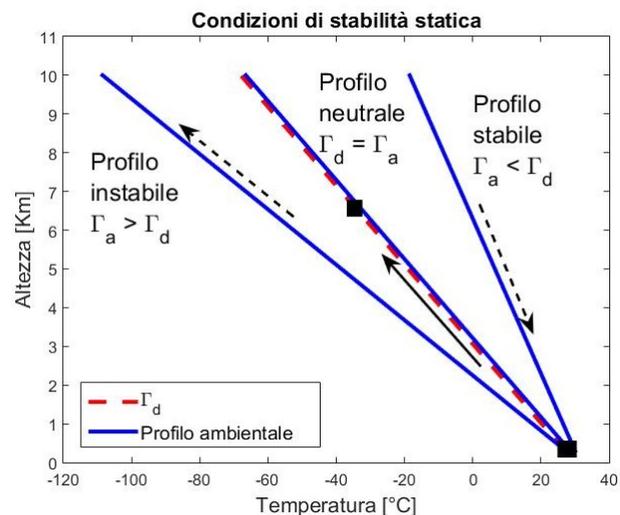


Figura 4: Tre condizioni di stabilità in atmosfera in termini di temperatura virtuale. Il moto della particella ideale (quadrato nero) segue l'adiabatica secca (tratteggio rosso). In base alla pendenza del profilo ambientale, Γ_a , otterremo le diverse condizioni di stabilità.

più nello specifico quello che è il comportamento dei moti convettivi in atmosfera. La convezione secca è un processo molto importante e frequente sia sopra le terre emerse, prevalentemente durante l'estate, che sopra gli oceani, soprattutto durante l'inverno. Essa si presenta come nell'esperimento di Benard, quindi come moto verticale di particelle in seguito al riscaldamento differenziato del suolo rispetto all'atmosfera o al raffreddamento ad una certa quota di quest'ul-

tima rispetto al suolo. Come già discusso nel paragrafo precedente, la forza responsabile dei moti convettivi è una forza di galleggiamento stabilmente positiva. Occorrono pertanto le giuste condizioni di instabilità statica affinché ciò si verifichi. Abbiamo visto come la forza di galleggiamento dipenda soltanto dalla differenza tra densità o temperatura della particella in esame e quella dell'ambiente esterno. Ipotizziamo ora di spostare una particella di fluido con una certa densità e temperatura verso l'alto, senza variarne le sue caratteristiche termodinamiche. La particella raggiunta una nuova quota si troverà ad avere una densità e una temperatura che possono essere maggiori, minori o uguali a quelle dell'ambiente circostante. Se la particella in esame ha temperatura minore rispetto all'ambiente essa tende a tornare alla posizione di partenza, se è maggiore dell'ambiente essa prosegue salendo in quota, mentre se è uguale rimane al livello raggiunto. Questo comportamento della particella può essere rappresentato attraverso un moto armonico prodotto dalla forza di galleggiamento. L'equazione (1) può pertanto essere riscritta come segue:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0, \quad (2)$$

dove N^2 rappresenta la frequenza di galleggiamento, anche nota come frequenza di Brunt-Väisälä. L'equazione (2) ha come soluzione un oscillatore armonico solo nel caso in cui N^2 è positivo. In questo frangente il moto risulta periodico e si dice che il fluido possiede una stabilità statica positiva, o che è staticamente stabile. Quando N^2 è nullo, l'equazione (2) ha come soluzione una funzione lineare nel tempo a coefficienti arbitrari, rappresentativa dello stato di quiete o moto rettilineo uniforme della particella, conformemente al primo principio della dinamica. In questo caso il fluido è in equilibrio neutrale. Infine quando N^2 è negativo, la soluzione dell'equazione (2) è una funzione esponenziale, rappresentativa di un progressivo allontanamento della particella dalla sua posizione di equilibrio. In questo caso il fluido è staticamente instabile. Si può anche parlare rispettivamente di stratificazione stabile, neutrale o instabile.

Da un punto di vista pratico, stabilire la stabilità statica in atmosfera non prevede la risoluzione

dell'equazione (2). Infatti basta conoscere il profilo verticale di temperatura o, meglio ancora, di temperatura potenziale dell'atmosfera, in quanto la frequenza di galleggiamento può essere indifferentemente legata ad entrambe le due quantità. In atmosfera si predilige l'uso della temperatura

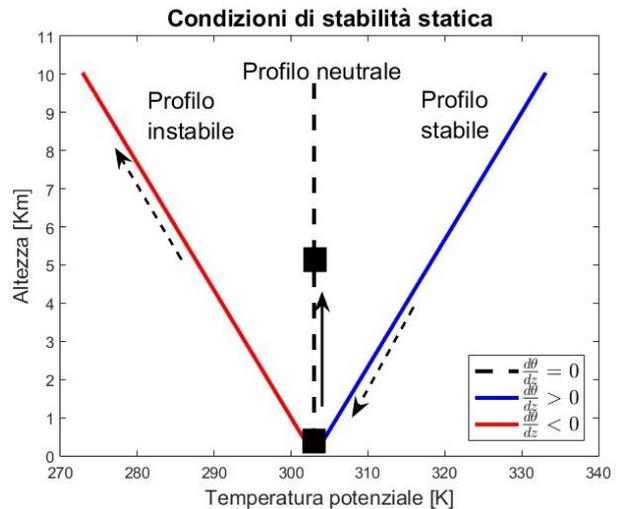


Figura 5: Tre condizioni di stabilità in atmosfera in termini di temperatura potenziale virtuale. Il moto della particella ideale (quadrato nero) segue l'adiabatica secca, ovvero il profilo neutrale. L'atmosfera risulta stabile se la sua temperatura potenziale cresce con la quota, instabile se decresce.

potenziale come indicatore di stabilità, in quanto il profilo in equilibrio neutrale è costante; uno spostamento verticale adiabatico infatti non prevede una variazione di temperatura potenziale. La temperatura di una particella in ascesa adiabatica, invece, decresce linearmente con la quota, di un fattore $\Gamma_d = 9.8 \text{ K/km}$ noto come *gradiente adiabatico secco* (tale gradiente indica che la temperatura decresce di un fattore costante ogni volta che c'è uno spostamento adiabatico verticale di un chilometro). Inoltre anche la forma della frequenza di galleggiamento risulta più semplice se espressa in termini di temperatura potenziale:

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta'_v}{dz}, \quad (3)$$

dove θ_0 è la temperatura potenziale di riferimento. Possiamo pertanto trasferire le condizioni viste per N^2 sull'unico termine variabile a destra dell'uguale, ovvero il gradiente verticale di temperatura potenziale $d\theta'_v/dz$. Si avrà dunque

che

$$\frac{d\theta'_v}{dz} > 0 \text{ stratificazione stabile}$$

$$\frac{d\theta'_v}{dz} = 0 \text{ stratificazione neutrale}$$

$$\frac{d\theta'_v}{dz} < 0 \text{ stratificazione instabile}$$

Tali condizioni sono riportate graficamente in figura 5. Dal momento che la maggior parte delle carte di stabilità sono ancora in termini di temperatura è opportuno indicare le condizioni di stabilità anche in termini di temperatura. Pertanto, considerando il gradiente ambientale $\Gamma_a = -dT'_v/dz$, si ha che:

$$\Gamma_a < \Gamma_d \text{ stratificazione stabile}$$

$$\Gamma_a = \Gamma_d \text{ stratificazione neutrale}$$

$$\Gamma_a > \Gamma_d \text{ stratificazione instabile}$$

Queste ultime condizioni di stabilità seguono il seguente ragionamento: data un'ipotetica particella in ascesa adiabatica, seguendo pertanto il gradiente adiabatico secco, l'atmosfera risulta rispettivamente stabile, neutrale od instabile se il suo gradiente di temperatura rispetto alla quota è minore, uguale o maggiore del gradiente adiabatico secco. Le due condizioni di stabilità ed instabilità rispetto a quella neutrale sono rappresentate graficamente in figura 4.

L'importanza dell'analisi di stabilità risiede nel fatto che la condizione necessaria affinché si sviluppi la convezione per galleggiamento è portata dall'instabilità statica. Pertanto la convezione sostenuta si sviluppa se l'atmosfera è staticamente instabile.

Moist convection

Abbiamo finora visto come una particella d'aria secca che sale in atmosfera si raffredda di 9.8 K/km , ovvero segue il gradiente adiabatico secco conseguentemente alla prima legge della termodinamica. Abbiamo anche detto che la stessa dinamica si ottiene anche nel caso di particella umida, in cui è presente vapor acqueo non saturo, perché la presenza delle molecole di vapore modifica di poco le proprietà termiche della particella. Quando invece il vapor acqueo presente nella particella raggiunge la saturazione, esso

Rapporto di mescolamento

Il rapporto di mescolamento fornisce una stima della quantità di vapor acqueo all'interno della particella sotto forma di rapporto tra masse, o numeri di molecole, tra vapore, m_v e aria secca, m_d .

$$w = \frac{m_v}{m_d} [\text{g/kg}].$$

Più in generale il rapporto di mescolamento si usa per stimare il quantitativo di un certo gas all'interno del volume d'aria campione. Nel caso specifico del vapor acqueo, assume particolare utilità il rapporto di mescolamento a saturazione rispetto al vapor acqueo, il quale permette di stimare quanto vapor saturo è presente nel volume d'aria campione. Generalmente questo rapporto viene espresso in termini di pressioni parziali del vapor saturo e_s e dell'aria secca o non satura $p - e_s$:

$$w_s = \frac{e_s}{p - e_s} \epsilon.$$

inizia a condensare in acqua liquida o ghiaccio. La quota alla quale ha inizio la condensazione è chiamato *lifted condensation level* (LCL). In natura il vapor acqueo condensa in acqua o ghiaccio su piccole particelle solide presenti in atmosfera (*aerosol*), note rispettivamente come *nuclei di condensazione* e *nuclei di ghiacciamento*. Generalmente si tratta di particelle di sabbia, fumo, fuliggine e sale marino, e, almeno inizialmente, la loro forma e dimensione è responsabile della distribuzione dimensionale delle gocce d'acqua. Pertanto i nuclei di condensazione e ghiacciamento agevolano le transizioni di fase del vapor acqueo. La miriade di goccioline che si formano in questo modo vanno a formare le nubi, la cui base identifica il livello LCL. Le goccioline formate per condensazione rimangono in sospensione in quanto la forza peso della parte condensata è ancora insufficiente a vincere la forza di galleggiamento che le spinge verso l'alto. Questa è la fase di formazione delle nubi convettive (argomento che riprenderemo più avanti), e le goccioline di cui sono costituite prendono il nome di *gocce di nu-*

be, per differenziarle dalle gocce di dimensione sufficiente alla precipitazione, chiamate *gocce di pioggia*.

Torniamo però al vapor acqueo. Quando condensa, rilascia nell'aria una quantità di calore in conseguenza al cambiamento di fase. Infatti la condensazione è un processo esotermico, ovvero avviene rilasciando nell'ambiente una certa quantità di calore come conseguenza del più elevato stato energetico del vapore rispetto al liquido. Il calore rilasciato si può quantificare, per ogni incremento del rapporto di mescolamento a saturazione rispetto al vapor acqueo w_s , in

$$\delta Q = -L_v dw_s,$$

dove L_v è il calore latente di vaporizzazione dell'acqua. Il calore rilasciato nel passaggio di fase riduce la velocità con cui la temperatura decresce con la quota rispetto alla decrescita adiabatica tipica di una particella secca. Il nuovo tasso di decrescita della temperatura con la quota per particelle sature segue un altro gradiente, noto come *gradiente adiabatico saturo*, Γ_s . Il valore di Γ_s è mol-

diventano virtualmente indistinguibili.

Abbiamo visto come una particella secca che si muove di moto convettivo in atmosfera segua processi adiabatici: non ha scambi di calore con l'ambiente circostante in nessuna fase del moto. Stesso discorso si applica anche alle particelle umide in quanto la presenza delle molecole d'acqua varia in maniera trascurabile le proprietà termiche della particella. Nel caso di particelle sature, invece, i processi di condensazione del vapor acqueo al loro interno sono diabatici, in quanto il passaggio di fase comporta sempre un assorbimento o un rilascio di calore. Si può parlare tuttavia di comportamento pseudo-adiabatico della particella satura in quanto i processi diabatici di condensazione avvengono all'interno della particella senza scambi di energia con l'ambiente esterno (eccezion fatta per l'acqua condensata che può esser rimossa dalla particella, portando con se una piccola quantità di energia che viene quindi ceduta all'ambiente esterno). Per questa ragione si usa spesso riferirsi al gradiente adiabatico saturo col termine di *pseudo-adiabatica* o *adiabatica satura* (in analogia col gradiente adiabatico secco solitamente chiamato *adiabatica secca*). Questa nomenclatura risulta di più semplice utilizzo, e viene comunemente usata nei radiosondaggi atmosferici (misure di grandezze fisiche con la quota) per riferirsi a condizioni convettive secche o sature.

Introdotta anche la convezione satura, si può notare come le particelle atmosferiche in moto convettivo possano seguire due traiettorie lungo il loro moto: un'adiabatica secca o una pseudo-adiabatica. Pertanto avremo bisogno di introdurre un ulteriore criterio di stabilità per contemplare entrambi i casi di particelle secche e sature. Riprendiamo pertanto il modellino di particella semplice già introdotto nel caso di convezione secca e lo applichiamo al caso saturo. La frequenza di galleggiamento può in questo caso essere scritta come segue:

$$N^2 = \frac{g}{T_0} \left(\frac{dT_{vl}}{dz} + \Gamma_s \right),$$

dove T_{vl} è la temperatura virtuale dell'acqua liquida. Quest'ultima viene utilizzata al posto della temperatura virtuale per tener conto del peso dell'acqua condensata. Introducendo i processi di condensazione durante l'ascesa della particel-

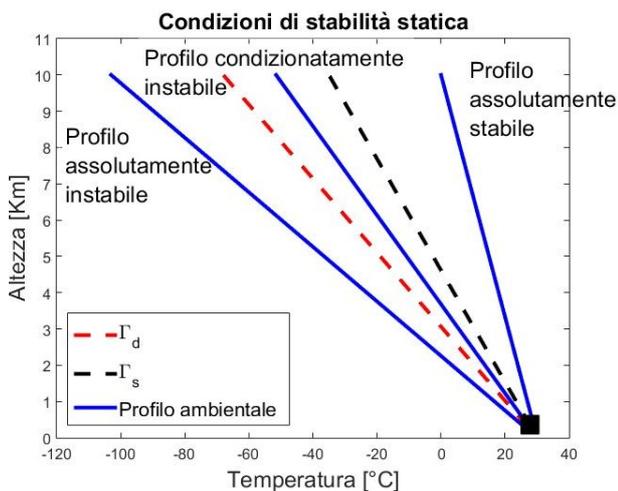


Figura 6: Condizioni di stabilità in atmosfera in termini di temperatura virtuale. Il moto della particella ideale (quadrato nero) può seguire l'adiabatica secca Γ_d o quella saturo Γ_s , a seconda del suo grado di saturazione. L'atmosfera risulta stabile se la sua temperatura potenziale cresce con la quota, instabile se decresce. In base alla pendenza del profilo ambientale otterremo le diverse condizioni di stabilità.

to variabile; durante giornate calde all'interno della bassa troposfera assume valori pari ad circa 1/3 del valore di Γ_d , mentre alle temperature molto basse dell'alta troposfera i due gradienti

la, si ottengono cinque possibili stati di stabilità per l'aria umida:

$\Gamma_a < \Gamma_s$	assolutamente stabile
$\Gamma_a = \Gamma_s$	neutro saturo
$\Gamma_s < \Gamma_a < \Gamma_d$	condizionatamente instabile
$\Gamma_a = \Gamma_d$	neutro secco
$\Gamma_a > \Gamma_d$	assolutamente instabile

La lettura di questi criteri, illustrati in figura 6, è del tutto analoga a quanto già visto in precedenza per il caso secco. Definiti tutti i possibili criteri di stabilità possiamo andare ad osservare un caso reale di particella la cui stabilità cambia con la quota, passando così da fasi stabili ad instabili e convettive. La figura 7 mostra un esempio di instabilità condizionale su un diagramma termodinamico. Una particella umida, ma non satura, che è forzata ad ascendere dal livello 1000 hPa è all'inizio più fredda dell'ambiente e soggetta ad una forza di galleggiamento verso il basso (di restauro delle condizioni iniziali). La particella è in condizione di stabilità statica. La particella raggiunge il suo livello LCL a 900 hPa e ascende lungo l'adiabatica satura da quel momento in poi. Se la particella è fatta salire sopra gli 810 hPa, diviene più calda dell'ambiente ed è soggetta a forza di galleggiamento verso l'alto. L'instabilità condizionale implica che c'è uno spostamento verticale critico per cui una particella può cambiare il suo carattere da stabile ad instabile (o viceversa). Il livello di questa perturbazione critica ($p = 820$ hPa in figura 7) è chiamato livello di convezione libera (*level of free convection*, LFC). La particella continuerà ad accelerare verso l'alto fino al livello di galleggiamento neutro (*level of neutral buoyancy*, LNB), che denota il livello sopra il quale la particella in ascesa adiabatica satura diventerebbe più fredda dell'ambiente ($p = 530$ hPa in figura 7). La quantità di energia disponibile per un'accelerazione verso l'alto di una particella è chiamata *convective available potential energy* (CAPE). Su un diagramma termodinamico, la cui area è proporzionale all'energia, la CAPE è proporzionale all'area racchiusa dalle due curve che indicano la temperatura della particella e dell'ambiente, come illustrato in figura 7. La quantità di CAPE di una particella sollevata

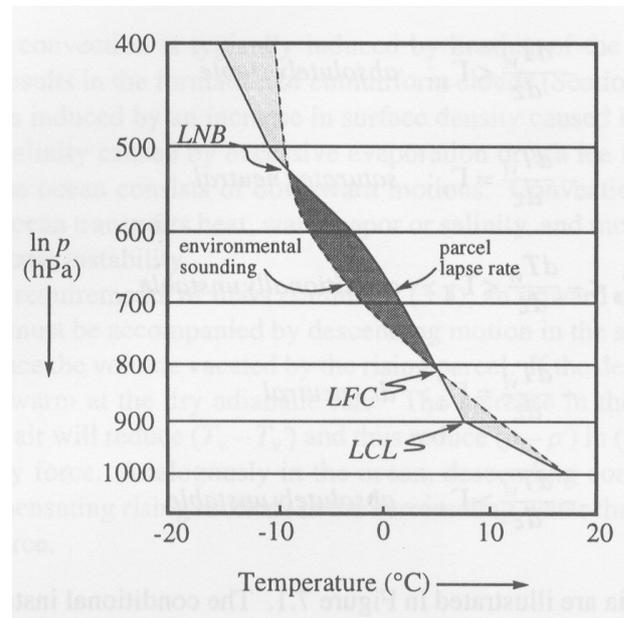


Figura 7: Illustrazione di instabilità convettiva su diagramma termodinamico. La linea tratteggiata rappresenta l'ambiente (T') e quella piena la particella (T). Sotto 810 hPa e sopra 530 hPa viene richiesta energia per sollevare la particella. Sopra 810 hPa e sotto 530 hPa la particella accelera liberamente (quindi ha un moto convettivo). L'area scura rappresenta la convective available potential energy (CAPE), mentre le due aree chiare rappresentano la convection inhibition energy (CINE).

da un'altezza z (all'altezza o sopra LFC) fino al LNB è data dall'integrale verticale della forza di galleggiamento tra i due livelli

$$CAPE(z) = \int_z^{LNB} g \frac{\rho' - \rho}{\rho} dz,$$

e si misura in J/kg . Questa quantità può essere riscritta in termini di temperature virtuali come

$$CAPE(p) = \int_{p(LNB)}^{p(z)} R'_d (T_v - T'_v) d \ln p.$$

Pertanto CAPE rappresenta l'energia potenziale totale a disposizione della convezione. Quando essa diviene energia cinetica si innescherà il moto convettivo. CAPE è definita soltanto per particelle che sono in galleggiamento positivo lungo il profilo verticale. Il termine *convection inhibition energy* (CINE) è analogo al CAPE, ma si riferisce ad un'area negativa sul diagramma termodinamico. Esso pertanto rappresenta l'energia con la quale la particella precedentemente spostata

verso l'alto torna alla sua quota originaria. Il diagramma termodinamico appena visto rappresenta un metodo classico di stima della convezione a partire dall'analisi di stabilità dell'atmosfera. Il tempo impiegato da un calcolatore per svolgere tale analisi è inferiore al secondo, rendendo pertanto molto efficiente l'utilizzo di questo metodo.

Nubi convettive non precipitative

Abbiamo precedentemente osservato come in seguito a convezione saturata si possano generare nubi di carattere convettivo, come conseguenza dei processi di condensazione del vapore acqueo contenuto nelle particelle in ascesa. In natura si possono formare varie tipologie di nubi convettive, che possiamo riassumere in due grandi categorie: nubi precipitative e non precipitative. Quando le nubi convettive sono spazialmente ridotte e/o hanno vita breve, i processi microfisici che combinano le gocce di nube per formare le gocce di pioggia sono del tutto inefficaci. In tal caso le precipitazioni sono quasi del tutto assenti. Questo avviene perché tutta l'acqua che



Figura 8: Un esempio di *cumulus humilis*.

condensa tende a rievaporare, dissipando così la nube precedentemente formata. Esempi di nubi convettive che soddisfano la dinamica appena illustrata sono le *cumulus humilis*, anche note come nubi di bel tempo, le *cumulus mediocris* e gli *stratocumuli*. Le *cumulus humilis* sono comunemente visibili durante calde giornate estive. Si tratta di nubi di piccole dimensioni, generalmente basse e senza una significativa estensione verticale. Tuttavia, sotto opportune condizioni

di stabilità e riscaldamento del suolo, è possibile trovare nubi di dimensioni maggiori o sistemi composti da più cumuli. La loro presenza in cielo è sinonimo di bel tempo che può perdurare per diverse ore. Generalmente si osservano nel pomeriggio di giornate a cielo sereno, per effetto del rilascio da parte del suolo del calore accumulato durante la mattinata, e tendono a dissiparsi in serata. Non è raro tuttavia che appaiano già in mattinata; in questo caso la loro presenza è sinonimo di forte instabilità atmosferica che può sfociare nella formazione di temporali pomeridiani o serali, anche piuttosto intensi. Pertanto, come nubi in se le *cumulus humilis* non sono precipitative, ma possono essere preludio di precipitazioni a carattere temporalesco.

Le *cumulus mediocris* presentano una genesi e struttura del tutto analoga a quella delle *humilis*. Si tratta tuttavia di cumuli di dimensione

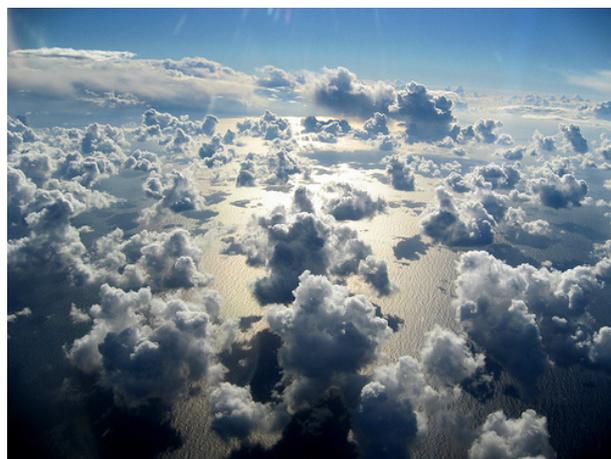


Figura 9: Un esempio di *cumulus mediocris*.

maggiore rispetto alle più piccole *humilis*, generate da moti convettivi che possono superare i 5 m/s . Sebbene siano tipiche nubi di bel tempo, se l'atmosfera è sufficientemente instabile possono evolvere in *cumulus congestus* o *cumulonimbus*, diventando così nubi precipitative. Se esiste uno strato stabile (inversione) al di sopra dello strato instabile, i moti convettivi vengono inibiti mentre le nubi cumuliformi si appiattiscono ed espandono orizzontalmente prendendo il nome di stratocumuli. Essi formano un vero e proprio strato di nubi, la cui estensione orizzontale diventa preponderante rispetto a quella verticale. Gli stratocumuli hanno un forte impatto sul sistema climatico in quanto riflettono buona parte della radiazione solare incidente e emettono una



Figura 10: Un esempio di stratocumuli.

quantità di radiazione infrarossa paragonabile a quella emessa dalla terra in condizioni di cielo sereno.

Di forte impatto climatico sono anche i cirri, nubi molto sottili interamente costituite da cristalli di ghiaccio puro che si formano nell'alta troposfera dove le temperature sono sufficientemente basse da provocare il ghiacciamento del vapor acqueo senza bisogno dei nuclei di ghiacciamento. Generalmente i cirri non si formano per convezione; tuttavia si possono osservare in presenza di nubi convettive precipitative, come mostrato in figura 11. Il loro impatto climatico è legato all'influenza che esercitano sul bilancio radiativo. Si stima



Figura 11: L'immagine rivela la presenza di cirri (nubi sottili nella parte alta della figura) in prossimità di un intenso sistema convettivo marino.

che mediamente i cirri oscurino fino al 20% della superficie terrestre (percentuale che raggiunge il 50% se consideriamo solo le regioni tropicali, dove l'insolazione è massima durante l'anno). In questo modo la loro presenza riduce la radiazione solare incidente per riflessione della stessa da parte dei cristalli di ghiaccio, e allo stesso tempo assorbe, e riemette nella bassa troposfera, la

radiazione infrarossa rilasciata dalla superficie terrestre. I cirri inoltre hanno anche il compito di regolatori del bilancio di vapor acqueo atmosferico (specialmente nelle regioni tropicali), in quanto la loro formazione prevede il ghiacciamento, e quindi la rimozione, di vapor acqueo dall'atmosfera.

La genesi convettiva dei cirri è legata ai processi di fuoriuscita (*outflow*) di aria satura dalle regioni laterali delle nubi convettive precipitative. Queste fuoriuscite d'aria possono ascendere di quota, portando il vapore in esso contenuto a formare i cristalli di ghiaccio puro che compongono i cirri. Essi pertanto risultano visibili nelle vicinanze delle nubi da cui hanno origine, almeno nelle loro prime fasi di vita, ma a quote maggiori. La scarsa estensione verticale dei cirri è dovuta alla presenza di strati staticamente stabili che ne inibiscono lo sviluppo verticale a favore di quello orizzontale. Una volta formati, i cirri possono migrare rispetto al luogo d'origine sospinti dalle forti correnti orizzontali che dominano l'alta troposfera.

Nubi convettive precipitative

Quando la concentrazione di acqua in nube supera una certa quantità di soglia, si attivano diversi processi fisici che portano alla formazione di gocce di pioggia e alla precipitazione. I processi più efficienti e maggiormente riscontrabili sono: diffusione, collisione-coalescenza e, per il caso specifico dei cristalli di ghiaccio, accrescimento. La *diffusione* è il processo dominante, assieme alla condensazione, quando le gocce di nube sono troppo piccole perché possa essere efficiente qualsiasi altro meccanismo di accrescimento. In questa fase, le gocce di nube crescono per diffusione e condensazione (prevalentemente per contatto) di molecole d'acqua dal vapore disperso nell'ambiente circostante verso la superficie della gocciolina stessa. Nonostante si tratti di condensazione di vapore sulla superficie della particella, si parla di diffusione in quanto la dinamica che governa questo meccanismo di accrescimento è appunto diffusiva. La goccia di nube accresce la propria massa e dimensione fintantoché la densità del vapore contenuto nell'ambiente è superiore alla densità del vapore alla superficie della gocciolina. Se questo proces-

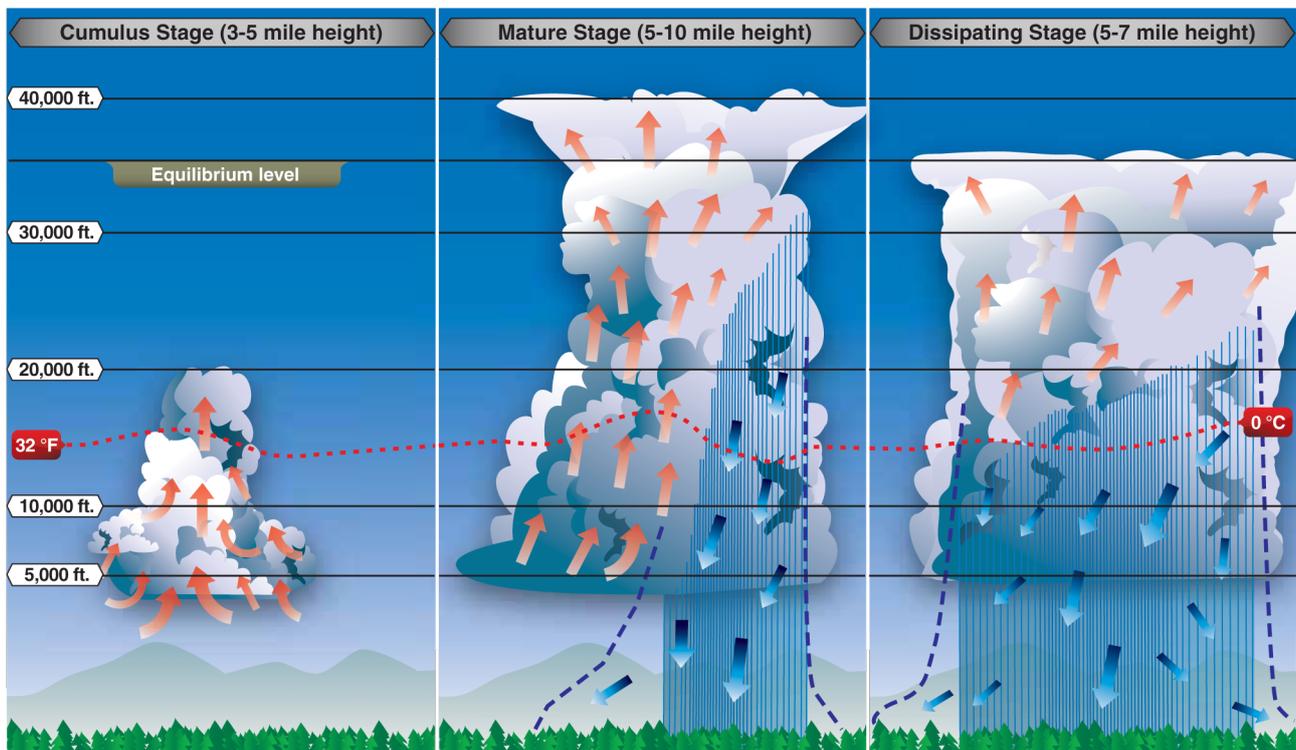


Figura 13: I tre stadi di sviluppo di un cumulonembo.

so ha fine prima che la gocciolina abbia raggiunto dimensioni sufficienti affinché altri meccanismi diventino dominanti, la goccia tenderà ad evaporare.

Quando una goccia di nube raggiunge una dimensione sufficiente (generalmente si considerano i $10 \mu\text{m}$ di raggio come soglia), i processi di *collisione* e *coalescenza* diventano predominanti. La collisione è sinonimo di urti tra gocce: tali urti possono essere di natura elastica o anelastica, ed avvengono in risposta alle forze gravitazionali. Quando la forza peso supera quella dell'updraft, le gocce, a partire da quelle più grandi, iniziano a cadere, collidendo così con le goccioline più piccole rimaste in sospensione. La collisione non garantisce automaticamente la coalescenza, ovvero l'aggregazione delle gocce scontratesi. Infatti possono verificarsi diversi scenari in seguito alla collisione: rimbalzo, coalescenza permanente o temporanea, e rottura. Nel primo caso non si ha un accrescimento delle dimensioni della goccia, mentre la crescita più efficiente è quella permanente. Negli altri due casi la coalescenza sfocia in una crescita nulla o parziale a seconda che la successiva separazione delle gocce avvenga conservando o meno la forma originale delle gocce stesse.

I primi due processi di crescita fin qui descritti hanno luogo con diversa efficienza sia nelle nubi d'acqua che di ghiaccio. Il terzo processo di crescita invece è esclusivo dei cristalli di ghiaccio, pressoché sempre presenti nelle nubi convettive a carattere precipitativo alle medie latitudini. L'*accrescimento* è un meccanismo di crescita del cristallo di ghiaccio che prevede la cattura di gocce di nube sopraraffreddate da parte di una particella di precipitazione ghiacciata. Se le goccioline ghiacciano istantaneamente per contatto con la superficie della particella ghiacciata, esse formano una pellicola di brina, portando alla formazione di un cristallo o alla *graupel*². Se il ghiacciamento non è immediato, si vengono a creare strutture più dense, di cui la grandine ne è un esempio estremo.

Le nubi convettive che generano precipitazioni rientrano nella categoria dei cumulonembi (*cumulonimbus*). Il cumulonembo è una nube di grande dimensione, ad estensione prevalentemente verticale, con base piatta e scura e top parzialmente o totalmente composto da cristalli di ghiaccio (gocce di nube ghiacciate per effetto di

²Precipitazione in forma solida, costituita da granelli di ghiaccio sferici o conici, poco compatti e facilmente comprimibili, dal diametro di pochi millimetri.



Figura 12: *Un esempio di cumulonimbus.*

temperature sufficientemente basse da permettere il ghiacciamento diretto del vapor acqueo). Spesso presentano un'incudine (*anvil*), ovvero una regione ad estensione prevalentemente orizzontale di origine simile a quella degli stratocumuli, dove però a fare da inibitore allo sviluppo verticale non è una regione stabile ma la tropopausa. Al centro della nube vi è l'*updraft*, ovvero il moto convettivo ascendente d'aria che genera ed alimenta lo sviluppo della nube stessa, le cui velocità oscillano attorno ai $10 - 30 \text{ m/s}$. La regione dell'*updraft* è la più attiva ed organizzata, nonché cuore e fulcro della nube e della formazione di gocce di pioggia. Quando la nube raggiunge lo stadio precipitativo, una seconda corrente verticale fredda si sviluppa per effetto del trascinarsi delle gocce d'acqua in caduta e raffreddata dall'evaporazione. Tale corrente prende il nome di *downdraft* ed è spesso rilevabile al suolo sotto forma di vento freddo; è inoltre responsabile della forte diminuzione di temperatura che si avverte al passaggio di un cumulonembo.

La vita media di un singolo cumulonembo è di circa $30 - 40$ minuti, e la sua evoluzione temporale viene generalmente divisa in tre fasi: stadio iniziale o di cumulo (*cumulus stage*), stadio maturo (*mature stage*) e stadio dissipativo (*dissipation stage*). I tre stadi di sviluppo della nube sono illustrati in figura 13. Il cumulonembo medio inizia il suo sviluppo da una grande torre cumuliforme, o come aggregato di esse, per effetto un forte *updraft*, la cui intensità supera spesso i 10 m/s . L'accelerazione dell'*updraft*, dovuta al rilascio di calore latente durante la condensazione del vapore, convoglia grandi quantità d'aria

dall'atmosfera sottostante verso il centro della nube. Questo stadio iniziale è caratterizzato dal fatto che tutta l'aria è in ascesa e che le gocce di pioggia che si formano sono mantenute in sospensione nell'*updraft*.

Lo stadio maturo inizia con l'apparizione della precipitazione (gocce di pioggia che precipitano dalla nube, ma che non necessariamente riescono ad arrivare al suolo in quanto evaporano prima) e con i primi segni di ghiacciamento al top. Buona parte della precipitazione in formazione è sopraraffreddata, ovvero l'acqua contenuta nelle gocce è allo stato liquido nonostante la temperatura sia inferiore al suo punto di congelamento. Il ghiacciamento infatti non comincia se le temperature non sono molto al di sotto dello zero, ed è facilitato quando le gocce sono più grosse. Se la crescita della nube è molto rapida, il ghiacciamento tarda ad arrivare perché le gocce che la compongono rimangono piccole e numerose. Questa è la condizione ideale per lo sviluppo della grandine perché il mancato ghiacciamento mette a disposizione una grande quantità di acqua sopraraffreddata, che ne è l'ingrediente principale. Una volta che le più grandi idrometeorie ghiacciate in caduta iniziano il ciclo di formazione, i chicchi di grandine crescono per cattura delle goccioline sopraraffreddate, facendole ghiacciare per contatto. Le dimensioni del chicco sono anche determinate dalla possibilità dell'*updraft* di mantenere il chicco in sospensione per il tempo necessario per farlo accrescere. Una notevole quantità di precipitazione che raggiunge il suolo durante i temporali deriva dallo scioglimento dei chicchi di grandine. La durata dello stadio maturo è variabile, ma spesso limitata ad una decina di minuti.

Il violento rilascio della precipitazione crea un *downdraft* che o fa collassare l'*updraft* o lo fa spostare di posizione. Quando ciò accade la nube entra nella fase di dissipazione. Il *downdraft* e la pioggia continuano, ma tendono ad attenuarsi gradualmente col tempo. La base della nube si alza notevolmente perché le idrometeorie sono più facilmente evaporate nell'aria in discesa che viene riscaldata adiabaticamente, e tutti i segni di ulteriore convezione sono rimpiazzati da nuvolosità a medio e alto livello. Questo determina la morte del cumulonembo, a meno che il processo non si ripeta dall'inizio sospinto da un nuovo

updraft con origine spostata rispetto al precedente.

Ogni cumulonembo è essenzialmente unico; i dettagli costitutivi infatti non si ripetono mai esattamente, anche se le somiglianze prevalgono all'interno di un singolo tipo di nube. Il cumulonembo riempie pesantemente le quattro dimensioni (tre spaziali e il tempo) e ciò da luogo ad un numero illimitato di possibili forme, dimensioni e colori. Le condizioni ambientali in cui si sviluppa sono facilmente mutevoli e ogni minimo cambiamento nelle variabili atmosferiche può generare uno scenario diverso in cui la nube si sviluppa. Ciononostante si può sempre osservare una struttura basilare che caratterizza i cumulonembi, la *cella*. La cella sta ad indicare una regione di atmosfera caratterizzata da un suo updraft organizzato ed unico. Grazie a questa caratteristica comune, è possibile creare delle classi di cumulonembi a cella *singola*, *multicella* e *supercella*.

Il tipo cumulonembo a cella singola descrive essenzialmente la crescita ed il collasso di una singola cella di updraft. Può cominciare come una torre cumuliforme più robusta del normale od emergere nel cuore di un aggregato di torri più piccole di uguali dimensioni che diventano una cella più grande. Il ciclo vitale di un updraft di altezza intorno ai 10 km può essere dell'ordine della mezz'ora. Non sono molto comuni poiché le condizioni favorevoli per la convezione normalmente permettono un flusso verticale maggiormente continuo, e si verificano più frequentemente quando l'instabilità è meno profonda o quando i venti in quota sono più leggeri. Il collasso della cella può dare inizio a nuove celle, ma sarebbero comunque eventi separati ed indipendenti.

La maggior parte dei cumulonembi è di tipo multicella. Questi ultimi differiscono dal tipo a cella singola per la presenza di una serie di pulsazioni di updraft separati che mantengono uno stato più o meno stazionario per quanto riguarda la forza e la struttura globale della nube. Queste pulsazioni possono variare dalle decine di secondi alle decine di minuti ed essere osservate ed identificate come torri separate in ascesa. Ciascuna può far parte di una base solida ed unica, ma matureranno come eventi separati, apportando il loro contributo distinto alla struttura di preci-



Figura 14: Sistema convettivo multicella. Si distinguono chiaramente tre celle a differenti stadi vitali.

pitazione del temporale ed a quella dell'anvil. Il sistema nuvoloso è altamente variabile quando si considerino forza, lunghezza degli intervalli e numero delle pulsazioni. È inoltre un ottimo ambiente per osservare il ciclo vitale convettivo in continua evoluzione.

Il temporale supercella è il più potente e potenzialmente distruttivo temporale convettivo locale che si conosca. È responsabile di una larga parte dei più distruttivi e duraturi tornado, e quasi sempre da luogo a grandine di grosse dimensioni, brevi venti violenti, folate violente dimensionali e continui fulmini. È un fenomeno



Figura 15: Temporale di tipo supercella.

indubbiamente abbastanza spaventoso per le sue enormi dimensioni e per il controllo quasi totale sull'atmosfera locale mediante il risucchio e la trasformazione di tonnellate di aria calda e umida. Questo tipo di temporale è più possibile quando una forte situazione di inversione ha ritardato il rilascio di energia fino a tardi nel corso

della giornata, e poi si apre per consentire ad uno o più temporali isolati di crescere. L'updraft molto efficiente e simile ad un getto può superare i 50 m/s; esso alimenta l'intero sistema introducendo aria nella nube attraverso pulsazioni a corti intervalli. Al confronto il sistema evolve in modo relativamente lento, rimanendo di aspetto abbastanza uniforme per ore. Il sistema è sormontato da un enorme anvil che si staglia nel cielo tagliando il vento per 20 – 30 km. Alla base dell'updraft del temporale rivela una corta linea di torri tra loro vicine ed in ripida ascesa e dove esse si uniscono alla nube principale si ritrovano talvolta striature circolari o laminari sotto la base, che tradiscono la rotazione del mesociclone incorporato al temporale. Spesso però il mesociclone,



Figura 16: Temporale di tipo supercella in cui è ben visibile il mesociclone.

una vasta porzione di updraft in rotazione, è visibile anche dall'esterno soprattutto dopo che la nube ha raggiunto un certo sviluppo, come mostrato in figura 16. Il mesociclone può evolvere in continuazione, muovendosi con il sistema, o rigenerarsi in passi successivi all'indebolirsi e riformarsi ripetuto dell'updraft principale. L'intero sistema può anche essere sottoposto ad un processo di evoluzione a passi discreti in cui il confine del downdraft si spinge in avanti ed intorno all'updraft, strozzandolo e forzandolo a riformarsi leggermente più avanti. La regione di attività del mesociclone è anche quella in cui si possono originare eventuali tornado.

Questo tipo di temporali non cessa mai di sorprendere anche i più esperti a causa della sua potenza ed imprevedibilità, e pertanto non dovrebbe mai essere sottovalutato.



- [1] S.R. BHOWMIK, S.S. ROY AND P.K. KUNDU: "Analysis of large-scale conditions associated with convection over the Indian monsoon region", *Int. J. Climatol.* **28** (2008) 797-821.
- [2] S.G. COBER, J.W. STRAPP AND G.A. ISAAC: "An example of supercooled drizzle drops formed through a collision-coalescence process", *Journal of Applied Meteorology* **35(12)** (1996) 2250-2260.
- [3] K.A. EMANUEL: *Atmospheric Convection*. Oxford University Press, Oxford (1994).
- [4] F. FIERLI, G. DI DONFRANCESCO, F. CAIRO, V. MARÉCAL, M. ZAMPIERI, E. ORLANDI AND G. DURRY: *Variability of cirrus clouds in a convective outflow during the Hibiscus campaign*. *Atmos. Chem. Phys.*, **8(16)** (2008). 4547-4558
- [5] R.A. HOUZE JR.: *Cloud dynamics (Vol. 104)*. Academic press, New York (2014).
- [6] E.L. KOSCHMIEDER: "Benard Convection", *Adv. Chem. Phys.* **26(177-212)** (1974) 605.
- [7] T.N. KRISHNAMURTI, L. STEFANOVA AND V. MISRA: *Dry and Moist Static Stability*. Springer Science & Business Media, Berlin (2013).
- [8] D.P. LALAS, F. EINAUDI: "On the correct use of the wet adiabatic lapse rate in stability criteria of a saturated atmosphere", *Journal of Applied Meteorology* **13(3)** (1974) 318-324.
- [9] E.N. LORENZ: "Deterministic non periodic flow", *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130-141.
- [10] A.R. MOLLER, C.A. DOSWELL III, M.P. FOSTER AND G.R. WOODALL: "The operational recognition of supercell thunderstorm environments and storm structures", *Weather and Forecasting* **9(3)** (1994) 327-347.
- [11] M.W. MONCRIEFF AND M.J. MILLER: "The dynamics and simulation of tropical cumulonimbus and squall lines", *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **102(432)** (1976) 373-394.
- [12] B.R. MORTON, B.R., G.I. TAYLOR AND J.S. TURNER: "Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources", *Proc. Roy. Soc.* **A234** (1956) 1-23.
- [13] C.W. NEWTON: "Circulations in large sheared cumulonimbus", *Tellus A* **1966** (18(4)) .
- [14] NORMAND, C., Y. POMEAU AND M.G. VELARDE: "Convective instability: A physicist's approach", *Rev. Mod. Phys* **49** (1977) 581.
- [15] M. Orme Experiments on droplet collisions, bounce, coalescence and disruption *Progress in Energy and Combustion Science* **23(1)**1997 65-79
- [16] P.S. RAY, J.B. KLEMP AND R.B. WILHELMSON: "Observed and numerically simulated structure of a mature supercell thunderstorm", *Journal of atmospheric sciences* **38** (1982) 1558-1580.
- [17] LORD RAYLEIGH: "On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside", *Phil. Mag.* **32** (1916) 529-546.
- [18] C.P.R. SAUNDERS AND S.L. PECK: "Laboratory studies of the influence of the rime accretion rate on charge transfer during crystal/graupel collisions", *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* **103(D12)** (1998) 13949-13956.

- [19] R.K. SMITH: *The physics and parameterization of moist atmospheric convection*. Springer Science & Business Media, Berlino (2013).
- [20] R.B. STULL: "A Fair-Weather Cumulus Cloud Classification Scheme for Mixed-Layer Studies", *American Meteorological Society* **24** (1985) 49-56.
- [21] D.Z. SUN AND R.S. LINDZEN: "Distribution of tropical tropospheric water vapor", *Journal of the atmospheric sciences* **50(12)** (1993) 1643-1660.
- [22] J.M. WALLACE AND P.V. HOBBS: *Atmospheric Science: An Introductory Survey*. Academic, San Diego, California (1977).
- [23] H.K. WEICKMANN AND H.J. AUFM KAMPE: "Physical properties of cumulus clouds", *Journal of Meteorology* **10(3)** (1953) 204-211.
- [24] P. ZUIDEMA, D. PAINEMAL, S. DE SZOEKE, AND C. FAIRALL: "Stratocumulus cloud-top height estimates and their climatic implications", *Journal of Climate* **22(17)** (2009) 4652-4666.



Silvana Di Sabatino: È Professoressa Associata di Fisica dell'Atmosfera presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna. I suoi interessi di ricerca riguardano lo studio delle interazioni superficie-atmosfera la cui comprensione è alla base della dinamica della circolazione atmosferica e della meteorologia. Le tecniche di indagine che utilizza si basano sia su risultati di esperimenti in atmosfera reale che in laboratorio, affiancati da modelli numerici adeguati a descrivere i moti atmosferici a diverse scale spaziali e temporali.

Francesco Barbano: È Dottorando di Ricerca in Geofisica presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna. Si occupa di studiare l'impatto della vegetazione in strato limite atmosferico urbano e come questo interessi il cambiamento climatico. Nutre un forte interesse nei fenomeni atmosferici e marini a più grande scale, specialmente se quelli di carattere "severe" (intensità straordinaria).

La convezione nelle stelle

Michaël Bazot

Center for Space Science – New York University Abu Dhabi

Nelle stelle si verificano fenomeni convettivi. Tuttavia, prima di illustrare le loro principali caratteristiche ed i modelli usati dai fisici per descriverli, è necessario soffermarsi sui principi della fisica stellare per capire quali cause li innescano.

Ad un primo sguardo, una stella non è altro che una gigantesca sfera di gas. Sembrerebbe una affermazione banale, ma non lo è. Infatti, se prendiamo in considerazione del gas contenuto in una stanza, è ben noto che esso si espanderà fino a riempire tutto lo spazio disponibile. Ma, nel caso di una stella, il gas si trova nel mezzo interstellare (che, per i nostri fini, può essere considerato come un alto vuoto di estensione infinita), e, tuttavia, mantiene una forma sferica. Il concetto chiave, in questo caso, è quello di “gigantesco”: la quantità di materia che stiamo prendendo in considerazione implica che una stella sia un sistema auto-gravitante (da cui la simmetria sferica). È il suo stesso peso ad impedire al gas di espandersi senza limiti. Infatti, se supponiamo che una stella si trovi in una configurazione stabile, il richiamo della gravità deve essere bilanciato. Un’ipotesi ragionevole è quella che la stella sia in equilibrio idrodinamico, e che la stabilità risulti da forze di pressione che controbilanciano la gravità. Tramite questa ipotesi è possibile ottenere delle stime rozze ma realistiche per i valori delle variabili termodinamiche vicino al centro di una stella. Nel caso del Sole, considerando

Convection occurs in stars. Yet before expanding on its main characteristics and how physicists model it, we need to look into the principles of stellar physics to understand why it does set in the first place.

At first glance, a star is nothing but a gigantic sphere of gas. This statement might seem trivial, it is not. Suffice to consider some gas in a room. It is canon knowledge that it will expand and fill all the available space. However, we are talking here about gas in the interstellar medium (which will be considered, for any practical purpose, as a good vacuum of infinite extent), and yet it possesses a spherical structure. A key word here is of course “gigantic”. Indeed the amount of matter considered here implies that the star is a self-gravitating system (hence the sphere). Its own weight prevent the gas particles to escape to infinity. In fact this gravitational pull has to be balanced for the star to be in a stable configuration. A very reasonable assumption is that the star is in hydrodynamical equilibrium and that stability is a product of pressure forces counteracting gravity. Using this assumption, one could get crude but realistic estimates of the thermodynamic variables near the centre of a star. In the solar case, when considering the average pressure gradient, mass and radius, one find that the central pressure is $P_c \simeq 2GM_\odot^2/\pi R_\odot^4$, with M_\odot and R_\odot the solar mass and radius. Typical

un gradiente di pressione medio, la massa ed il raggio, si ottiene che la pressione nel centro è $P_c \simeq 2GM_\odot^2/\pi R_\odot^4$, dove M_\odot e R_\odot indicano, rispettivamente la massa ed il raggio del Sole. Sostituendo i valori numerici ritenuti corretti per la nostra stella si ottiene $P_c \simeq 7 \times 10^{14}$ Pa. Con l'ulteriore ipotesi che il gas stellare sia un gas perfetto composto da idrogeno, si può dedurre un grossolano limite superiore alla temperatura centrale pari a $T_c \lesssim 3 \times 10^7$ K.

Sorprendentemente, queste stime grossolane hanno già fornito una risposta alla nostra prima domanda. Ricordando che le temperature superficiali delle stelle spaziano fra alcune migliaia ed alcune decine di migliaia di gradi, diventa immediatamente chiaro che il loro interno è stratificato e presenta un gradiente di temperatura orientato verso il basso. Pertanto, all'interno di una stella, ad una determinata distanza dal centro, si può affermare che il gas sia riscaldato dal basso. Questo è la tipica situazione che si trova nella convezione di Rayleigh-Bénard, in cui il gradiente di gravità che tenderebbe a rendere stabile il fluido è posto in competizione con il gradiente di temperatura, che, invece, tenderebbe a destabilizzarlo. Questa è, ovviamente, una rappresentazione semplicistica, e moltri altri fattori possono modificare più o meno profondamente questo quadro. Tuttavia, si tratta di un buon punto di partenza, e ci aiuterà a capire molti aspetti della convezione stellare.

Per finire queste osservazioni preliminari riguardo alla struttura stellare, procediamo precisando qualche fatto elementare riguardo al bilancio energetico delle stelle. Finora abbiamo capito come una massa di gas possa mantenere da sola una forma sferica, e che cosa ciò implichi in termini di stratificazione della struttura interna. Tuttavia non abbiamo ancora discusso la caratteristica più ovvia delle stelle: quella di emettere luce. Che debba essere così, è una conseguenza del teorema del viriale, che pone in relazione l'ammontare di energia cinetica (E_k) e di energia potenziale gravitazionale¹ (E_g) di una stella. Un semplice calcolo fornisce $E_k = -\frac{1}{2}E_g$. Prendiamo in considerazione l'energia totale $E_k + E_g$. Al tempo iniziale, quando la nebulosa protostellare

¹Questa è l'energia necessaria per allontanare fino ad una distanza infinita tutta la massa stellare, strato dopo strato.

values for the Sun give us $P_c \simeq 7 \times 10^{14}$ Pa. Making the additional assumption that the stellar gas is a perfect gas of hydrogen, one may derive a rough upper bound on the central temperature $T_c \lesssim 3 \times 10^7$ K.

Remarkably enough, these rough estimates have already answered our first question. Recalling that the temperature at the stellar surface is of the order of a few thousands or ten of thousands degrees, we immediately see that their interior is stratified with a downward temperature gradient. Conversely, at a given radius in the interior, one could say that the gas is heated from below. This is the typical setup for Rayleigh-Bénard convection, in which a stabilizing gravity gradient is competing with a destabilizing temperature gradient. Of course, this is a simplistic view, and many additional effects can change this picture more or less dramatically. Yet it is a good starting point and will help us to understand much about stellar convection.

To complete these preliminary remarks on stellar structure, let us make precise some further basic facts about the energy balance in stars. So far, we just got to understand how a mass of gas could maintain itself into a spherical structure and what it implies in terms of the stratification of the interior. However, we have not discussed yet what might be the most obvious characteristics of stars: they emit light. That it shall be so can be understood simply by invoking the virial theorem, which tells how to relate the reservoirs of kinetic energy (E_k) and gravitational potential energy¹ (E_g) in the star. A simple calculus gives $E_k = -\frac{1}{2}E_g$. Consider now the total energy $E_k + E_g$. At an initial time, when contraction starts in the protostellar cloud, the gas is diluted in space and there is no gravitational field act-

¹This can be viewed as the energy one needs to bring to infinity all the stellar mass shells.

inizia a contrarsi, il è gas diluito nello spazio e non c'è un apprezzabile campo gravitazionale che agisce su di esso, quindi $E_g = 0$. Analogamente, l'energia cinetica dovuta all'agitazione molecolare è trascurabile, se teniamo conto che la temperatura di queste nebulose è di pochi gradi, e quindi è ordini di grandezza più piccola che quella osservata nelle stelle. Quindi, per tutti i fini pratici, l'energia cinetica iniziale è trascurabile. D'altra parte, secondo il teorema del viriale, l'energia della stella a tempi successivi è $\frac{1}{2}E_g$, il che vuol dire che $-\frac{1}{2}E_g$ è stata persa nel mezzo interstellare. Nel caso del Sole, un calcolo di ordini di grandezza suggerisce $|E_g| \approx 2 \times 10^{41}$ J, e di conseguenza $E_k \approx 1 \times 10^{41}$ J. Questo è l'ammontare dell'energia persa dalla stella sotto forma di luce irradiata.

Abbiamo quindi capito che dell'energia fluisce all'esterno di una stella, e questo è importante per la convezione. Infatti, l'esistenza di un gradiente di temperatura verso il basso suggerisce che sono proprio le regioni più interne quelle da cui l'energia fluisce verso la superficie. In tal caso la convezione gioca un ruolo importante per la fisica stellare in qualità di meccanismo di trasporto, e, pertanto, il nostro interesse principale sarà quello di calcolare il flusso di energia. È proprio il soffermarsi su questo ambito limitato ciò che ha permesso finora ai fisici stellari di descrivere i processi convettivi senza conoscerne in dettaglio le proprietà.

A questo punto, abbiamo tutto ciò che è necessario per una discussione sulla convezione? Quasi. Ci si potrebbe chiedere se l'interazione fra la contrazione del gas e l'equilibrio idrostatico è tutto ciò che è necessario per dare energia alla radiazione stellare. In alcuni casi è così. Ma un classico ragionamento consiste nell'osservare che, data la luminosità corrente del Sole, $L_\odot = 3.828 \times 10^{26}$ W ed in assenza di ulteriori sorgenti di energia, la sua durata di vita sarebbe $-E_g/L_\odot \sim 1.6 \times 10^7$ yr. Questa stima diminutiva creerebbe enormi problemi e paradossi se confrontata con ciò che sappiamo riguardo alla Terra ed al Sistema Solare.

Grazie alle alte temperature e pressioni nel loro centro, le reazioni di fusione nucleare sono la sorgente di energia dei nuclei stellari. La tipica argomentazione si riconduce all'equivalenza massa-energia, ed implica che l'energia liberata

ing on the particles, thus $E_g = 0$. Likewise, the kinetic energy due to molecular agitation is negligible, keeping in mind that the temperature of these clouds is of the order of a few degrees, i.e. orders of magnitude lower than those observed in stars. Thus, the initial energy of the gas is negligible for any practical purpose. On the other hand, by the virial theorem, the energy of the star at a further time is $\frac{1}{2}E_g$, meaning that $-\frac{1}{2}E_g$ has been lost to the interstellar medium. For the Sun, an order-of-magnitude calculation gives $|E_g| \approx 2 \times 10^{41}$ J and consequently $E_k \approx 1 \times 10^{41}$ J. This is also the amount of energy that has left the star as radiated light.

We have established that energy flows out of a star, and this is an important statement when dealing with convection. Indeed, the downward temperature gradient suggests that the innermost regions will be those from which energy flows to the surface. In that case convection becomes important for stellar physics as a transport mechanism and, accordingly, we will be mostly interested in computing energy fluxes. It is this rather restrictive scope that has allowed stellar physicists to handle convection so far without knowing its detailed properties.

Do we now have all we need to discuss convection? Almost. But one could wonder if the interplay between gas contraction and hydrostatic equilibrium is all there is to power stellar radiation. In some cases yes, but a classical argument is that given the current luminosity of the Sun, $L_\odot = 3.828 \times 10^{26}$ W, then a characteristic lifetime, if no additional source exists, would be $-E_g/L_\odot \sim 1.6 \times 10^7$ yr. This is problematic and would lead to many problems and paradoxes regarding our knowledge on Earth and the Solar System.

Given the high temperature and pressure at their centre, a source of energy in the stellar core is nuclear fusion reactions. A classical justification relies on the mass-energy equivalence and implies that the energy liberated as radiation was

come radiazione fosse in precedenza massa atomica del gas che costituisce la stella. Un limite superiore alla riserva totale di energia, risulterebbe allora essere $M_{\odot}c^2 \approx 1.5 \times 10^{47}$ J. Poiché le stelle sono per lo più costituite da idrogeno, esso deve anche esserne il combustibile principale. La prima ovvia reazione da tenere presente è quella che trasforma quattro atomi di idrogeno in uno di elio, vista l'alta energia di legame di quest'ultimo. In una di tali reazioni circa lo 0.7% della massa atomica si libera sotto forma di energia. Pertanto, in totale, la riserva di energia del Sole grazie alla conversione idrogeno-elio è di circa 1×10^{45} J. In rapporto alla luminosità del Sole, questa reazione da sola permetterebbe di sostenere la struttura in equilibrio per almeno 10^{11} anni, una cifra maggiore dell'età dell'universo di un ordine di grandezza. Ciò rimane vero anche limitando al nucleo della stella la portata delle reazioni nucleari. Pertanto la perdita di energia sotto forma di radiazione delle stelle è compensata da reazioni di fusione nucleare ed esse non continuano a contrarsi globalmente fino a quando non scarseggia il combustibile nella regione centrale².

In teoria esistono molti modi di trasformare idrogeno in elio. Tuttavia, in pratica due sono quelli importanti per la fisica stellare. Il primo è la cosiddetta catena protone-protone, in cui l'idrogeno forma deuterio e successivamente elio³. Essa è responsabile della maggior parte dell'energia generata a basse temperature ($T \lesssim 15 \times 10^6$ K). Si tratta del processo dominante nel Sole. A temperature più alte il principale meccanismo di

previously atomic mass constitutive of the stellar gas. The total energy reservoir, to be used as an upper bound, would then be $M_{\odot}c^2 \approx 1.5 \times 10^{47}$ J. Stars being mostly made of hydrogen, it should be the main fuel. The first obvious reaction to take into account is the the transformation of four hydrogen atoms in one helium atom, due to the high binding energy of the latter. During each such transformation, approximately 0.7% of the atomic mass is liberated as energy. There fore in total, the energy reservoir for the Sun out of hydrogen-to-helium conversion is roughly 1×10^{45} J. Reported to the luminosity of the Sun, this reaction alone would allow to sustain the equilibrium structure for at most 10^{11} years, which is more than the age of the Universe by orders of magnitude. This is true even if nuclear burning is confined to the core of stars. Thus radiative energy losses of stars are compensated by nuclear fusion reactions and they do not contract as a whole until the fuel in the central regions is depleted².

In theory, there may be a lot of processes leading from hydrogen to helium, in practice however two are relevant for stellar physics. The first is the so call proton-proton chain, in which hydrogen forms deuterium and then helium³. It is responsible for most of the energy generation at low temperatures ($T \lesssim 15 \times 10^6$ K). It is for instance the dominant process in the Sun. At higher temperatures, the main nuclear burning mechanism is the carbon-nitrogen-oxygen (CNO) cycle. It involves hydrogen reacting with

²Ovviamente la questione non è così semplice come questa breve spiegazione potrebbe lasciar intendere. Diversi problemi devono essere superati prima di poter accettare la fusione nucleare come possibile fonte di energia. In particolare si deve ricorrere ad effetti di tunnel quantistico per superare la barriera coulombiana fra le cariche positive dei nuclei di idrogeno. Analogamente, non tutto l'idrogeno brucia contemporaneamente, e talvolta reagiscono anche l'elio o elementi più pesanti. Quando il combustibile del nucleo stellare è esaurito, le parti centrali della stella cominciano a contrarsi sotto l'azione della gravità. La vita di una stella è, dunque, una successione di lunghe fasi di combustione intervallate a rapide fasi di contrazione del nucleo.

³A questo punto esistono in realtà tre principali sottocategorie nella catena p-p. Due nuclei ^3He possono reagire per formare un ^4He e dei protoni, oppure ^3He può fondersi con ^4He per formare un ^7Be e successivamente nuclei più pesanti che reagiscono con un protone oppure decadono fornendo due ^4He .

²Things are of course not as straightforward as this quick explanation let it appears. Several problems had to be overcome before accepting nuclear fusion as a viable energy source, in particular one has to invoke quantum tunnelling effects in order to overcome the Coulomb barrier between positively charged H nuclei. Likewise, not all hydrogen is burned at the same time, and sometimes helium or heavier elements are reacting. When the fuel is depleted at the core, then the star will contract under the action of gravity (in its inner regions). The life of a star is thus a succession of long nuclear-burning phases and rapid core-contraction sequences.

³At this stage, there are actually three main subchains in the p-p chain. Two ^3He nuclei can react to form a ^4He and protons, or ^3He can fuse with ^4He to give a ^7Be and then heavier nuclei that will either react with a proton or decay to give two ^4He .

combustione è il ciclo carbonio–azoto–ossigeno (CNO). Esso coinvolge idrogeno che reagisce con questi elementi fino a che è prodotto⁴ un nucleo di ⁴He. La distinzione è importante quando si ha a che fare con la convezione, in quanto il processo CNO è molto più sensibile alla temperatura e può portare a tassi di produzione di energia nel centro molto più alti, il che, a sua volta, favorisce la convezione.

Questi sono i principi elementari necessari a comprendere che cosa innesca la convezione nell'interno delle stelle, ed il suo ruolo come meccanismo di trasporto dell'energia potenziale. Nel seguito spiegheremo perché e come può svilupparsi, e quale forma essa prende.

Stabilità dinamica

Supponiamo che, ad un certo istante $t = 0$, l'interno stellare sia in una configurazione stabile, e che sia stratificato con un certo gradiente di temperatura, definito da $\nabla = \partial \ln T / \partial \ln P$, positivo (cioè sia la temperatura che la pressione aumentano in direzione radiale verso il centro). Consideriamo ora un elemento di fluido posto ad un raggio r , con temperatura T e pressione P . La densità dell'elemento è nota grazie all'equazione di stato $\rho = \rho(T, P)$. Al tempo t questo elemento è spostato dalla sua posizione di equilibrio. Al tempo $t + \Delta t$ si trova a $r + \Delta r$. L'elemento di fluido subisce una trasformazione termodinamica il cui risultato determina la stabilità dell'interno stellare rispetto a perturbazioni dinamiche.

Innanzitutto assumiamo che la pressione all'interno dell'elemento diventi istantaneamente uguale a quella dell'ambiente circostante⁵. Per semplicità discuteremo il caso in cui $\Delta r > 0$ (il ragionamento è del tutto simmetrico nel caso $\Delta r < 0$). Quando l'elemento di fluido giunge a $r + \Delta r$ la sua pressione sarà diminuita, e perciò si sarà espanso e la sua temperatura sarà decresciuta. A questo punto ci sono solo due possibilità: se l'elemento si raffredda più velocemente dell'interno stellare allora risulterà più pesante

⁴Il processo lascia immutate le componenti CNO di questo ciclo, che si comportano quindi come catalizzatori della conversione $4\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$.

⁵Questa è una ipotesi plausibile poiché la bolla si espande alla velocità del suono, che è solitamente dell'ordine di 10^6 m/s, ma si sposta con una velocità dell'ordine di 100 m/s.

these elements until a ⁴He nucleus is produced⁴. The distinction is important when dealing with convection because the CNO process is much more sensitive to temperature and can lead to much higher energy generation rates at the centre of the star, which might in turn favour convection.

These are basic principles necessary to understand why convection onsets in stellar interiors, i.e. as a potential energy transport mechanism. In the following, we will explain when and how it might develop, and which form it takes.

Dynamical stability

Let us assume that, at a given instant $t = 0$, the stellar interior is in a stable configuration. It is stratified with a temperature gradient, defined as $\nabla = \partial \ln T / \partial \ln P$ and that is positive (radial temperature and pressure gradients both being inwards). Now consider an element of fluid located at radius r , with temperature T and pressure P . The density of the element is known through the equation of state $\rho = \rho(T, P)$. At time t , this element is displaced from its equilibrium position. At time $t + \Delta t$ it is at $r + \Delta r$. The element of fluid undergoes a thermodynamical transformation whose outcome will determine the stability of the stellar interior to dynamical perturbations.

First let us assume that the pressure inside the element instantaneously adjusts to the surroundings⁵. For the sake of exposition we will now consider the case for which $\Delta r > 0$ (our argument is perfectly symmetric for the case $\Delta r < 0$). When the fluid element arrives at $r + \Delta r$ its pressure will have decreased, and accordingly it will have expanded and its temperature decreased. We are thus left with two possibilities: either the element cools down faster than the stellar interior, in that case it will be heavier than its sur-

⁴The CNO components of the cycle are left unchanged by the process and are thus catalysts to the $4\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$ conversion.

⁵This is a plausible assumption if the bubble expands at sound speed, which is typically of the order 10^6 m/s, whereas the displacement of the bubble is of the order of 100 m/s.

del fluido che lo circonda all'altezza $r + \Delta r$ e ricadrà in basso verso la sua posizione di equilibrio (intorno alla quale potrebbe compiere delle oscillazioni). Oppure, al contrario, se si raffredda più lentamente, allora continuerà a muoversi verso l'alto, e parleremo di una configurazione dinamicamente instabile. Indicando il gradiente di temperatura dell'elemento con ∇_e e quello dell'interno stellare con ∇ , allora possiamo così riassumere il ragionamento

$$\nabla \geq \nabla_e \Rightarrow \text{instabilità dinamica.}$$

Questo è il famoso criterio di Schwarzschild per la stabilità dinamica. È da notare che questa relazione è valida indipendentemente dal segno di Δr . Se la disuguaglianza è soddisfatta allora la convezione può innescarsi, invece se $\nabla_e \geq \nabla$ lo strato è stabile. La parola "strato" ha una certa importanza in questo contesto. Traduce il fatto che il criterio di Schwarzschild ha una natura differenziale. Pertanto esso dà una informazione locale riguardo alla stabilità. Ciò è legato a delle difficoltà nella formulazione di modelli dell'interno delle stelle di cui parleremo brevemente più avanti.

Il criterio di Schwarzschild non è specifico della fisica stellare, e lo si ritrova esposto in molti libri riguardanti fluidi stratificati dalla temperatura. Tuttavia, abbiamo fatto una semplificazione implicita che non è sempre giustificabile nel caso delle stelle, e cioè che l'equazione di stato dipenda solo da T and P . In effetti dovremmo piuttosto scrivere $\rho = \rho(T, P, \mu)$, dove μ è il peso molecolare della mistura. È ragionevole ipotizzare che il peso molecolare medio di un elemento spostato non cambi ⁶. Pertanto solo l'ambiente circostante può essere soggetto ad un gradiente non nullo di peso molecolare $\nabla_\mu = \partial \ln \mu / \partial \ln P$. Ciò può essere dovuto ad una interazione fra le reazioni nucleari e la convezione, oppure alla diffusione atomica. L'effetto di un tale gradiente è facile da spiegare. Se ∇_μ è positivo, allora il peso molecolare medio aumenta con la profondità ed il gradiente di μ è stabilizzante. All'elemento di fluido perturbato si oppongono un gradiente stabile termico ed uno chimico, rendendo difficile

⁶È ragionevole, ma non è sempre vero. Quando si tiene conto della diffusività molecolare e di quella termica, allora si coglie che possono determinarsi instabilità doppiamente diffusive [1, in questo numero]

roundings at $r + \Delta r$ and will fall back towards its equilibrium position (around which it may end up oscillating). If on the contrary it cools down slower than the exterior, it will keep moving up and the configuration is said to be dynamically unstable. If we write the temperature gradients of the element and the stellar interior ∇_e and ∇ we can sum this up as

$$\nabla \geq \nabla_e \Rightarrow \text{dynamical instability.}$$

This is the celebrated Schwarzschild criterion for dynamical stability. Note that this relation is valid regardless of the sign of Δr . If the inequality is true then convection might set in, conversely if $\nabla_e \geq \nabla$ the layer is stable. The word "layer" is of some importance here. It translates the fact that the Schwarzschild criterion is differential in nature. Therefore it gives us local information about stability. This is linked to complications in modelling stellar interiors that we will briefly touched upon later.

The Schwarzschild criterion is not specific to stellar physics and can be found derived in many books dealing with thermally stratified fluids. We nevertheless made an implicit simplification that cannot always be justified in the case of stars, namely that the equation of state depends only on T and P . In fact it should rather read as $\rho = \rho(T, P, \mu)$, with μ the mean molecular weight of the mixture. It is reasonable to assume that the mean molecular weight of a displaced does not change ⁶. Thus only the surroundings may show a non-null molecular weight gradient $\nabla_\mu = \partial \ln \mu / \partial \ln P$. This can result from the interplay between nuclear reactions and convection or because of atomic diffusion. The effect of such a gradient is easy to explain. If ∇_μ is positive, then the mean molecular weight increases with depth and the μ gradient is stabilizing. The perturbed element of fluid must then overcome the thermal and the chemical stable gradients, making harder for convection to set in. In other

⁶It might be reasonable but this is not always true. When molecular and thermal diffusivities are taken into account, then double-diffusive instabilities might occur [1, this issue]

l'innesco della convezione. In altre parole, e ponendo ancora una volta $\Delta r > 0$, un elemento di fluido sarà meno denso a $r + \Delta r$ solo a causa delle sue trasformazioni termodinamiche, mentre la densità dell'ambiente circostante diminuisce a causa sia del cambiamento nello stato termodinamico sia del cambiamento di composizione chimica. Pertanto ∇_e deve essere ancor più piccolo per permettere la convezione. D'altra parte, se $\nabla_\mu < 0$, siamo in presenza di un gradiente destabilizzante e la convezione è innescata più facilmente. Formalmente ciò si esprime con la disuguaglianza

$$\nabla - \frac{\phi}{\delta} \nabla_\mu \geq \nabla_e,$$

che è il criterio di Ledoux. Per generalità, abbiamo incluso sia il coefficiente di espansione che quello chimico $\delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln T$ and $\phi = \partial \ln \rho / \partial \ln \mu$. Per un gas ideale, $\delta = \phi = 1$. Il criterio di Ledoux si riduce a quello di Schwarzschild nel caso $\nabla_\mu = 0$, cioè per strati chimicamente omogenei.

Abbiamo un criterio locale che ci permette di determinare la stabilità di uno strato dell'interno stellare rispetto a movimenti convettivi. Quindi, noto un particolare profilo di stratificazione, possiamo dividere la stella in regioni dinamicamente stabili ed instabili. Per semplicità applicheremo solo il criterio di Schwarzschild. Il nostro primo obiettivo sarà quello di spiegare quando esso è soddisfatto, date le caratteristiche globali di una stella.

Un passo in questa direzione è quello di farsi un'idea del comportamento dei gradienti ∇ and ∇_e . Ci si può chiedere che cosa succede quando uno strato è stabile? In tal caso l'energia è trasportata dalla radiazione (dai fotoni che sono assorbiti e riemessi in sequenza dal plasma stellare) o per conduzione (attraverso la collisione fra particelle). Se trascuriamo la seconda e descriviamo la prima approssimativamente come un processo di diffusione, si ha la seguente espressione per il gradiente di temperatura in strati dominati dal trasporto radiativo

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{4acG} \frac{\kappa r^2 |\mathbf{F}| P}{mT^4}, \quad (1)$$

dove a è la costante di Stefan-Boltzmann, c è la velocità della luce, G è la costante di gravitazione

words, and again using $\Delta r > 0$, an element of fluid will be lighter at $r + \Delta r$ because of its thermodynamical transformation, whereas the density of the surroundings decreases due to both changes in the thermodynamical state and chemical composition. Thus ∇_e has to be even smaller in order to allow for convection. Evidently, if $\nabla_\mu < 0$, we are dealing with a destabilizing gradient and convection will be easier to trigger. Formally this is expressed as

$$\nabla - \frac{\phi}{\delta} \nabla_\mu \geq \nabla_e,$$

which is the Ledoux criterion. For the sake of generality, we have included the expansion and chemical coefficient, $\delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln T$ and $\phi = \partial \ln \rho / \partial \ln \mu$. For an ideal gas, $\delta = \phi = 1$. The Ledoux criterion reduces to the Schwarzschild criterion for $\nabla_\mu = 0$, i.e. for chemically homogeneous layers.

We have a local criterion allowing us to assess the stability of a layer of the stellar interior against convective movements. Given a particular stratification profile we can thus partition the star into dynamically stable and unstable regions. For the sake of simplicity, we will only consider the Schwarzschild criterion. Our first goal will be to explain when it is met, given the global characteristic of the star.

A step in that direction will be to give an idea of the behaviour of the gradients ∇ and ∇_e . One has to wonder what happens when a layer is stable? In that case, energy is transported by radiation (the photons are successively absorbed and re-emitted in the stellar plasma) or conduction (through particle collisions). If we neglect the latter and treat the former in the framework of a diffusive approximation, we can write the temperature gradient for radiation-dominated layers

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{4acG} \frac{\kappa r^2 |\mathbf{F}| P}{mT^4}, \quad (1)$$

with a the Stefan-Boltzmann constant, c the speed of light, G the universal gravitational constant, κ the opacity and $|\mathbf{F}|$ the energy flux. It is also noteworthy that, since $|\mathbf{F}| = 4\pi r^2 l$, with l the lumi-

universale, κ è l'opacità e $|F|$ è il flusso di energia. È da sottolineare che, poiché è $|F| = 4\pi r^2 l$, dove l è la luminosità, allora la stabilità dipende dal rapporto l/m . Naturalmente, in assenza di convezione, il gradiente di temperatura è $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$, e quindi vale la relazione $\nabla_e \geq \nabla_{\text{rad}}$. Infine notiamo che il gradiente radiativo può aumentare o perché aumenta il flusso di energia o perché aumenta l'opacità. Se $\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \nabla_e$ allora lo strato diventa convettivamente instabile, ed una parte dell'energia comincia ad essere trasportata dai moti convettivi. A questo punto il flusso di energia cessa di essere proporzionale a ∇_{rad} . Tuttavia la radiazione non scompare ed il flusso radiativo rimane comunque proporzionale al gradiente di temperatura ∇ . Ciò semplicemente implica che $\nabla_{\text{rad}} > \nabla$, tenendo conto della frazione del flusso totale trasportata dalla convezione.

Infine, è anche possibile fornire una stima del flusso totale. In totale generalità, una bolla più calda dell'ambiente circostante si raffredderà a causa dell'espansione dovuta all'equilibrarsi della pressione, ma anche perché emette radiazione. Perciò il caso adiabatico è un limite inferiore per il gradiente di temperatura dell'elemento di fluido e si ha $\nabla \geq \nabla_{\text{ad}}$. In regioni stabili lo scostamento dall'adiabaticità è trascurabile (il che implica anche che se si sposta un elemento di fluido esso oscillerà intorno alla sua posizione di equilibrio). Le proprietà del flusso convettivo in regioni dinamicamente instabili, d'altra parte, dipendono dal particolare valore di ∇ che potrebbe differire in modo significativo da ∇_{ad} . Per comprendere questa relazione avremo bisogno di descrivere con maggiore precisione il modello usato per descrivere la convezione stellare.

Il trasporto convettivo di energia

La convezione può avere varie forme ed è necessario caratterizzarla almeno quantitativamente prima di scendere nei dettagli dei modelli che usiamo nella fisica stellare. Fino ad ora abbiamo descritto la nostra stella come una sfera di gas autogravitante, e siamo stati in grado di trarre delle conclusioni alquanto generiche riguardo la struttura termodinamica della stella e la possibilità dell'insorgere della convezione. Assumiamo che, in effetti, ci siano degli strati convettivi nell'interno e concentriamoci su tali regioni, restringendo

l'analisi, allora vediamo che la stabilità dipende dal rapporto l/m . Ovviamente senza convezione, il gradiente di temperatura è $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$, e quindi vale la relazione $\nabla_e \geq \nabla_{\text{rad}}$. Da lì in poi, il gradiente radiativo può aumentare a causa di un aumento del flusso di energia o di un'opacità maggiore. Quando $\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \nabla_e$ lo strato diventa convettivamente instabile e parte dell'energia comincia a essere trasportata dai moti convettivi. A questo punto il flusso di energia cessa di essere proporzionale a ∇_{rad} . Tuttavia la radiazione non scompare e il flusso radiativo rimane comunque proporzionale al gradiente di temperatura ∇ . Ciò semplicemente implica che $\nabla_{\text{rad}} > \nabla$, tenendo conto della frazione del flusso totale trasportata dalla convezione.

Finalmente, è anche possibile fornire una stima del flusso totale. In generale, una bolla più calda del suo ambiente si raffredderà a causa dell'espansione risultante dall'aggiustamento della pressione e anche perché emette radiazione. Perciò il caso adiabatico è un limite inferiore per il gradiente di temperatura dell'elemento di fluido e si ha $\nabla \geq \nabla_{\text{ad}}$. In regioni stabili lo scostamento dall'adiabaticità è trascurabile (il che implica anche che se si sposta un elemento di fluido esso oscillerà intorno alla sua posizione di equilibrio). Le proprietà del flusso convettivo in regioni dinamicamente instabili, d'altra parte, dipendono dal particolare valore di ∇ che potrebbe differire in modo significativo da ∇_{ad} . Per comprendere questa relazione avremo bisogno di descrivere con maggiore precisione il modello usato per descrivere la convezione stellare.

Convective energy transport

Convection can have many forms and it is necessary to characterize it at least quantitatively before going into the details of the model we use in stellar physics. So far we have described our star as a self-gravitating gaseous sphere and we were able to draw very generic conclusions about the stellar thermodynamical structure and the possibility of convective onset. Let us assume that there are indeed convective layers in the interior and focus on such a region, narrowing our perspective so that we can consider a

la nostra prospettiva in modo da poter prendere in considerazione una porzione confinata fra piani paralleli. Il gas sarà allora soggetto ad un gradiente di pressione stabilizzante, come implicato dall'equilibrio idrostatico, ed ad un gradiente di temperatura instabile. Questo è il classico schema della convezione di Rayleigh-Bénard.

Con questa immagine possiamo procedere ulteriormente nella comprensione della convezione stellare usando i classici risultati della stabilità idrodinamica. Innanzitutto dobbiamo notare che finora non abbiamo parlato molto degli effetti diffusivi nei gas stellari. Quando li si prende in considerazione in modo completo si sa che l'inesco della convezione dipende dal valore del numero di Rayleigh, che è

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu},$$

dove $\alpha = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu}$ è il coefficiente di dilatazione della miscela gassosa, g l'accelerazione di gravità locale, ΔT la differenza di temperatura fra i bordi inferiore e superiore della zona convettiva (quindi un numero positivo), d la scala di lunghezza caratteristica del problema, κ la conduttività termica e ν la viscosità del fluido.

Prima di stimare gli ordini di grandezza di queste quantità, riassumiamo brevemente come si ottengono i risultati riguardo alla stabilità della convezione di Rayleigh-Bénard. Ipotizziamo che una configurazione inizialmente in equilibrio sia disturbata da perturbazioni di ampiezza minuscola. Le considereremo oscillatorie, propagantisi in un piano perpendicolare alla verticale. Ciascuna di esse sarà caratterizzata da un certo numero d'onda k e da una pulsazione che, nel caso generico, è un numero complesso. Senza entrare nei dettagli della teoria, è sufficiente menzionare che nel caso di strati limite liberi (ovvero quando non esistono vincoli tangenziali sul fluido ai bordi della zona convettiva, ovviamente questo è il caso delle zone convettive stellari) le perturbazioni possono essere quantificate e per ciascuna di esse esiste un numero di Rayleigh critico $\text{Ra}_c^{(n)}$ al di sopra del quale quella perturbazione è instabile, ovvero ha una ampiezza che cresce esponenzialmente.

Bisogna notare che per ognuna delle perturbazioni $\text{Ra}_c^{(n)}$ dipende dal rapporto d'aspetto del

plane-parallel geometry. The gas is then stable under the pressure gradient, as implied by the hydrostatic equilibrium, and unstable under the spatial temperature gradient. This is the classical set up for Rayleigh-Bénard convection.

From that picture we can go a little further in the understanding of stellar convection using classical results of hydrodynamical stability. First, we should note that we have not so far discussed much diffusive effects in stellar gases. When fully taken into account it is known that the convective onset will depend on the value of the Rayleigh number, that is

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu},$$

where $\alpha = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu}$ is the dilatation coefficient of the gas mixture, g the local gravity, ΔT the temperature difference between the bottom and the top boundaries of the convective zone (and thus a positive number), d the characteristic length scale of the problem, κ the thermal conductivity and ν the viscosity of the fluid.

Before giving orders of magnitude let us sum up briefly how basic stability results are obtained in Rayleigh-Bénard convection. Starting from an equilibrium configuration we assume that it is disturbed by small-amplitude perturbations. We will consider them to be oscillatory and propagating in a plane perpendicular to the vertical. The mode has a certain wave number k and a pulsation which, in all generality, is a complex number. Without entering the detailed theory, suffice to say that, in the case of free boundary layers (for which there is no tangential constraints on the fluid at the boundaries, obviously the case in stellar convective zones) the modes are quantified and for each of them there is a critical Rayleigh number $\text{Ra}_c^{(n)}$ above which it is unstable, i.e. for which the amplitude of the perturbation grows exponentially.

One should note that for each mode $\text{Ra}_c^{(n)}$ depends on the aspect ratio of the problem, that

problema, e cioè da $k^{(n)}d$, poiché la scala verticale è imposta dalla geometria del problema. Esiste un valore $k^{(n)} = k_0^{(n)}$ per il quale $\text{Ra}_c^{(n)}$ raggiunge un minimo. Questo valore aumenta con n . Pertanto, è evidente che esiste una soglia al di sotto della quale nessuna perturbazione produce l'innescò della convezione. Il valore della soglia può essere stimato, ed è dell'ordine di qualche centinaio. Quando Ra la raggiunge, allora la perturbazione di ordine minimo ($n = 1$) innescò la convezione, con una scala caratteristica orizzontale di lunghezza pari a $2\pi/k_c^{(1)}$.

Ora abbiamo il giusto quadro formale per accertare un regime convettivo nelle stelle. Un aspetto critico riguarda le scale caratteristiche coinvolte nella fisica stellare. In laboratorio, è naturale porre d come la distanza fra le due piastre che delimitano l'apparato sperimentale. Nelle stelle, tuttavia, si deve generalmente scegliere l'altezza determinata dalla scala di pressione $H_p = -Pdr/dP$, che è di solito considerevolmente più piccola dell'estensione della zona convettiva. Ad esempio, lo strato convettivo esterno del Sole è largo approssimativamente 2×10^5 km, mentre l'altezza della scala di pressione è dell'ordine di alcune centinaia di chilometri (che è comunque di gran lunga maggiore rispetto alle lunghezze coinvolte in un qualunque esperimento). Per fissare le idee, continueremo ad esaminare il caso del Sole. La gravità nello strato può essere calcolata usando il suo raggio medio e ipotizzando che l'intera massa solare sia distribuita sotto di esso, il che dà $g \sim 10^2$ m/s². Il fattore di comprimibilità può essere approssimato da $\alpha \approx 1/T$ (a meno di una costante dimensionale dell'ordine dell'unità), ed è quindi dell'ordine di $10^{-4} - 10^{-6}$ nel caso delle temperature tipiche dello strato convettivo solare. La differenza di temperatura attraverso la lunghezza d è dell'ordine di alcune migliaia di °K. Infine, i coefficienti di viscosità e di conducibilità richiedono dei calcoli più dettagliati per essere stimati. Qui è sufficiente dire che il loro ordine di grandezza è $\nu \approx 10^{-1}$ m²/s and $\kappa \approx 10^8$ m²/s. Questi valori numerici ci permettono di stimare un numero di Rayleigh per lo strato convettivo esterno del Sole dell'ordine di 10^{11} . Esso è di gran lunga superiore al numero di Rayleigh critico.

La cosa importante da cogliere è che il numero di Rayleigh non solo fornisce un criterio per

is on $k^{(n)}d$ since the vertical scale is imposed by the underlying geometry. There is a value $k^{(n)} = k_0^{(n)}$ for which $\text{Ra}_c^{(n)}$ reaches a minimum. This value increases with n . Therefore one can see that there is a threshold below which no perturbation will produce a convective onset. This value can be evaluated and is of the order of a few hundreds. When Ra reaches it then the mode of lower order ($n = 1$) becomes convective with a characteristic horizontal length scale $2\pi/k_c^{(1)}$.

We now have the correct framework to determine the regime of stellar convection. A critical aspect concerns the characteristic length scales involved in stellar physics. In an experimental setting, it is natural to consider the distance between the two plates that limit the apparatus as d . In stars however one might often choose the pressure scale height $H_p = -Pdr/dP$, which is often considerably smaller than the extent of the convective zone. For instance the solar external convective envelope is approximately 2×10^5 km wide, while the pressure scale height is of the order of a few hundreds of kilometres (which is still remarkably large with respect to the lengths involved in any experimental setting). To fix ideas, we will keep discussing the solar case. Gravity in the envelop can be computed by taking its average radius and assuming that the entire mass of the Sun is distributed below it, which gives $g \sim 10^2$ m/s². The compressibility factor can be approximated as $\alpha \approx 1/T$ (a dimensional constant of order unity would be necessary) and is thus of the order of $10^{-4} - 10^{-6}$ for temperatures characteristic of the solar convective envelope. The temperature difference over d is of the order of a few thousand °K. Finally the viscosity and heat conductivity coefficients require some more detailed calculations to be evaluated. Here suffice to say that they are of the order $\nu \approx 10^{-1}$ m²/s and $\kappa \approx 10^8$ m²/s. These numerical values allow us to estimate a Rayleigh number for the solar outer convective envelope of the order of 10^{11} . This is vastly greater than the critical Rayleigh number.

The important thing to understand is that the Rayleigh number is not only a criterion for stel-

valutare l'insacco dell'instabilità nelle stelle, ma è anche un quantificatore del grado di instabilità del fluido. Infatti, non solo indica quando una certa perturbazione diventa instabile, ma anche come lo diventano molte perturbazioni, e caratterizza la parte immaginaria delle loro pulsazioni, e la dipendenza temporale delle loro ampiezze dipenderà, pertanto, da Ra .

In più, possiamo anche prendere in considerazione il numero di Prandtl, che è definito da $Pr = \nu/\kappa$. Esso misura l'efficienza relativa dei processi di diffusione della quantità di moto e del calore. Ovviamente è alquanto piccolo nelle zone convettive stellari. Ciò significa che, anche se la convezione è il processo dominante, sarà più efficiente nel trasportare quantità di moto che calore, perché per quest'ultimo la diffusione compete assai meglio contro la convezione. Per citare Edward Spiegel: "La convezione a basso numero di Prandtl ha moti assai più vivaci di quella ad alto numero di Prandtl, ed è meno efficace nel trasportare il calore".

Quest'ultima osservazione ci permette di trarre una conclusione molto importante riguardo alla convezione stellare: essa è turbolenta. Le modalità di transizione alla turbolenza di fluidi molto instabili è un problema a sé stante, e non è il caso di affrontarlo in questa sede. Semplicemente faremo un richiamo all'intuito del lettore dicendo che quando molte perturbazioni sono eccitate a varie scale di lunghezza il grado di organizzazione del fluido verosimilmente risulterà essere considerevolmente ridotto. Ad ogni istante nel tempo, ogni elemento di fluido è soggetto a campi di velocità generati dalle molte perturbazioni convettive cresciute oltre il regime lineare. Il problema di identificare degli schemi deterministici di moto del fluido diventa allora intrattabile. Per la convezione stellare prendiamo in considerazione una descrizione di base, e dovremo formulare delle ipotesi aggiuntive, come vedremo nella sezione successiva.

Abbiamo appurato che la convezione stellare produce un flusso turbolento che trasporta in modo efficiente la quantità di moto. Ciò ha risvolti positivi e negativi. Cominciamo da questi ultimi. Idealmente si vorrebbe poter far ricorso a principi di similarità e riprodurre in laboratorio una convezione di tipo stellare. Ciò costituirebbe la prova cruciale per la teoria della

lar instability onset but also an marker of the degree of instability of the flow. Indeed it does not simply indicate when a given mode becomes unstable, but how many modes do and it does characterize the imaginary part of their pulsations, and their time-dependent amplitude will thus depend on Ra .

What is more, we can also consider the Prandtl number which is given by $Pr = \nu/\kappa$. It measures the relative efficiency of the momentum and heat diffusion process. Obviously it is very low in stellar convective zone. This means that even if convection is the dominating process, it will be more efficient at transporting momentum than heat, because for this later, diffusion will compete rather more significantly against convection. To quote Edward Spiegel: "Low-Prandtl number convection has much more lively motions than high-Prandtl number convection and is less effective at transporting heat".

This final remark allows us to draw a very important conclusion on stellar convection: it is turbulent. How highly unstable flows transit to turbulence is a problem in itself and we do not wish to discuss it here. We will simply call to the intuition of the reader by saying that when many unstable convective modes are excited at various length scales, the degree of organization of the fluid is likely to become considerably reduced. At each instant in time, each fluid element is subject to velocity fields issued from many convective modes having grown outside of the linear regime. The problem of identifying a deterministic flow pattern then becomes intractable. It is the basic picture we assume for stellar convection, although more assumptions shall be made, as will be discussed in next section.

We have established that stellar convection is a turbulent flow transporting efficiently momentum. This is a good thing and a bad thing. Let us start with the latter. Ideally one would like to invoke similarity principles and reproduce stellar-like convection in laboratory. This would be the ultimate test for stellar convection theory. However, in the foreseeable future, this is not to

convezione stellare. Tuttavia, nel futuro prevedibile, ciò non sarà possibile. Il problema non è tanto il grande numero di Rayleigh: esistono esperimenti che hanno raggiunto numeri ancor più alti. Alcuni esperimenti sono riusciti a raggiungere $Ra \sim 5 \times 10^{12}$ usando ioni di Cu in una soluzione di $CuSO_4$. Ma in tal caso il numero di Prandtl è 2750. Esperimenti ad alto numero di Rayleigh sono stati condotti usando elio, con $Ra \in [10^7, 10^{13}]$ e numeri di Prandtl dell'ordine di 1. Il problema, in effetti, è che non ostante l'alto valore di κ che caratterizza il mezzo stellare, è possibile raggiungere regimi ad alto numero di Rayleigh grazie alle grandi lunghezze coinvolte nella convezione stellare. Se consideriamo che gli apparati per la convezione di Rayleigh-Bénard hanno lunghezze tipiche dell'ordine di 1 m, sulla base di sole considerazioni geometriche, c'è un fattore mancante di $\sim 10^{15}$ per poter riprodurre sperimentalmente le condizioni di un interno stellare.

Il problema risiede principalmente nel numero di Prandtl molto piccolo, che non può essere riprodotto in laboratorio. Di solito esperimenti ad alto numero di Rayleigh sono condotti con numeri di Prandtl $\gtrsim 1$. Per fissare le idee, $Pr \gg 1$ per l'olio di silicone, $Pr \sim 7$ per l'acqua, $Pr \sim 0.7$ per l'aria, $Pr \sim 0.025$ per il mercurio e $Pr \sim 0.005$ per il sodio liquido. Pertanto ordini di grandezza ci separano dall'aver fluidi che possano descrivere accuratamente la convezione stellare. Al più i risultati sperimentali possono essere usati per mettere alla prova dei casi limite della teoria.

Avevamo annunciato delle notizie positive, ed eccone una. Non ostante si debba lavorare con flussi molto turbolenti che non possono essere modellati in modo del tutto appropriato da equazioni scritte in forma chiusa, esiste un modello semi-empirico che fornisce previsioni ragionevoli. Fu sviluppato per la modellizzazione dei flussi turbolenti ed è stato successivamente adattato al caso della convezione stellare, permettendo di riprodurre accuratamente molti aspetti della fisica solare e stellare. Ne parleremo ora in dettaglio, al fine di completare il nostro quadro teorico.

Il modello della lunghezza di mescolamento

Le poche caratteristiche della turbolenza che abbiamo più sopra descritto hanno già mostrato

be. The problem is not so much the high Rayleigh number: there exist experiments that can reach even higher values of Ra . Some experiments have managed to attain $Ra \sim 5 \times 10^{12}$ using Cu ions in a $CuSO_4$ solution. But in that case the Prandtl number is 2750. High-Rayleigh number experiments have been performed using helium, with $Ra \in [10^7, 10^{13}]$ and Prandtl numbers of the order of 1. The issue in fact is that even with the high value of κ characterizing the stellar medium, it is possible to achieve high-Reynolds number regimes because of the length scales involved in stellar convection. If we consider that apparatus for Rayleigh-Bénard convection have typical lengths of the order of 1 m, based only on geometric considerations, there is a factor $\sim 10^{15}$ that has to be accounted for if one wishes to reproduce experimentally the conditions of stellar interiors.

The issue is thus mostly with the very low Prandtl number, which cannot be reproduced in laboratory. Usually high-Rayleigh number experiments are performed at Prandtl numbers $\gtrsim 1$. To fix ideas, $Pr \gg 1$ for silicon oils, $Pr \sim 7$ for water, $Pr \sim 0.7$ for air, $Pr \sim 0.025$ for mercury and $Pr \sim 0.005$ for liquid sodium. We are thus orders of magnitude away from flows that could describe accurately stellar convection. At best experimental results can be used to test limiting cases of the theory.

We promised some good news, and there is one. In spite of having to deal with a very turbulent flow that no closed-form system of equations can properly model, and that cannot be reproduced experimentally, there exists a semi-empirical model that gives reasonable predictions. It has been developed for the modelling of other turbulent flows and was later ported to the case of stellar convection and allowed to reproduce accurately many features of solar and stellar physics. We shall now detail it with more care in order to complete our theoretical picture.

The mixing-length model

The few characteristics of turbulence we described above might have already indicated that it is a

Le Equazioni di Reynolds

Non è facile trasmettere il concetto di problema della chiusura senza usare la notazione tecnica ed al tempo stesso senza apparire astratto. Quindi mostriamo la procedura di base che porta ad esso.

Innanzitutto ricordiamo che l'evoluzione di un campo scalare passivo θ in un flusso con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ è descritta da

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \chi \theta, \quad (2)$$

con $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ e $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Facciamo anche l'ipotesi che il fluido sia incomprimibile^a, cioè $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Separeremo le variabili che descrivono il fluido in una componente media e deterministica $\bar{\theta}$, ed una componente fluttuante a media nulla $\bar{\mathbf{v}}' = 0$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \bar{\theta}(\mathbf{r}, t) + \theta'(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Sostituendo questa formalizzazione in (2) e mediando, otteniamo l'equazione di Reynolds

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\theta} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'} = \chi \bar{\theta}.$$

a cui si aggiunge l'equazione di continuità mediata per un fluido incomprimibile.

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Diventa immediatamente chiaro che abbiamo quattro equazioni (una per ciascuna componente del campo di velocità, più l'equazione di continuità), e cinque variabili: $\bar{\theta}$, \bar{v}_x , \bar{v}_y , \bar{v}_z e $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'}$. Quest'ultimo termine può essere riscritto come $\nabla \cdot \overline{\theta' \mathbf{v}'}$ usando $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$. Poiché il fluido è incomprimibile, possiamo moltiplicare l'equazione per la densità ρ , il che porta ad una equazione per la divergenza del flusso $\mathbf{j} = \rho \overline{\theta' \mathbf{v}'}$, una quantità chiamata flusso turbolento di θ .

^aGrossolanamente, supporremo che questo sia il caso che stiamo trattando. In realtà questa approssimazione non è appropriata per la convezione stellare. Tuttavia è sufficiente per una prima introduzione a questi concetti chiave.

Reynolds Equations

It is not simple to convey the idea of the closure problem while discarding technical notations and at the same time not sounding abstract. We show the basic procedure leading to it.

First let us recall that the evolution of a passive scalar θ in a flow with velocity $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ is given by

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \chi \theta, \quad (2)$$

with $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ and $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. It is also assumed that the fluid is incompressible^a, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

We consider that the fluid variables are made of a mean, deterministic, component $\bar{\theta}$ and a fluctuating part of mean $\bar{\mathbf{v}}' = 0$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \bar{\theta}(\mathbf{r}, t) + \theta'(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Injecting this formulation in (2) and taking the average, we obtain the Reynolds equation

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\theta} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'} = \chi \bar{\theta}.$$

It is supplemented by the average continuity equation for an incompressible fluid

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

We see right away that we have four equations (one per velocity component plus the continuity equation) and five variables: $\bar{\theta}$, \bar{v}_x , \bar{v}_y , \bar{v}_z and $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'}$. This latter term can be rewritten as $\nabla \cdot \overline{\theta' \mathbf{v}'}$ using $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$. The fluid being incompressible we can multiply the equation by the density ρ , which leads to an equation for the divergence of the flux $\mathbf{j} = \rho \overline{\theta' \mathbf{v}'}$, which is called the turbulent flux for θ .

^aWhich we will loosely assume is the situation we are dealing with. This approximation is however not true for stellar convection. It suffices though at first for conveying key ideas.

che essa pone un problema particolare nell'ambi-

particular problem within fluid dynamics. In

to della meccanica dei fluidi. Nei regimi laminari si può sperare che, tramite ipotesi opportune ed una buona scelta delle condizioni al bordo, o anche con integrazioni numeriche delle equazioni di Navier-Stokes, possa essere possibile ottenere i campi di velocità che descrivono il flusso ad ogni istante t e punto r . Al contrario, quando il fluido diventa turbolento, questa speranza cade. Infatti, una descrizione della turbolenza di semplicità adeguata per i nostri scopi postula che essa sia uno stato in cui a ciascuno punto r e ciascun tempo t la velocità $v(r, t)$ del fluido sia una realizzazione di una variabile casuale. Ciò rivela immediatamente che possiamo parlare dei fluidi turbolenti solo tramite le loro proprietà statistiche, ad esempio considerando i valori medi delle loro variabili dinamiche. Ciò sarà infatti il punto di partenza nella descrizione del nostro modello di stella. Per cominciare è necessario comprendere che operare delle medie usando le equazioni della meccanica dei fluidi presenta alcune difficoltà tecniche. Un importante problema è quello della chiusura delle equazioni di Navier-Stokes mediate.

Una volta chiarito che le equazioni mediate costituiscono un problema intrattabile, il passo successivo è quello di cercare una forma funzionale accettabile per il flusso turbolento $\rho\overline{\theta'v'}$. Nel nostro caso siamo interessati al flusso turbolento di energia, cioè $\theta = c_P T$, e quindi, ipotizzando che il calore specifico a pressione costante c_P sia costante, desideriamo valutare $j = \rho c_P \overline{T'v'}$.

Un procedimento semplice consiste nell'usare la cosiddetta approssimazione di lunghezza di mescolamento. Il quadro generale fu suggerito da Prandtl nel 1925 e successivamente adattato alla convezione stellare da Biermann (1932, 1937, 1942) e, nella sua forma più usata, da Böhm-Vitense (1958). Sottolineiamo che, per semplicità, ometteremo la maggior parte dei fattori numerici. Si tratta di fattori dimensionali il cui valore generalmente è vicino all'unità. Essi possono differire tra una formulazione e un'altra della teoria, ma le caratteristiche generali rimangono le stesse. Questa approssimazione postula che un flusso turbolento sia composto da elementi di fluido che si spostano per una distanza media ℓ prima di dissolversi, rilasciando la loro energia nell'ambiente circostante. Questa lunghezza media è chiamata lunghezza di mescolamento.

laminar regimes, one can hope that, using adequate assumptions and proper boundary conditions, or even by numerical integration of the Navier-Stokes equations, it may be possible to obtain velocity fields describing the flow at each instant t and point r . On the opposite, when the fluid becomes turbulent, there is no such hope. In fact a simple enough definition of turbulence for our purposes postulates that it is a state in which at each point r and each time t the velocity $v(r, t)$ of the fluid is a realization of a random variable. One can see immediately that we can only approach turbulent flows through their statistical properties, for instance by considering average values of its dynamical variables. This will indeed be the starting point of the description of our stellar model. To begin with, we need to understand that averaging of the equations of fluid dynamics some technical issues. An important problem is the closure of the averaged Navier-Stokes equations (see Box p. 71).

Once it is understood that the averaged equations form an intractable problem, the next stage is to look for an acceptable functional form for the turbulent flux $\rho\overline{\theta'v'}$. In our case we are naturally interested in the energy turbulent flux, i.e. $\theta = c_P T$, and thus, assuming a constant specific heat at constant pressure, c_P , we want to evaluate $j = \rho c_P \overline{T'v'}$.

A simple procedure is to use the so-called mixing-length approximation. The general picture suggested by Prandtl in 1925 and later adapted to stellar convection by Biermann (1932, 1937, 1942) and, in its most widely used form, Böhm-Vitense (1958). Note that for the sake of simplicity we will omit most numerical factors. These dimensional factors are usually of the order unity or so. They may differ from one formulation of the mixing-length theory to the other without changing its general features. This approximation postulates that the turbulent flow is made of fluid elements that travel an average distance ℓ before dissolving and releasing their energy to their surroundings. This average length is called the mixing length. The elements are usually considered as roughly spherical¹ of average radius $\sim \ell/2$.

¹Spherical blobs are often considered in calculations accounting for radiative losses during the element displacement

Gli elementi di fluido possono essere immaginati con una forma vagamente sferica¹ con raggio medio $\sim \ell/2$.

Prendiamo in considerazione una zona convettiva stratificata verticalmente. Nel punto z , in ogni istante di tempo, le particelle che si spostano verso il basso e che arrivano da $z_0 > z$ o che si spostano verso l'alto ed arrivano da $z_0 < z$ contribuiranno a formare il valore di $T(z)$. Poiché, in media, una particella viaggerà per una distanza ℓ prima di dissolversi, possiamo ipotizzare che al tempo t l'elemento che si dissolve nel punto z sarà partito da una altezza z_0 tale che $0 \leq |z_0 - z| \leq \ell$. Pertanto, in media, una goccia di fluido che si dissolve in z avrà viaggiato per una distanza $\sim \ell/2$. Possiamo ora includere questo contributo nella fluttuazione di temperatura nell'Eq. (3). Se l'elemento soggetto a convezione ha una temperatura iniziale $T_e(z \pm \ell, t)$ uguale a quella dell'ambiente circostante, cioè $T_e(z \pm \ell, t) = \bar{T}(z \pm \ell)$, possiamo scrivere la temperatura dell'elemento in z

$$T_e(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2).$$

Si noti che abbiamo qui ipotizzato che il gradiente di temperatura dell'elemento abbia una dipendenza dal tempo. Possiamo anche scrivere lo sviluppo di Taylor per la temperatura media²

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2).$$

Usando lo sviluppo di sopra, possiamo scrivere

$$T'(z) = \frac{l}{2} \left(\frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2) \right).$$

Data l'ipotesi sul gradiente di temperatura dell'elemento, è ovvio che la fluttuazione di temperatura sia indipendente dal tempo. Ma c'è un'altra importante conseguenza. Osserviamo che i gradienti sono valutati in $z - \ell/2$, anche se stiamo prendendo in considerazione la fluttuazione di temperatura in z . Questo problema può essere risolto se ipotizziamo che la differenza dei gradienti di temperatura sia costante su

¹Gocce sferiche sono spesso prese in considerazione per calcolare le perdite radiative nel corso degli spostamenti degli elementi di fluido.

²Questa spiegazione segue da vicino [6].

Let us consider a vertically stratified convective zone. At any time at point z , particles moving downwards and originating at $z_0 > z$ or travelling upwards and originating at $z_0 < z$ will contribute to $T(z)$. Since a particle will travel on average a distance ℓ before dissolving, we can assume that at time t the element dissolving at z will have originate at an altitude z_0 such that $0 \leq |z_0 - z| \leq \ell$. Therefore, on average, a blob dissolving at z will have travelled a distance $\sim \ell/2$. We can now consider this contribution to be the temperature fluctuation in Eq. (3). Making the assumption that the convective element has an initial temperature, $T_e(z \pm \ell, t)$, equal to its surroundings, i.e. $T_e(z \pm \ell, t) = \bar{T}(z \pm \ell)$, we can write the element temperature at z

$$T_e(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2).$$

Note that we have assumed here that the temperature gradient of the element is time-independent. We can also write down the Taylor expansion for the mean temperature²

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2).$$

Using the above expansions, we can write

$$T'(z) = \frac{l}{2} \left(\frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2) \right).$$

Given the assumption on the temperature gradient of the element, it is obvious that the temperature fluctuation is time independent. But there is another important consequence, we see that the gradients are evaluated at $z - \ell/2$, even though we are considering the temperature fluctuation at z . This problem can be solved if we assume that the temperature gradient difference is constant over a mixing-length. This is a very serious assumption, since it implies that a mixing-length theory in this form is a local one. On one hand this allows to compute the convective flux using local quantities. On the other hand, if one wants to lift this assumption, it requires to a non-local convection theory which, as of today, does not

²This explanation follows closely [6].

distanze pari a quella della lunghezza di mescolamento. Questa è una ipotesi molto restrittiva, perché implica che una teoria della lunghezza di mescolamento in questa forma sia una teoria locale. Da un lato ci permette di calcolare il flusso convettivo usando solo quantità locali. Dall'altro, se non la si accetta, diventa necessario una teoria non-locale della convezione che, ad oggi, non esiste. Ritornando al flusso turbolento, la sua componente lungo l'asse z diventa

$$j_z = c_P \rho \ell v'_z \frac{l}{2} \left(\frac{dT_e}{dz}(z) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z) \right) \quad (4)$$

$$= |\mathbf{F}_{\text{conv}}|. \quad (5)$$

Il flusso dipende dalla velocità dell'elemento soggetto a convezione³, che deve essere determinata dalla dinamica del problema. Usando il teorema dell'energia cinetica, ed eguagliando la variazione di energia della goccia che si sposta da $z \pm \ell$ a z con il lavoro della forza di Archimede, si arriva a $v \propto \sqrt{\ell \rho' / \bar{\rho}}$. Usando le relazioni $\rho' / \bar{\rho} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) T' / \bar{T}$ e $T' \propto (\nabla - \nabla_e)$ possiamo scrivere il contrasto di densità in funzione delle variabili termodinamiche che ci interessano: $\nabla, \nabla_e, T, \rho$. È da notare che i gradienti ∇ e ∇_e sono in relazione con il gradiente spaziale della temperatura media tramite la scala di altezza di pressione,

$$H_P = -P dz / dP.$$

Con alcuni agevoli calcoli si ottiene

$$|\mathbf{F}_{\text{conv}}| \propto T \rho (\nabla - \nabla_e)^{3/2} \ell^2.$$

Dato il flusso, possiamo identificare alcuni casi limite per la convezione. Se ℓ fosse piccolo, allora il gradiente ∇ aumenterebbe⁴ fino al punto da raggiungere la condizione di stabilità marginale $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$. La convezione, pertanto, diventerebbe inefficiente, e l'energia tornerebbe ad essere trasportata dalla radiazione⁵. Intuitivamente, se

³Di fatto, la media del prodotto va rimpiazzata da una sorta di prodotto delle medie. Per farlo si usano coefficienti numerici inferiori all'unità, ma questa, in ogni caso, è una limitazione del metodo.

⁴Si potrebbe arguire che ∇_e possa decrescere. Tuttavia, se ℓ diminuisce le strutture convettive che trasportano energia dovrebbero diventare più piccole e quindi perdere più energia a causa della radiazione, il che contraddirebbe il fatto che ∇_e si avvicina a ∇_{ad} .

⁵Si noti che ciò non vuol dire che il mezzo è dinamica-

exists. Turning back to the turbulent flux, its component along the z -axis becomes

$$j_z = c_P \rho \ell v'_z \frac{l}{2} \left(\frac{dT_e}{dz}(z) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z) \right) \quad (4)$$

$$= |\mathbf{F}_{\text{conv}}|. \quad (5)$$

The flux depend on the velocity of the convective element³, which has to be determined from the dynamics of the problem. We can invoke the kinetic energy theorem and equate the variation of energy of the blob from $z \pm \ell$ to z with the work of the buoyancy forces, which leads to $v \propto \sqrt{\ell \rho' / \bar{\rho}}$. Using the relation $\rho' / \bar{\rho} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) T' / \bar{T}$ and $T' \propto (\nabla - \nabla_e)$ we can expressed the density contrast in term of the thermodynamical variables of interest $\nabla, \nabla_e, T, \rho$. Note that the gradients ∇ and ∇_e are related to the spatial gradient of the mean temperature through the pressure-scale height,

$$H_P = -P dz / dP.$$

After some straightforward calculations we find

$$|\mathbf{F}_{\text{conv}}| \propto T \rho (\nabla - \nabla_e)^{3/2} \ell^2.$$

For a given flux we can identify limiting cases for convection. If ℓ is small then the gradient ∇ will increase⁴ up to the point it reaches the marginal stability condition $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$. Convection will then be inefficient and energy once more will be transported by radiation⁵. Intuitively, if ℓ is

³Actually, the average of the product has to be replaced somehow by product of averages. Numerical coefficient of the order of unity or less to achieve this, but this nevertheless is a limitation of the method.

⁴One could argue that ∇_e can also decrease. However, with ℓ becoming smaller, convective structure carrying energy should become smaller and thus loose more energy due to radiation, which would be in contradiction with the fact that ∇_e becomes closer to ∇_{ad} .

⁵Note that this does not mean that the medium is dynamically stable with respect to Schwarzschild criterion, but rather that the convective regime is not adequate to ef-

ℓ è una misura dell'efficienza della convezione, allora deve tendere a zero quando il trasporto è radiativo. All'opposto, se ℓ è molto grande, allora $\nabla \rightarrow \nabla_e$ e l'efficienza della convezione è determinata dal suo scostamento dal gradiente adiabatico, cioè dalla capacità dell'elemento convettivo di mantenere la sua identità termica su distanze dell'ordine di ℓ .

Dobbiamo menzionare due relazioni aggiuntive tra i gradienti di temperatura. La prima è ottenuta osservando che la differenza tra il gradiente di temperatura di un elemento e quello adiabatico è pari alle perdite radiative dell'elemento. Riportiamo il risultato senza fare calcoli, ma è sufficiente sapere che, con opportune ipotesi sulla radiazione dell'elemento di fluido (v. p.es. [2, § 6]) si ottiene $\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla - \nabla_e)$.

Possiamo anche porre in relazione le differenze tra il gradiente di temperatura ambiente e, rispettivamente, il gradiente di temperatura dell'elemento di fluido e quello radiativo. Questo è un modo per valutare quanto uno strato è vicino ad un regime di trasporto radiativo. Per far ciò definiamo il gradiente radiativo come il gradiente di temperatura necessario a trasportare tutta l'energia attraverso uno strato dell'interno stellare, ovvero $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| + |\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla_{\text{rad}}$. Se $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$, allora otteniamo l'Eq. (1). Altrimenti, il flusso radiativo è $|\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla$, con $\nabla_{\text{rad}} - \nabla < 0$. Usando l'espressione per il flusso convettivo (4), otteniamo $(\nabla - \nabla_e)^{3/2} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla)$.

Queste relazioni svelano tre importanti caratteristiche della convezione stellare. Data una certa lunghezza di mescolamento, se la densità e l'opacità diventano grandi, allora la seconda relazione ci dà $\nabla \rightarrow \nabla_e$ e la prima $\nabla_e \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$. Di conseguenza abbiamo $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$. Perciò possiamo porre $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ come gradiente di temperatura nell'interno stellare per ogni fine pratico. D'altra parte, se la densità o l'opacità fossero molto piccole, poiché i gradienti e le loro differenze devono rimanere finiti, siamo ricondotti al limite $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{rad}}$, il che significa che possiamo porre

mente stabile rispetto al criterio di Schwarzschild, ma piuttosto che il regime convettivo non è adeguato a trasportare efficientemente l'energia. In uno strato convettivamente instabile, abbiamo $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$. Nel caso in esame la disuguaglianza più a sinistra non è più soddisfatta.

a measure of the efficiency of convection, then it shall tend to 0 when the transfer is radiative. On the opposite if ℓ is very large then $\nabla \rightarrow \nabla_e$ and the efficiency of convection is determined by its departure from the adiabatic gradient, i.e. on the capacity of the convective element to retain its thermal identity over a distance of order ℓ .

We should mention two additional relations between temperature gradients. The first one is obtained by considering the departure of the temperature element gradient from the adiabatic one is explained by the radiative losses of the element. We give the result without calculation, but suffices to know that, using appropriate assumptions on the radiation of the fluid element (see e.g., Kippenhahn § 6), one finds $\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla - \nabla_e)$.

We may also relate the departures of the background temperature gradient from, respectively, the element temperature gradient and the radiative gradient. This is a way to assess how close a layer is to the radiative transport regime. In order to do so, we define the radiative gradient as the temperature gradient necessary to transport all the energy in a layer of the stellar interior, that is $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| + |\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla_{\text{rad}}$. If $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$, then we have Eq. (1). Otherwise, the radiative flux is $|\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla$, with $\nabla_{\text{rad}} - \nabla < 0$. Using the expression for the convective flux (4), we find $(\nabla - \nabla_e)^{3/2} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla)$.

These relations actually unveil three important features of stellar convection. For a given mixing-length, when density and opacity become large, then the second relation gives $\nabla \rightarrow \nabla_e$ and the first $\nabla_e \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$. Consequently, we have $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$. We can thus set $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ as the temperature gradient in the stellar interior for any practical purpose. If, on the other hand, density or opacity become very low, since the gradients and their differences must remain finite, we are in the limit $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{rad}}$, which means that we can set $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ in our calculations.

ficiently transport energy. In a convectively unstable layer, we have $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$. In the case at hand, it is the leftmost inequality that is not fulfilled anymore.

$\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ nei nostri calcoli.

Questi sono casi limite. Nei casi intermedi ∇_e può essere significativamente maggiore di ∇_{ad} . Questo è chiamato il regime superadiabatico. In questo caso bisogna risolvere le equazioni per $|\mathbf{F}_{\text{conv}}|$, $|\mathbf{F}_{\text{rad}}|$, v , ∇_e and ∇ . Indipendentemente dal caso in considerazione, è possibile utilizzare il gradiente di temperatura ∇ che si ottiene dai calcoli in una equazione per il trasporto di energia avente la forma $\partial T/\partial m \propto \nabla$, che è poi risolta per ottenere la stratificazione di temperatura della stella.

Identifichiamo tre casi, di cui due non richiedono l'uso della approssimazione di lunghezza di mescolamento, e cioè quando $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ e $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$, poiché entrambi i gradienti possono essere calcolati direttamente dalle variabili termodinamiche⁶. Il caso superadiabatico è più problematico, e richiede di essere valutato con attenzione, a causa delle limitazioni della teoria della lunghezza di mescolamento. Alcune di esse derivano dal fatto che abbiamo introdotto un nuovo parametro, ℓ , che deve in qualche modo essere collegato ad una scala di lunghezza caratteristica della convezione stellare. Il problema è che abbiamo a che fare con convezione libera e non esistono vincoli esterni che possano imporre una scala caratteristica. Come regola generale, la lunghezza di mescolamento va presa come proporzionale a tale scala di lunghezza caratteristica, ℓ_c : $\ell = \Lambda \ell_c$. In un ambito sperimentale, ℓ_c è spesso identificata come la distanza dal bordo del contenitore del fluido. Per la convezione libera di solito si preferisce considerare la scala d'altezza della pressione o della densità (definita in modo analogo ad H_p). In alcuni casi si adotta il minimo tra la distanza dal bordo più vicino e la scala d'altezza. Ovviamente, come detto prima, la convezione può eccitare diverse perturbazioni e questo implica che la teoria della lunghezza di mescolamento, che considera una singola scala di lunghezza per descrivere il mescolamento turbolento, è necessariamente riduttiva. Di solito, la scelta più comune è H_p come scala di lunghezza di riferimento, per convenienza di calcolo o per facilità di argomentazione. Ad oggi non c'è un fermo supporto teorico a favore di questa scelta.

These are limit cases. In between, ∇_e can be significantly larger than ∇_{ad} . This is called the superadiabatic regime. In this case one has to solve the equations for $|\mathbf{F}_{\text{conv}}|$, $|\mathbf{F}_{\text{rad}}|$, v , ∇_e and ∇ . Regardless of the case under consideration, it is possible to inject the resulting temperature gradient ∇ into a transport equation for energy of the form $\partial T/\partial m \propto \nabla$, which is then integrated to evaluate the temperature stratification of the star.

We identified three cases, of which two do not require the use of the mixing-length, namely when $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ and $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$, since both gradients can be computed directly from thermodynamical variables⁶. The superadiabatic case is more problematic and demands for the shortcomings of the mixing-length theory to be assessed. Some come from the fact that we have introduced a new parameter, ℓ , that has to be related somehow to a characteristic length scale of stellar convection. The issue is that we are dealing with free convection and no exterior constraint can impose a characteristic scale. As a general rule the mixing length will be taken as proportional to that characteristic length scale, ℓ_c , $\ell = \Lambda \ell_c$. In experimental settings, ℓ_c is often taken as the minimum distance to a boundary. For free convection one usually prefers to consider the scale heights for pressure or density (defined in a similar fashion as H_p). In some cases the minimum between the distance to the nearest boundary and a scale height is adopted. Of course, as we discussed earlier, convection may excite several modes and this implies that a mixing-length theory, by considering a single length scale to account for turbulent mixing is necessarily reductive. Usually the most popular choice is H_p as the reference characteristic length, by computational convenience or thank to rule-of-thumb arguments. There is, as of today, no theoretical ground for such a choice.

⁶ ∇_{rad} si ottiene dall'equazione (1) nel caso $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$. Il gradiente adiabatico si ottiene da $\nabla_{\text{rad}} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) P(T \rho c_p)^{-1}$

⁶ ∇_{rad} is given by equation (1) in the case $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$. The adiabatic gradient is given by $\nabla_{\text{rad}} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) P(T \rho c_p)^{-1}$

L'uso comune è quello di stimare il coefficiente di proporzionalità usando i dati delle osservazioni. In questa sede non abbiamo lo scopo di discutere tutti i possibili modi di vincolare Λ con i dati. Tipicamente si tratta di parametri atmosferici (la temperatura effettiva, la gravità alla superficie e la metallicità), il raggio, la luminosità, le frequenze di oscillazione stellare (modi propri di oscillazione di una stella osservati con una tecnica nota come astrosismologia). Essi devono essere riprodotti usando dei codici di evoluzione stellare, che hanno Λ fra i loro parametri di ingresso. La conseguente messa a punto del codice fornisce la lunghezza di mescolamento. È sufficiente dire che queste stime danno uniformemente un valore per Λ di circa 1. Questo è ragionevole se ci si aspetta che una eccessiva piccolezza di ℓ implichi un incremento delle perdite radiative a causa della decrescita del rapporto volume-superficie di un elemento di fluido di grandezza pari a ℓ . D'altro canto, sarebbe difficile per un elemento di fluido rimanere immutato lungo una distanza ℓ se quest'ultima è troppo grande. Nuovamente sottolineiamo che queste argomentazioni non sgorgano da principi fisici, e sono semplicemente dei modi per controllare la consistenza di ragionamenti basati sul senso comune. Dobbiamo anche aggiungere che essi rivelano un aspetto paradossale della teoria della lunghezza di mescolamento.

Una ipotesi importante è stata infatti posta in modo implicito, e cioè che solo le fluttuazioni di temperatura influenzino la densità. Ciò, ad esempio, ci ha permesso di trattare il fluido come se fosse incomprimibile nelle equazioni di Reynolds, pur continuando a collegare la densità al contrasto di temperatura degli elementi convettivi. Si tratta dell'approssimazione di Boussinesq. L'idea alla sua base è che quando l'accelerazione dovuta alla gravità è molto più grande del termine $\partial v/\partial t + v \cdot \nabla v$ le piccole fluttuazioni di densità (nel nostro caso indotte da fluttuazioni di temperatura) possono avere un effetto importante solo sulla forza di Archimede, ed il loro effetto è per il resto trascurabile. Questa approssimazione richiede che le dimensioni spaziali prese in considerazione siano piccole rispetto alla lunghezza che caratterizza i movimenti del fluido. Ciò vuol dire che è necessario che sia $\Lambda \ll 1$, il che è falso, come abbiamo appena detto. Tut-

The common practice is to estimate the proportionality coefficient using observations. The purpose is not to review here all the possibilities to constrain Λ with data. Typically, these are atmospheric parameters (effective temperature, surface gravity and metallicity), radius, luminosity, stellar oscillation frequencies (proper pulsation modes of a star observed by a technique known as asteroseismology). They have to be reproduced using stellar evolution codes, which take Λ as an input parameter. It is the resulting tuning that give us estimates for the mixing length. Suffice to say that the estimates uniformly give values of order 1. This is a reasonable result if one expect ℓ not to be too small because the decreasing volume-to-surface ratio of the fluid element of characteristic size ℓ implies an increasing loss by radiation. On the other hand, it would be difficult for a convective element to remain unchanged on a distance ℓ if this latter is too large. Then again, these arguments are not rooted in physical principles, and are merely consistency checks based on common sense. We should add that they also reveal a paradoxical aspect of the mixing-length theory.

An important assumption was indeed made implicitly, namely that only temperature fluctuations would affect the density. This for instance allowed us to treat the fluid as incompressible in the Reynolds equations but still relate the density to the temperature contrasts of the convective elements. It is called the Boussinesq approximation. Its underlying idea is that if the acceleration due to gravity is much larger than the term $\partial v/\partial t + v \cdot \nabla v$ then small fluctuations of density (in our case those induced by temperature fluctuations) can have an important effect through the buoyancy force, while having a small impact otherwise. This approximation demands that the spatial dimensions considered are small with regard to the characteristic scale lengths of the flow. This means that one would expect $\Lambda \ll 1$, which is not the case as we just saw. However this shortcoming does not seem to be critical, in particular numerical simulations solving the full

tavia, questa difficoltà non sembra essere cruciale. In particolare, simulazioni numeriche che risolvono l'intero sistema di equazioni di Navier-Stokes sembrano indicare che la teoria di lunghezza di mescolamento non sia eccessivamente inaccurata.

Regioni convettive nelle stelle

Per concludere questa breve rassegna, desideriamo parlare brevemente di quando la convezione avviene nelle stelle. Ci concentreremo principalmente sulle stelle di sequenza principale, ovvero quelle che ancora bruciano idrogeno nel loro nucleo.

Cominciamo col caso più facile, quello in cui la convezione si sviluppa nel nucleo della stella. Questa situazione capita quando la produzione di energia in prossimità del centro diventa grande. Ciò tipicamente succede quando il ciclo CNO prende il sopravvento sulle catene pp nel processo di combustione dell'idrogeno. Il fattore critico è la dipendenza del tasso di produzione di energia nucleare, ϵ , dalla temperatura. Ipotizziamo che sia $\epsilon \propto T^\nu$. Il tasso di produzione di energia per il ciclo CNO è tale che $\nu \approx 19$, mentre abbiamo qualcosa dell'ordine di $\nu \approx 3.5 - 6$ per le catene pp. Quindi, quando il primo domina l'energia è generata in regioni assai più ristrette intorno al centro, come è imposto dal gradiente di temperatura locale. Dato un input di luminosità relativamnte simile, vediamo che il flusso di energia $|F| = l/4\pi r^2$ diventa molto più grande, ed altrettanto fa ∇_{rad} . Per questo motivo si innescano le instabilità. Semplici calcoli di ordini di grandezza mostrano che la densità è sufficientemente alta per raggiungere il limite adiabatico, cioè possiamo porre $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$.

Il caso degli involucri convettivi è più complesso. Questa è la situazione che si incontra nel Sole. Esaminiamola a partire dalla fotosfera⁷ andando in basso verso gli strati più profondi dell'interno stellare. I primi strati instabili che incontriamo sono dovuti all'aumento dell'opacità causato dalla ionizzazione delle componenti principali della mistura che forma il gas stellare, cioè H and He. Ciò aumenta di alcuni ordini di grandezza con la temperatura e conseguentemente aumenta ∇_{rad} .

⁷La fotosfera è tipicamente definita come il punto dove $T = T_{\text{eff}}$.

set of Navier-Stokes equations seem to indicate that the mixing-length theory is not too inaccurate.

Convective regions in stars

To close this short review, we would like to give an overview of when does convection occur in stars. We will mostly focus on main-sequence objects, i.e. those still burning hydrogen in their core.

Let us start with the easier case when convection develops in the core of stars. This situation occurs when the energy production near the centre becomes large. Typically this corresponds to the CNO cycle taking over the pp chains in the hydrogen-burning process. The critical factor is the dependence of the nuclear energy production rate, ϵ , on temperature. We assume that $\epsilon \propto T^\nu$. The energy production rate for CNO is such that $\nu \approx 19$, whereas it is of the order of $\nu \approx 3.5 - 6$ for pp chains. Therefore when the former dominates the energy is generated in much narrower regions around the centre, as imposed by the local temperature gradient. For relatively similar luminosity inputs, we see that the energy flux $|F| = l/4\pi r^2$ becomes much larger and so does ∇_{rad} . This is why convective instabilities set in. Simple order-of-magnitude calculations show that the density is high enough for the adiabatic limit to be attained, i.e. we can set $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$.

The case of convective envelopes is more complex. This is the situation encountered in the Sun. Let us examine it from the photosphere⁷ down to the deeper layers of the stellar interior. The first unstable layers we encounter are due to the rise in opacity caused by the ionization of the main components of the stellar gas mixture, i.e. H and He. It increases by several orders of magnitude with temperature and so does ∇_{rad} . At first, convection is very inefficient because of the

⁷The photosphere is usually defined as the point where $T = T_{\text{eff}}$.

Inizialmente la convezione è molto inefficiente a causa della bassa densità che si trova appena al di sotto della fotosfera. Pertanto ci troviamo nel regime superadiabatico. Più in basso nello strato convettivo la densità diventa sufficientemente alta per far divenire adiabatico il gradiente. A questo punto l'andamento di $P = P(T)$ è unicamente determinato da ∇_{ad} . Il fattore più importante è il grado di ionizzazione del gas stellare. Quando è parziale (cioè inferiore ad 1), il gradiente è relativamente basso (< 0.4) e raggiunge $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ quando il gas è completamente ionizzato (poiché si tratta ora di un puro gas monoatomico). La Fig. 2 mostra il profilo $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{ad}}(P)$ nel caso del Sole. Il limite di ionizzazione segna anche il punto in cui il regime di opacità transisce da legato-libero a libero-libero⁸. A questo punto κ comincia a decrescere all'aumentare di T , fino al punto in cui $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$, e l'interno stellare ritorna ad essere nuovamente stabile.

Il grosso della zona convettiva è quasi adiabatico, quindi la domanda è: qual è l'influenza dalla teoria della lunghezza di mescolamento? In effetti, il valore ottenuto per ∇ nella regione superadiabatica determina dove il profilo adiabatico incrocia il limite di alta ionizzazione. Pertanto, visto che $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ nelle regioni ad alta ionizzazione, ciò determina la profondità dell'intera zona convettiva. Poiché ∇ diminuisce all'aumentare di ℓ , e così Λ , si ottiene che, a parità di altri fattori, lo strato convettivo si inspessisce quando la convezione è più efficiente. Per fissare le idee, nel Sole la regione superadiabatica in cima alla zona convettiva rappresenta circa lo 0.05% del raggio totale, ovvero $\sim 3 \times 10^5$ m. D'altra parte, la parte adiabatica della zona convettiva esterna termina a circa il 73.1% del raggio solare, ovvero è profonda $\sim 187 \times 10^6$ m. È notevole che una regione che è circa lo 0.01% dell'intera zona convettiva stellare abbia una tale importanza nella descrizione dell'intera struttura stellare.

Infine, un effetto interessante è il fatto che il valore della temperatura effettiva determina anche la profondità della zona convettiva. Per capirlo dobbiamo concentrarci sulla regione a bassa ionizzazione. Innanzitutto ipotizziamo che le

very low density right below the photosphere. Thus we are in a superadiabatic regime. Deeper in the convective envelop, density becomes high enough for the gradient to become adiabatic. At this point, the behaviour of $P = P(T)$ is fully determined by ∇_{ad} . The most important factor is the degree of ionization of the stellar gas. When it is partial (i.e. lower than 1), the gradient is fairly low (< 0.4) and it reaches $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ when the gas is fully ionized (since it is now a purely monoatomic gas). The $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{ad}}(P)$ profile for the Sun can be seen in Fig. 2. The ionization limit also mark the point where the opacity regime transits from bound-free to free-free⁸. At this point κ starts to decrease with increasing T , down to a point where $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$, and the stellar interior becomes dynamically stable once more.

The bulk of the convective zone is quasi-adiabatic, therefore the question is how does the mixing-length theory affect it? In fact the value obtained for ∇ in the superadiabatic region will determine where the adiabat will cross the high ionization boundary. Subsequently, as $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ in high ionization regions, this sets the depth of the entire convective zone. Since ∇ decreases with increasing ℓ , and so Λ , it shows that everything otherwise equal, the convective envelop becomes broader when convection is more efficient. To fix ideas, in the Sun, the superadiabatic region at the top of the convective zone represent roughly the top 0.05% of the overall radius, i.e. $\sim 3 \times 10^5$ m. On the other hand the adiabatic part of the external convective zone stops at around 73.1% of the solar radius, i.e. $\sim 187 \times 10^6$ m deep. It is remarkable that a region that is roughly 0.01% of the entire stellar convective zone have such an importance on the overall description of the overall stellar structure.

Finally an interesting effect is that the value of the effective temperature also determines the depth of the convective zone. To understand this we have to focus on the low ionization region. First, let us assume that in the atmosphere

⁸In estrema semplicità, il primo coinvolge la ionizzazione di atomi neutri ed il secondo è legato all'interazione di uno ione ed un elettrone libero che formano un sistema che può assorbire e riemettere radiazione.

⁸To put it simply, the first one involves ionization of neutral atoms and the second is related to the interaction of an ion and a free electron that form a system that can absorb and emit radiation.

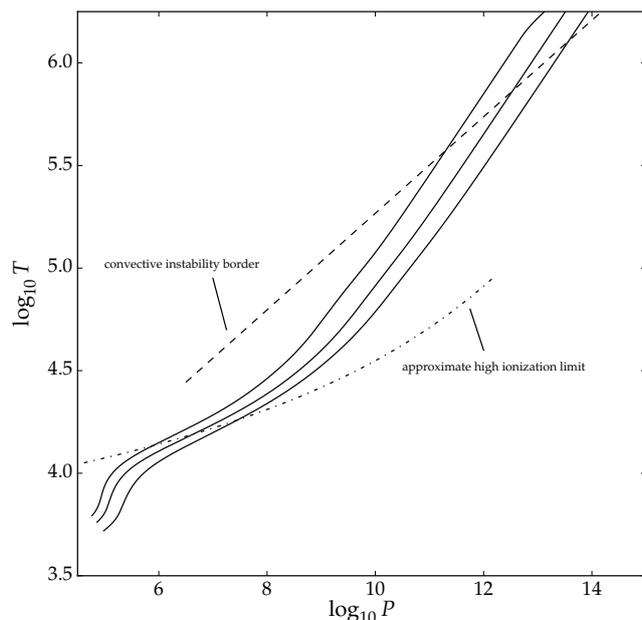


Figura 1: Rappresentazione schematica di alcune soluzioni per lo strato convettivo (linee continue) nel piano $P - T$. La linea tratteggiata e punteggiata indica la posizione approssimativa della regione di alta ionizzazione (v. anche Fig. 2) al di sopra della quale l'idrogeno e l'elio diventano completamente ionizzati. La linea tratteggiata mostra il confine approssimativo della regione dinamicamente instabile.

Schematic representation of a few solution for convective envelopes (solid lines) in the $P - T$ plane. The dot-dashed line marks the approximate location of the high ionization region (see also Fig. 2) above which hydrogen and helium become fully ionized. The dashed line shows the approximate border of the dynamically unstable region.

fluttuazioni di temperatura nell'atmosfera possono essere espresse da $\Delta T \simeq T_{\text{eff}} \Delta \tau$, dove τ è la profondità ottica (che è sostanzialmente il rapporto tra la radiazione incidente e quella trasmessa attraverso una qualche sostanza). Ipotizziamo, inoltre, che più è bassa la temperatura maggiore sia la quantità di sostanza (e quindi maggiore la profondità lineare) che si deve attraversare per raggiungere la medesima profondità ottica. Quindi, nel caso di un limite di alta ionizzazione come quello mostrato in Fig. 1, una temperatura inferiore a quella effettiva implica che una certa profondità (relativa ad un punto di partenza comune, detto $\tau = 0$) e quindi una certa temperatura saranno raggiunte ad una profondità fisica inferiore. Perciò la piena ionizzazione, e quindi il regime limite $\nabla_{\text{ad}} \rightarrow 0.4$, si verificheranno ad una pressione più alta. Da ciò scaturisce che la profondità della zona convettiva aumenta al diminuire della temperatura effettiva, come si vede dalle tre soluzioni per lo strato convettivo mostrate in Fig. 1. A basse temperature effettive si può raggiungere un limite in cui una stella diventa completamente convettiva, cioè dove questo effetto non permette al profilo adiabatico di raggiungere il punto del piano (P, T) in cui $\nabla \simeq \nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$. È da notare che il caso completamente convettivo è importante quando si studiano stelle di massa molto bassa ($M < 1M_{\odot}$) e stadi evolutivi avanzati delle stelle

temperature variations can be written $\Delta T \simeq T_{\text{eff}} \Delta \tau$, where τ is the optical depth (which is basically the ratio of incident to transmitted radiation power through some medium). Let us further assume that the lower the temperature the more material, and thus the larger linear depth, one needs to travel through to reach the same optical depth. Hence, for a high ionization limit behaving as seen in Fig. 1, a lower than effective temperature means that a given depth (relative to a equal starting point, say $\tau = 0$) and thus temperature will be attained at a lower physical depth. This means that full ionization, and hence the limit regime $\nabla_{\text{ad}} \rightarrow 0.4$, will occur at higher pressure. Hence the depth of the convective zone increasing with decreasing effective temperature as seen for the three convective envelope solutions of Fig. 1. A limit can be reached towards low effective temperatures, where the star becomes fully convective, i.e. when this effect does not allow the adiabat to reach the point where in the (P, T) plane $\nabla \simeq \nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$. Note that fully convective stars are relevant for the study of very low-mass stars ($M < 1M_{\odot}$) and advanced evolutionary stages of red-giants stars.

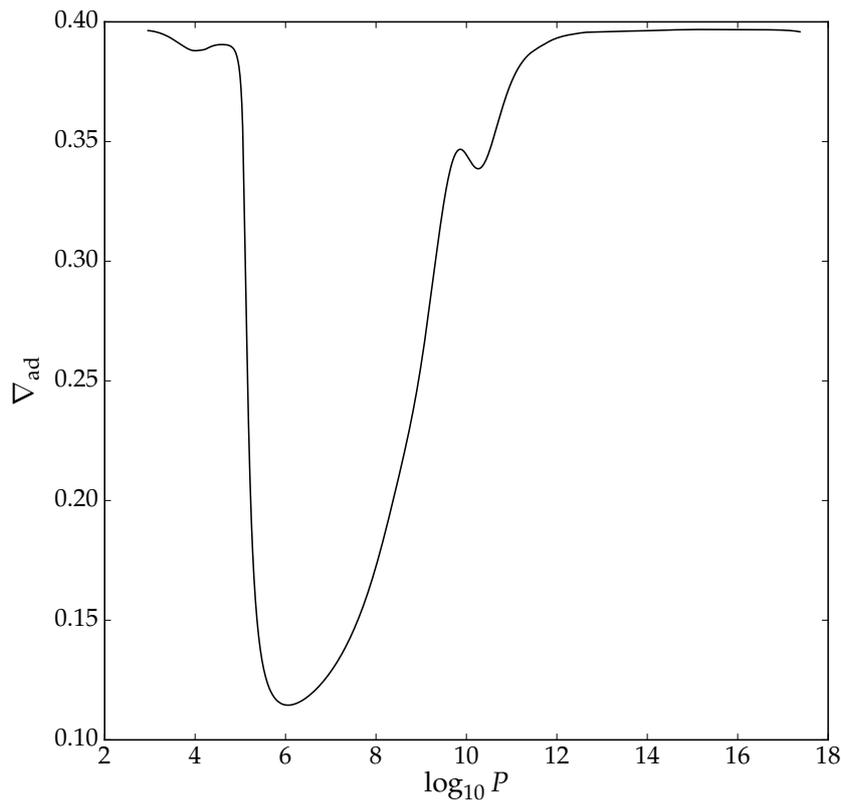


Figura 2: Profilo del gradiente adiabatico ∇_{ad} nel Sole. Il grosso della variazione avviene nello strato convettivo. Il primo grosso minimo corrisponde alla ionizzazione dell'idrogeno, mentre il secondo, più piccolo, posto dove $\log_{10} P \approx 11$ è causato dalla ionizzazione dell'elio.

Profile of the adiabatic gradient ∇_{ad} in the Sun. The bulk of the variation occurs in the convective envelope. The first large minimum correspond to the ionization of hydrogen, while the second, smaller one, at $\log_{10} P \approx 11$ is caused by the ionization of helium.

giganti rosse.

Conclusioni e note bibliografiche

In questa breve rassegna abbiamo esposto i tratti essenziali della convezione stellare. Lo scopo è stato di dare un'idea dei principi e delle ipotesi alla base che si usano per descrivere la convezione stellare. Ovviamente non intendevamo fornire una trattazione esaustiva, e rimangono molti spunti per possibili approfondimenti. Innanzitutto è bene citare l'elefante nella stanza: la convezione solare. Abbiamo appena accennato al Sole e solo tramite calcoli di ordine di grandezza. Ovviamente tutto ciò che è stato detto è valido anche per il Sole. Ma il punto è che abbiamo una conoscenza così dettagliata della convezione solare che di fatto essa è un argomento a sé stante. È possibile ottenere informazioni sulla struttura fine della superficie solare tramite l'eliosismologia locale, il che vuol dire che i modelli non devono necessariamente limitarsi a semplici approcci basati sulla teoria della lunghezza di

Conclusion and bibliographic notes

In this short review, we have covered the basics of stellar convection. The goal was to give an idea of the basic principles and assumptions used to describe stellar convection. Of course we did not aim at an exhaustive review and many doors are left open for further discussions. First let us mention the elephant in the room: solar convection. We have barely evoked the Sun except for order-of-magnitude calculations. Of course all the principles laid down here are valid for the solar case. But the fact is that we know so much about solar convection that it has grown into a topic of its own. We can constrain the fine structure of solar surface convection using local helioseismology, which implies that the models cannot be limited to simple mixing-length theory approaches. The effect of rotation or the coupling of the plasma flow with the solar magnetic field must be taken into account.

mescolamento. L'effetto della rotazione o l'accoppiamento del flusso del plasma con il campo magnetico solare devono essere tenuti in conto.

Se si prende in considerazione la convezione solare su grande scala, ad esempio provando a spiegare i dati eliosismologici locali, scopriamo anche che è necessario affrontare un altro limite della teoria della lunghezza di mescolamento, e cioè il fatto che essa è locale. In precedenza abbiamo accennato al fatto che il criterio di Schwarzschild non tiene conto di preesistenti effetti dinamici. Ci si potrebbe aspettare che sia possibile oltrepassare il punto di stabilità neutra identificato da questo criterio. Per fare un esempio semplice, un elemento di fluido privo di moto sarebbe stabile a questo punto, ma se una particella di fluido dotata di una certa velocità lo oltrepassasse, non si fermerebbe istantaneamente. Si potrebbe anche considerare il criterio di Ledoux, e potrebbe succedere che esso preveda che un certo strato dell'interno stellare sia instabile, anche se il criterio di Schwarzschild lo considera stabile. In tali casi capiterebbero dei processi doppiamente diffusivi, che non sono descritti in modo appropriato nei modelli stellari. Analogamente, il mescolamento indotto dalla rotazione o da onde di gravità interne può aggiungersi a quello dovuto alla convezione. Ad oggi, questi effetti non sono ben descritti, essi sono difficili da separare dalla convezione, e pertanto possono far sorgere dei dubbi sulla precisa topografia delle regioni convettive nell'interno stellare.

Infine è opportuno fornire alcuni riferimenti bibliografici per il lettore curioso che desideri esplorare ulteriormente questo argomento. Una fonte classica nella fisica stellare è il libro di Kippenhahn & Weigert *Stellar Structure and Evolution* [2]. È sorprendentemente conciso (nella sua prima edizione) e tuttavia fornisce tutti gli strumenti tecnici necessari per una approfondita comprensione dell'argomento. L'autore non è a conoscenza di una autorevole monografia sulla convezione stellare. Tuttavia esistono diverse buone fonti che si occupano di convezione e della teoria della lunghezza di mescolamento. Il libro di Chandrasekhar *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* [3] è sempre un buon riferimento sulle questioni riguardanti la stabilità. La voluminosa monografia di Monin & Yaglom *Statistical Fluid Mechanics* [4] può apparire sco-

When looking at the larger picture of solar convection, for instance by trying to match global helioseismic data, we also discover that one has to deal with another shortcoming of the mixing-length theory, namely the fact that it is local. First we already mentioned that the Schwarzschild criterion does not take preexisting dynamical effects into account. One might thus expect overshoot beyond the point of neutral stability as given by this criterion. To put things simply, a motionless element of fluid would be stable at this point, but a parcel of fluid crossing this limit with some velocity will not brake immediately. One could also consider the Ledoux criterion and it may happen that it predicts a layer of the stellar interior to be unstable, whereas it is stable according to the Schwarzschild criterion. In such cases double-diffusive processes might occur, which are not properly treated in stellar models. Likewise, mixing induced by rotation or internal gravity waves can blend in with convective mixing. These effects being poorly modelled as of today, they are difficult to disentangle from convection and thus may sometimes cast doubts over the precise topography of convective regions in the stellar interior.

Finally it is in order to provide some references for the curious reader anxious to further explore the subject. A classical reference in stellar physics is the book by Kippenhahn & Weigert *Stellar Structure and Evolution* [2]. It is remarkably concise (in its first edition) and yet gives all the necessary technical arguments for a proper understanding of the subject. To the knowledge of the author, there is no well-established monograph on stellar convection. However there are many good references treating convection and the mixing-length theory. The book by Chandrasekhar *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* [3] is always a good read for stability-related matters. The large monograph by Monin & Yaglom *Statistical Fluid Mechanics* [4] might look impressive but the style is remarkably clear. As many readers are expected to be Italian-speaking

raggiante, ma il suo stile è sorprendentemente chiaro. Poiché molti lettori dovrebbero essere di lingua italiana, non esitiamo a raccomandare il libro di Rieutord *Une Introduction a la Dynamique des Fluides* [5]. Infine vanno citati gli interessanti articoli di rassegna di Spiegel [7, 8] sul tema generale della convezione stellare, e di Gough [9] che si concentra specificamente sui modelli di lunghezza di mescolamento per le stelle.

one shall not hesitate to recommend the book by Rieutord *Une Introduction a la Dynamique des Fluides* [5]. Finally, we shall mention the interesting reviews by Spiegel [7, 8] on the broad subject of stellar convection, and by Gough [9] focusing more precisely on the stellar mixing-length models.



- [1] F. PAPARELLA: "Convezione in fluidi stratificati: il caso delle dita di sale.", *Ithaca* **8** (2016) 85–95.
- [2] R. KIPPENHAHN & A. WEIGERT: *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [3] S. CHANDRASEKHAR: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications, New York (1961).
- [4] A. S. MONIN & A. M. YAGLOM: *Statistical fluid mechanics mechanics of turbulence. Vol. 1*. Dover Publications, New York (1971).
- [5] M. RIEUTORD: *Une introduction à la dynamique des fluides*. De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve (2014).
- [6] E. A. SPIEGEL: "A Generalization of the Mixing-Length Theory of Turbulent Convection", *The Astrophysical Journal* **138** (1963) 216.
- [7] E. A. SPIEGEL: "Convection in Stars: I. Basic Boussinesq Convection", *ARA&A* **9** (1971) 323.
- [8] E. A. SPIEGEL: "Convection in Stars. II. Special Effects", *ARA&A* **10** (1972) 261.
- [9] D. GOUGH: "The current state of stellar mixing-length theory", *Lecture Notes in Physics* **71** (1977) 15.



Michaël Bazot: è un ricercatore post-doc presso il Center for Space Science della New York University ad Abu Dhabi.

Michaël Bazot: is a postdoc at the Center for Space Science at New York University Abu Dhabi.

Convezione in fluidi stratificati: il caso delle dita di sale.

Francesco Paparella

*Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento - Lecce
Division of Sciences - New York University - Abu Dhabi*

Come sanno tutti coloro che hanno osservato una pentola piena d'acqua posta sul fornello, se una massa d'acqua è scaldata dal basso, poiché l'acqua calda, essendo meno densa di quella fredda, tende a risalire, si generano dei moti convettivi. Ma che cosa succede se si scalda l'acqua dall'alto? Ad una prima analisi parrebbe impossibile che si possa generare del moto: se la densità del fluido aumenta con l'aumentare della profondità, una condizione di assenza di moto dovrebbe perdurare indefinitamente, ed essere stabile rispetto a piccole perturbazioni. Ed in effetti, se si tratta di acqua pura, senza nessun soluto, è proprio così. Ma se l'acqua contiene un soluto che può cambiarne la densità (ad esempio il sale), sorprendentemente, l'ipotesi che lo stato di assenza di moto sia stabile non può affatto essere data per scontata.

Nel 1956 apparve un brevissimo articolo del grande oceanografo Henry Stommel (in collaborazione con Arons e Blanchard) dallo strano titolo "Una curiosità oceanografica: la fontana salina perpetua" [1]. In quel lavoro si osservava che

se un lungo tubo di rame (o di un altro materiale conduttore del calore) fosse stato immerso verticalmente nell'oceano e si fosse innescato, tramite una pompa, un moto verso l'alto dell'acqua contenuta nel tubo, una volta staccata la pompa il moto avrebbe continuato a persistere, producendo una "fontana perpetua"!

Il motivo del moto dell'acqua su per il tubo può essere spiegato se si osserva come è stratificato l'oceano (Figura 1). Salvo che nelle regioni polari, gli strati superficiali dell'oceano sono assai più caldi e salati delle acque che giacciono in profondità, che, invece, sono fredde e relativamente poco salate. Una maggiore salinità (a parità di temperatura) rende più densa l'acqua, mentre una maggiore temperatura (a parità di salinità) la rende meno densa. Quindi, nell'oceano, la stratificazione di salinità e quella di temperatura hanno effetti contrapposti sulla densità. Tuttavia l'effetto della temperatura è quasi sempre dominante rispetto a quello della salinità, e, pertanto, l'acqua vicino alla superficie è meno densa di quella che si trova a maggiore profondità, e quindi la prima galleggia placidamente sulla seconda.

Se ora torniamo a concentrarci sulla fontana di Stommel, osserviamo che mentre l'acqua profonda risale lungo il tubo essa, è posta a contatto

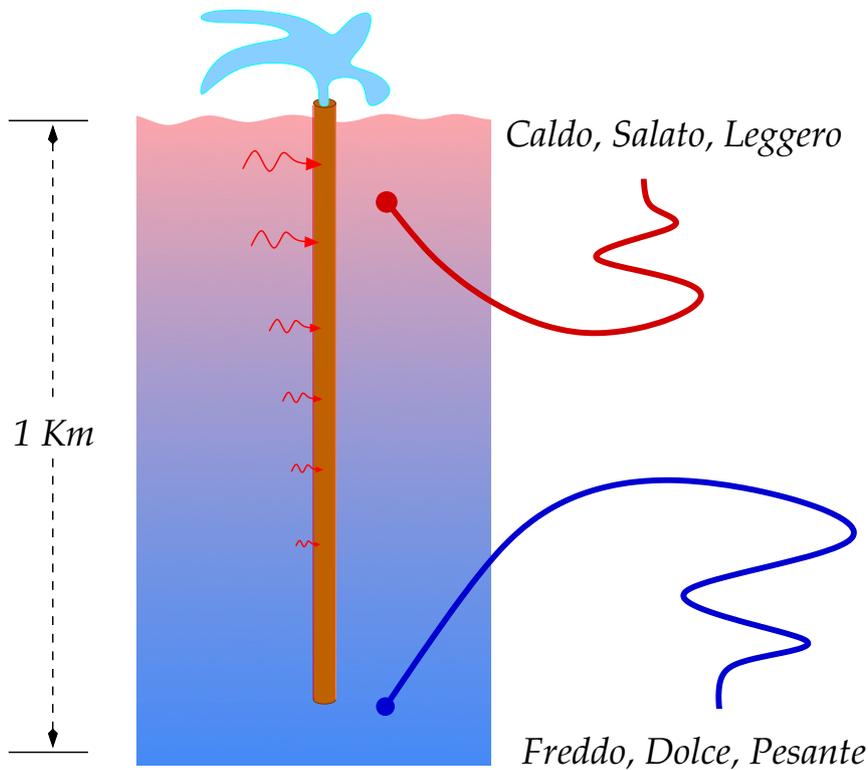


Figura 1: La fontana salina perpetua di Henry Stommel. Un tubo di materiale conduttore di calore è immerso nell'oceano. Mentre l'acqua risale, si scalda, ma non acquista salinità. Pertanto il peso della colonna d'acqua nel tubo è inferiore a quello di una colonna d'acqua di pari lunghezza fuori dal tubo, e si genera una spinta verso l'alto.

termico tramite le pareti con l'acqua a profondità più bassa, la cui temperatura aumenta con l'approssimarsi della superficie. Pertanto l'acqua dentro al tubo ha una temperatura quasi uguale a quella fuori dal tubo. Non così la salinità! Un solido tubo metallico può permettere la conduzione della temperatura, ma non certo della salinità. Quindi l'acqua dentro al tubo conserva la bassa salinità dell'acqua profonda. In pratica, la differenza tra la colonna d'acqua all'interno del tubo ed una colonna d'acqua di pari sezione ed altezza fuori dal tubo è che la colonna nel tubo contiene meno sale. Alla base del tubo esiste una spinta verso il basso dovuta al peso della colonna d'acqua interna al tubo, ed una verso l'alto, pari al peso della colonna d'acqua esterna al tubo, la cui pressione idrostatica, per il principio di Pascal, si redistribuisce omogeneamente. Ma la colonna nel tubo, poiché contiene meno sale, ha una massa, e quindi un peso, inferiore a quella della colonna fuori dal tubo. Pertanto la spinta verso l'alto è leggermente più alta di quella verso il basso, e l'acqua continua ad essere risucchiata dal fondo verso l'alto.

Il lettore attento potrebbe domandarsi dov'è il trucco. Si tratta di un pesce d'Aprile fuori stagione e sto solo descrivendo l'ennesima versione di una farlocca macchina del moto perpetuo? La

risposta è no. Sperimentalmente, una versione miniaturizzata della fontana salina può essere costruita in laboratorio. Da un punto di vista teorico, non si tratta di "moto perpetuo" nel senso comune del termine. Una analisi attenta mostra che il moto dell'acqua nel tubo è prodotto convertendo in energia cinetica una parte dell'energia potenziale immagazzinata ... ecco questo non è immediatamente agevole da cogliere. Da dove prende la fontana la sua energia? Diventerà più chiaro un po' più avanti.

In mancanza di altri sviluppi, questa osservazione sarebbe rimasta ciò che era stata dichiarate essere: una mera curiosità. Ma nel 1960, un altro grande oceanografo, Melvin Stern, capì un fatto cruciale [2]: per produrre piccole fontane saline all'interno del mare non c'è bisogno di tubi!

Le dita di sale

Immaginiamo di predisporre un piccolo acquario in cui sia stato preparato uno strato inferiore d'acqua dolce e fredda che gradatamente sfuma verso l'alto in uno strato d'acqua calda e salata, avendo cura, però di non esagerare con la salinità, in modo tale che la densità dell'acqua diminuisca a mano a mano che ci si muove dal

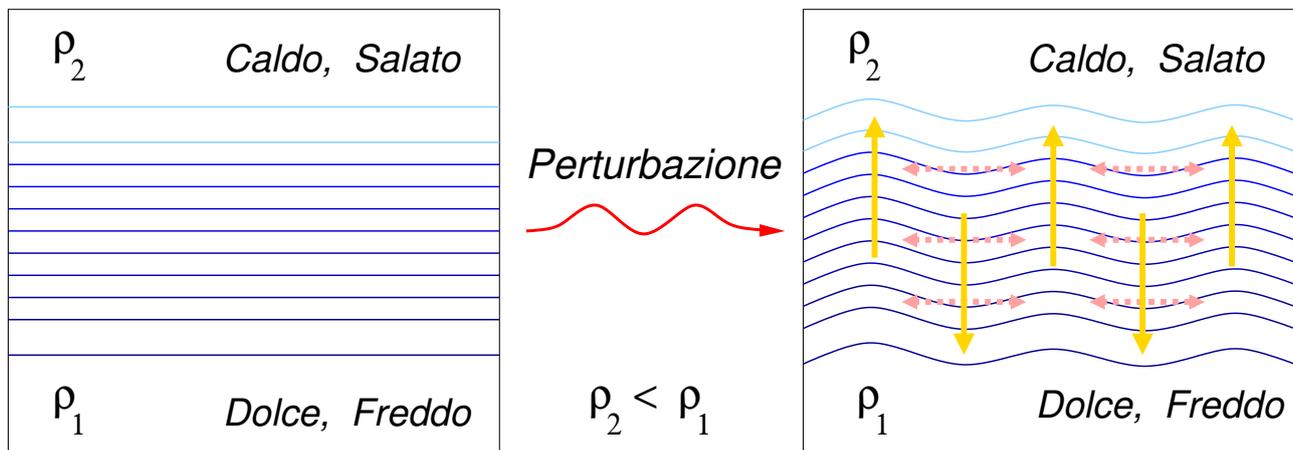


Figura 2: L'instabilità termoalina di Melvin Stern: le porzioni d'acqua spostate verso il basso dalla perturbazione cedono temperatura a favore di quelle spostate verso l'alto. La salinità, invece, non diffonde altrettanto rapidamente, perciò le porzioni spostate verso il basso si ritrovano ad essere pesanti, ed affondano, mentre, al contrario quelle perturbate verso l'alto diventano più leggere e salgono.

fondo verso la superficie. Avremo preparato una idealizzazione da laboratorio dell'oceano.

Ora chiediamoci, come fece Melvin Stern: che cosa succede se una minuscola perturbazione fa oscillare quest'acqua? Non sto parlando di grandi rimestamenti, ma di oscillazioni di ampiezza infinitesimale, talmente piccole ed evanescenti che in laboratorio non c'è nemmeno bisogno di produrle apposta: minuscole vibrazioni dovute al camminare delle persone, o alla voce di chi parla, o al fatto che l'acqua non è proprio perfettamente ferma all'inizio dell'esperimento, sono già perturbazioni sufficienti ad innescare l'instabilità di cui stiamo per parlare.

Esaminiamo una porzione d'acqua che sia stata spostata verso l'alto dalla perturbazione (Figura 2). Essa si ritrova circondata da masse d'acqua leggermente più calde, dalle quali acquista calore per diffusione termica. Se non ci fosse il sale, questa porzione d'acqua, mantenendo comunque una temperatura lievemente inferiore di quella del fluido circostante, rimarrebbe anche lievemente più densa. Perciò dopo poco tenderebbe a scendere verso la sua posizione di equilibrio, e la perturbazione di smorzerebbe. Ma nel nostro caso il sale c'è, e l'informazione chiave è che esso diffonde quasi cento volte più lentamente della temperatura. Quindi la nostra porzione d'acqua che è stata spostata verso l'alto, anche se acquista salinità per diffusione dall'acqua circostante, non lo fa altrettanto rapidamente che con la temperatura. In breve, avremo una porzione d'acqua quasi altrettanto calda dell'acqua

originariamente posta a quell'altezza, ma con un severo deficit di salinità. Ma quindi, la nostra porzione d'acqua, ormai calda ma non salata, si ritroverà ad essere meno densa dell'acqua che la circonda, e proseguirà a spostarsi verso l'alto, amplificando la perturbazione. Allo stesso modo, una porzione d'acqua spostata verso il basso dalla perturbazione cede calore con una certa rapidità, e cede salinità molto più lentamente. Essa quindi si raffredda, ma rimane salina, e quindi diventa più densa del fluido circostante, col risultato che continuerà ad affondare.

I calcoli di Melvin Stern mostrarono che questo quadro schematico descritto verbalmente è corretto. Se la stratificazione della salinità è sufficientemente intensa, perturbazioni di ampiezza infinitesimale tendono a crescere, e si trasformano in un moto in colonne alternate, una ascendente ed una discendente, che velocemente scambiano lateralmente temperatura, ma solo molto più lentamente scambiano salinità. Anziché avere una singola colonna d'acqua che si muove in un tubo abbiamo ora una schiera di colonne d'acqua che si muovono, in su ed in giù, senza bisogno di tubi! La differenza tra la diffusività della temperatura e quella della salinità è sufficiente a creare delle disomogeneità nel campo di densità che innescano il moto. Otto anni dopo Alan Turing, Melvin Stern aveva indipendentemente scoperto un nuovo caso in cui la differenza fra le diffusività di due sostanze (o, meglio, di due campi scalari) produce una instabilità che porta alla formazione di strutture coerenti (per una intro-

duzione divulgativa alla instabilità di Turing si veda [3]).

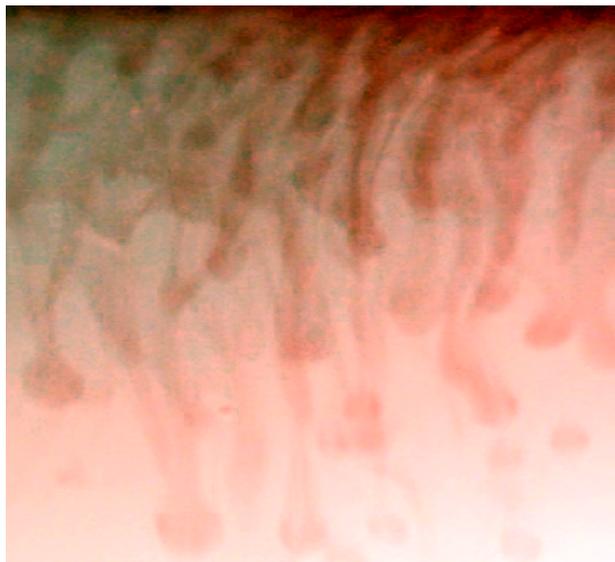


Figura 3: Dita di sale prodotte in un esperimento casalingo. L'esperimento può essere facilmente riprodotto, seguendo le istruzioni riportate nel riquadro a fronte.

Mentre Stern faceva i suoi calcoli, come egli stesso racconta, Stommel ed il suo collega Alan Faller erano impegnati in laboratorio per verificare che i tubi fossero davvero superflui. Riprodurre in un piccolo contenitore un graduale passaggio dal caldo al freddo e dal dolce al salato, sebbene possibile, non è agevole. Così si limitarono a versare uno strato di acqua calda e salata (con del colorante aggiunto per visualizzare le strutture) al di sopra di uno strato di acqua dolce e fredda. Dopo pochi istanti videro formarsi delle strutture uguali a quelle riprodotte in Figura 3.

In un esperimento come quello di Stommel e Faller, col passare del tempo le dita di sale trasportano salinità dallo strato superiore a quello inferiore. La temperatura, invece, poiché è così abile a diffondere lateralmente, non è trasportata verticalmente con altrettanta efficacia: lo strato superiore rimane relativamente tiepido, e quello inferiore non si scalda un gran che. In altre parole, il flusso verticale di salinità è maggiore di quello di temperatura. Ma questo vuol dire che lo strato superiore, che già era meno denso di quello inferiore, diventa ancora meno denso. Mentre quello inferiore, arricchendosi di salinità, senza scaldarsi troppo, diventa ancor più denso. Le dita di sale sono quindi un fenomeno assai

peculiare, perché trasportano la densità da regioni a densità più bassa a regioni a densità più alta (cioè *controgradiente*, per usare il gergo tecnico), mentre quasi tutti gli altri fenomeni di mescolamento (inclusa la convezione ordinaria) fanno il contrario.

Questa peculiarità svela anche quale sia la fonte di energia che muove le dita di sale: la massa di sale che dallo strato superiore è trasportata verso lo strato inferiore perde energia potenziale. Quest'ultima è tramutata in energia cinetica del fluido. Il fatto che le dita di sale si muovano assai lentamente testimonia che la conversione non è agevole. I processi diffusivi che permettono l'estrazione di energia potenziale sono relativamente lenti, cosicché in un esperimento come quello di Stommel e Faller le dita di sale rimangono in movimento (gradualmente sempre più lento) per un'ora o poco più prima di esaurire l'energia potenziale immagazzinata nel campo di salinità. Nel caso della fontana di Stommel essa è "perpetua" solo perché il debole zampillo di acqua profonda non è in grado di produrre una diluizione apprezzabile della salinità superficiale: la riserva di energia potenziale della salinità oceanica è enorme, e non è intaccabile da una singola fontana salina.

Dal laboratorio all'oceano

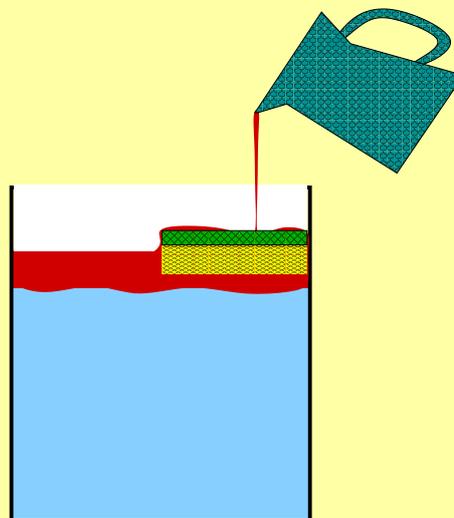
Le dita di sale sono una stranezza da laboratorio oppure si formano spontaneamente nelle profondità oceaniche? A scala globale, la stratificazione che si trova in tutti gli oceani tropicali e subtropicali, con acqua calda e salata in cima ad acqua più fredda e meno salata, è mantenuta approssimativamente costante nel tempo dai processi di evaporazione e precipitazione, i cui effetti, nel tempo, ed opportunamente orchestrati dalle grandi correnti oceaniche, si bilanciano l'un l'altro, fino ad ottenere una stratificazione quasi stazionaria.

Mentre la comunità oceanografica cominciava a sospettare che le minuscole fontane saline fossero qualcosa di più di una curiosità, Melvin Stern e Stewart Turner proseguivano a compiere esperimenti concentrandosi sul caso in cui l'effetto contrapposto di salinità e temperatura sulla densità è quasi uguale, e cioè sul caso in cui

La Ricetta delle Dita di Sale

Un esperimento qualitativo per produrre le dita di sale in casa è semplice da fare. Ecco ciò che è necessario:

- Un contenitore dalle pareti trasparenti. Una grossa caraffa o un vaso di vetro con le pareti lisce possono essere sufficienti.
- Una spugna. Quelle per la pulizia delle pentole vanno benissimo.
- Un bricco nel quale si possa scaldare dell'acqua. È importante che abbia un beccuccio che permetta di versare l'acqua senza sbrodolare.
- Colorante alimentare di un colore vivace. Quello in polvere, se si riesce a trovarlo, è preferibile. Altrimenti una o due fiale sono sufficienti.
- Sale fino.
- Acqua.



Dallo strato superiore d'acqua salata e colorata si protendevano delle strutture tubolari, terminanti in dei bulbi vagamente simili a polpastrelli, che scendevano lentamente verso il basso. Alternate fra di esse, ascendevano colonne d'acqua dolce e trasparente. Erano state osservate per la prima volta le dita di sale!

Riempite d'acqua il vaso di vetro fino a circa 3/4 della sua altezza. Posate la spugna a galleggiare sull'acqua nel vaso, con il lato ruvido rivolto verso l'alto. Versate dell'acqua nel bricco e scaldatela fino quasi a portarla all'ebollizione. Versate nel bricco un quarto di cucchiaino di sale fino e colorante alimentare fino ad ottenere un liquido di colore assai intenso. Molto lentamente, avendo cura di non produrre schizzi o sbrodolature, versate il contenuto del bricco sulla spugna (può essere utile tenerla ferma con una forchetta).



A questo punto, se tutto è andato per il verso giusto, state osservando uno stato di acqua colorata che galleggia sopra ad uno strato di acqua trasparente. Per un po' non succederà nulla: lo strato superiore è ancora troppo caldo ed il sistema è stabile. Nel giro di alcuni minuti (dipende da quanto sale avete messo nel bricco) cominceranno ad apparire delle forme colorate come quelle mostrate nella Figura 3 che lentamente (si va da pochi minuti a un'ora, a seconda della quantità di sale e di acqua nel bricco), riempiranno l'intero vaso, rendendo il colore omogeneo.

La parte più difficile dell'esperimento è preparare correttamente i due strati iniziali. Se il contenuto del bricco è versato troppo velocemente, o direttamente nel vaso, senza essere rallentato dalla spugna, i due strati si mescoleranno meccanicamente, e le dita di sale non appariranno (per lo stesso motivo, non provate a rimuovere la spugna dopo aver preparato i due strati). Un altro errore comune è quello di mettere troppo sale. Così si rischia di rendere lo strato superiore più denso di quello inferiore, che quindi sprofonderà producendo una o due grandi celle convettive. In effetti, avendo a disposizione del colorante alimentare in polvere, si può fare a meno del tutto del sale: qualche cucchiaino di colorante (la quantità ottimale va trovata con prove ed errori) incrementa la densità dell'acqua del bricco tanto quanto il sale da cucina, e la rende perfettamente visibile.

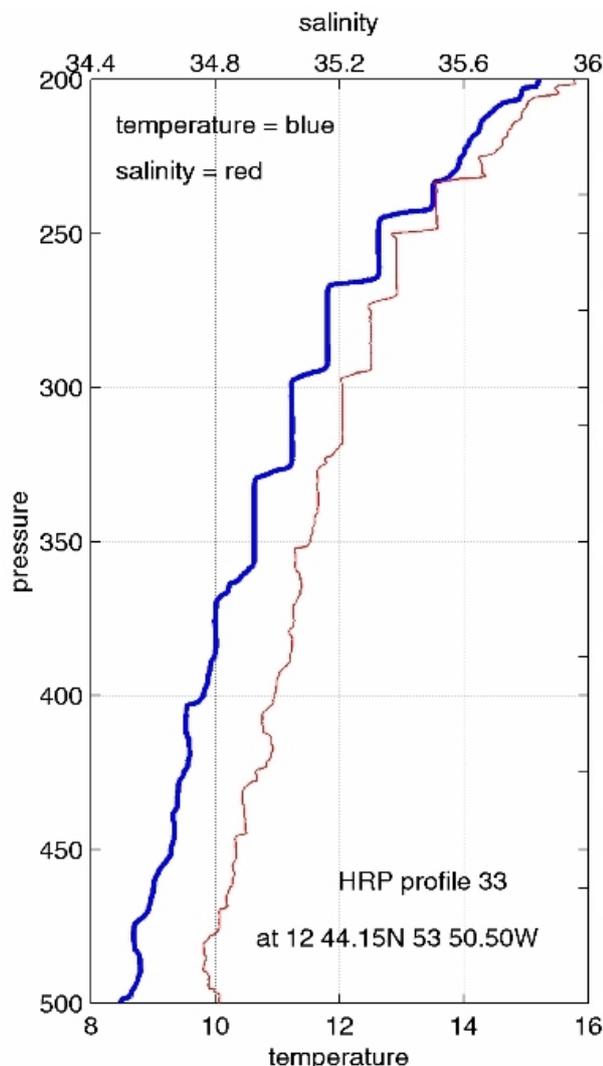


Figura 4: Una scalinata termoalina osservata nell'Atlantico tropicale. La scala di pressione è in 10^4Pa , ed equivale approssimativamente alla profondità in metri; quella di temperatura in $^\circ\text{C}$; quella di salinità in psu (unità pratiche di salinità). Tratto da: <http://hrp.whoi.edu/hrpgrp/sftre/stairs1.html>

il rapporto tra densità dello strato inferiore e quella dello strato superiore è solo di poco superiore ad uno. Tanto più ci si avvicina a questo limite, tanto più vigoroso diventa il moto delle dita di sale. Non si tratta di esperimenti di facile esecuzione (soprattutto nella cucina di casa), ma Stern e Turner svilupparono nuove tecniche sperimentali che permettevano loro di compiere delle osservazioni accurate [4]. Il risultato fu una scoperta eccezionale: uno strato di dita di sale in moto sufficientemente vigoroso si scinde spontaneamente in due strati separati da una regione omogenea all'interno della quale appaiono moti convettivi di tipo ordinario. Temperatura,

salinità e densità diventano quasi costanti nelle regioni convettive, e sviluppano forti gradienti negli strati nei quali permangono le dita di sale.

A questo punto l'interesse degli oceanografi era del tutto destinato. Se si misura come variano la temperatura e la salinità al variare della profondità, in molte aree tropicali degli oceani si ottiene un profilo scalettato, come quello mostrato in Figura 4. In quelle regioni i parametri sono quelli favorevoli a dita di sale in moto vigoroso. La distribuzione di temperatura e salinità in quelle aree dell'oceano è dunque causata dalle dita di sale? La risposta definitiva venne da una grande campagna oceanografica lanciata nella seconda metà degli anni '80, denominata C-Salt (una descrizione accessibile si trova in [5]). Per dirimere la questione si arrivò perfino a immergere ad oltre 300m di profondità un apparato fotografico nella speranza di cogliere una immagine delle minuscole strutture elongate. Che, infatti, non mancarono di farsi vedere! Quella ed altre campagne di misurazione dimostrarono che la dinamica delle minuscole dita di sale determina nell'oceano la presenza di strutture alte, nel loro complesso, centinaia di metri, e che si estendono lateralmente per centinaia di chilometri.

Per avere un quadro completo del fenomeno rimaneva da rispondere a due domande: qual è il meccanismo che genera la struttura scalettata a partire da profili inizialmente a pendenza costante? E, soprattutto, è possibile esprimere in termini quantitativi la quantità di sale e di temperatura trasportata dalle dita di sale in funzione dei parametri a grande scala?

Problemi irrisolti

Purtroppo ad entrambe le domande non è ancora possibile dare una risposta definitiva, anche se molti progressi sono stati compiuti su entrambi i fronti.

Saper calcolare il flusso di salinità e di temperatura prodotto dalle dita di sale è necessario se si vuole inserire una descrizione di questo fenomeno nei modelli oceanografici e climatologici a grande scala. Una simulazione numerica che abbraccia l'intero pianeta, o anche solo piccoli mari come il Tirreno o l'Adriatico, non ha la risoluzione necessaria per riprodurre strutture di scala centimetrica, come le dita di sa-

le. Non è prevedibile se e quando i calcolatori saranno sufficientemente potenti da permettere una tale simulazione. Di certo non succederà nell'arco delle nostre vite. Pertanto, se si vuole inserire l'effetto delle dita di sale in simulazioni come quelle odierne, che hanno risoluzioni orizzontali non inferiori a qualche chilometro e verticali dell'ordine delle decine di metri, è necessario trovare una formula che legghi il trasporto verticale di temperatura e salinità, dovuto alle dita di sale, alla pendenza a grande scala dei profili stessi di temperatura e salinità.

L'importanza di questo compito diventa evidente quando si considera che il trasporto di temperatura e salinità può far cambiare i profili stessi che lo determinano, rendendo il problema fortemente non-lineare (qualcosa di simile accade anche nella convezione ordinaria, v. "Retroazioni" nell'articolo [6] in questo stesso numero). In linea di principio, anche in mancanza di una precisa comprensione teorica del problema, si potrebbero interpolare i dati di laboratorio ed usarli nei modelli oceanici e climatologici. Purtroppo l'esatto regime di parametri oceanici non è riproducibile in laboratorio: bisognerebbe usare delle vasche alte decine di metri riuscendo a regolare temperatura e salinità alla perfezione. Quindi, più che di interpolazione, si tratta di estrapolazione, dal regime di parametri accessibile in laboratorio a quello rilevante per l'oceano. Finora i risultati non sono stati entusiasmanti. Le formule disponibili riescono, al più, a cogliere l'ordine di grandezza del fenomeno, ma le discrepanze fra una formulazione ed un'altra sono notevoli e la loro origine non ben compresa.

Anche per il secondo problema irrisolto, quello della formazione delle scalinate termoaline, sono state proposte molte possibili spiegazioni, ma nessuna, finora, si è imposta chiaramente come quella corretta. In parte, a parere dell'autore, questo è dovuto al fatto che la quasi totalità di queste spiegazioni parte da un modello teorico nel quale le dita di sale mantengono una estrema coerenza verticale, ed appaiono come alte colonne di fluido. Insomma, il punto di partenza è ancora quello della fontana di Stommel degli anni '50.

Ma questa idealizzazione è inadeguata a descrivere il regime di convezione vigorosa dal quale si sviluppano le scalinate. In questo regime

le colonne perdono coerenza a causa di instabilità secondarie (già note, in effetti, fin dagli anni '80) che rompono le lunghe dita di sale in tante gocce quasi sferiche, metà delle quali ha al suo interno un deficit di salinità e si muove verso l'alto, mentre l'altra metà ha un eccesso di salinità e si muove verso il basso (Figura 5).

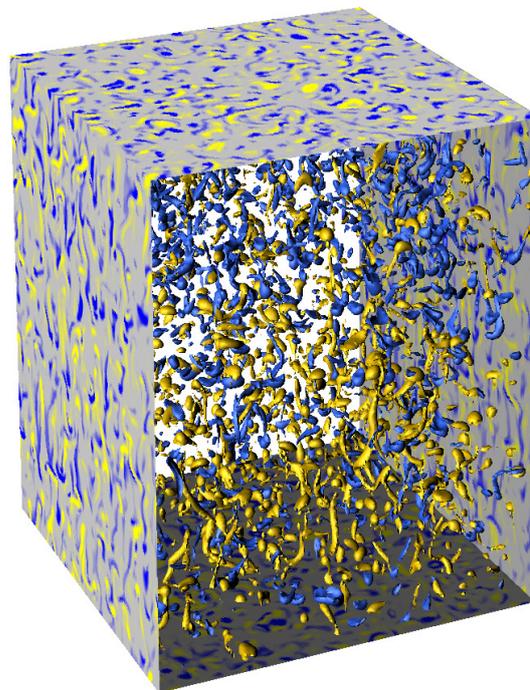


Figura 5: Visualizzazione tridimensionale di una simulazione numerica in cui il regime delle dita di sale elongate verticalmente è stato sostituito da quello delle gocce quasi sferiche (tratto da [7]).

Recenti simulazioni numeriche ad altissima risoluzione suggeriscono un nuovo meccanismo di formazione delle scalinate [8]. È stato osservato che tanto più è vigorosa la convezione nel regime delle gocce, tanto più le gocce che viaggiano nella stessa direzione appaiono aggregate insieme in grappoli. Questo è ragionevole, perché se la velocità di una singola goccia è sufficientemente alta da trascinare parte del fluido che la circonda, in esso si scatenano le stesse instabilità diffusive che abbiamo descritto discutendo la Figura 2, portando alla formazione di nuove gocce che viaggiano nella medesima direzione di quella originaria.

Mentre una singola goccia è troppo piccola per produrre un mescolamento apprezzabile del fluido che la circonda, un grosso grappolo ha energia cinetica sufficiente per farlo, e quindi, al suo passaggio, rende il fluido verticalmente un po' più omogeneo. Inoltre, non è troppo difficile

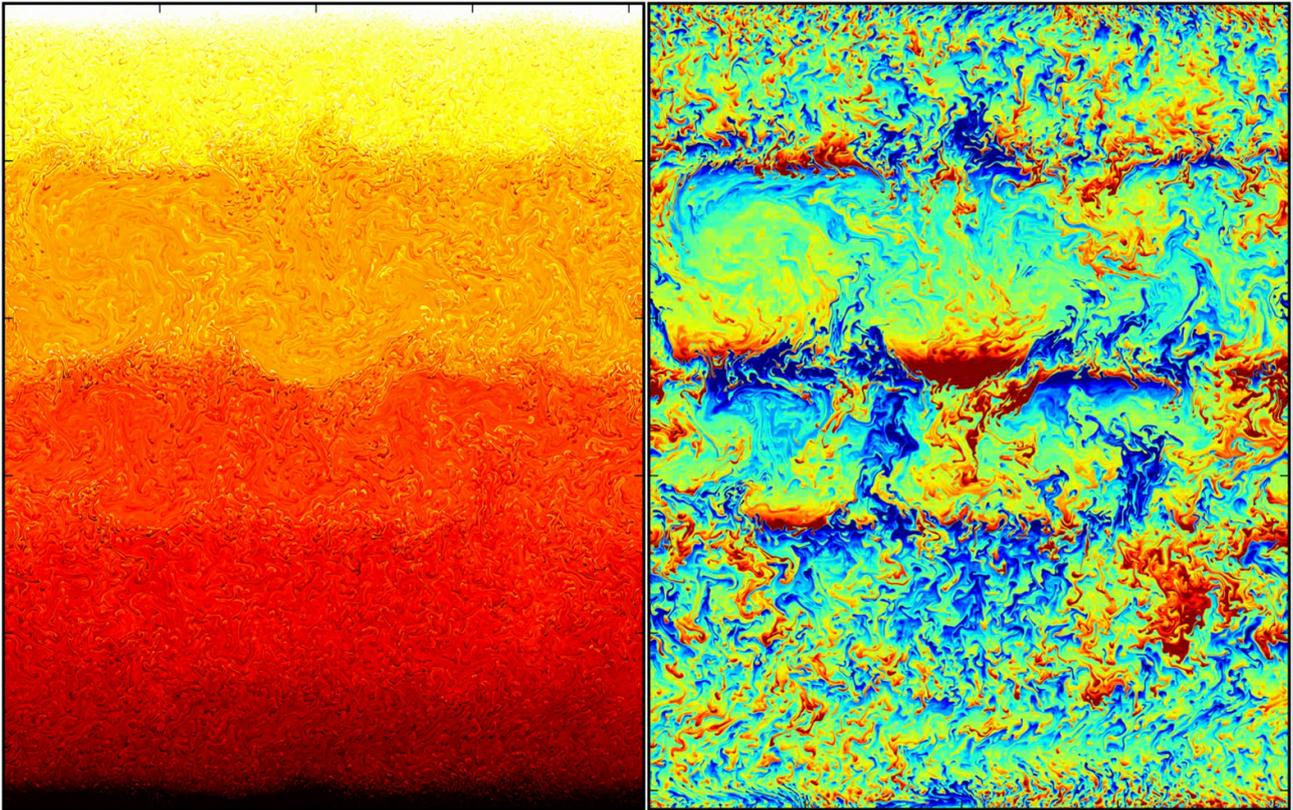


Figura 6: Formazione di scalinate termoaline in una simulazione numerica. Il riquadro di sinistra mostra la densità del fluido (più è chiaro il colore più è leggero il fluido). Il riquadro di destra mostra l'anomalia di salinità rispetto alla media orizzontale (blu indica carenza di salinità, rosso un eccesso). Nella parte superiore si è già formato uno strato ben mescolato. Un secondo strato è in formazione subito sotto. In basso si vedono grappoli di gocce termoaline con simile anomalia di salinità.

convincersi che la convezione può essere vigorosa solo dove i cambiamenti verticali di densità sono relativamente bassi. Là dove la densità cambia rapidamente con l'altezza, una goccia (p.es. che viaggia verso l'alto) non può avere una grande velocità, altrimenti, non avendo avuto il tempo di far diffondere lateralmente la temperatura, si ritroverebbe in una regione di fluido meno densa della propria densità, e finirebbe col ricadere verso il basso. Un ragionamento analogo si applica alle gocce che viaggiano verso il basso.

Questi fatti rendono possibile un meccanismo di retroazione: là dove, per caso, la densità è verticalmente un poco più omogenea che in altri luoghi, le gocce potranno muoversi con velocità leggermente maggiore, e sarà facilitata la formazione di grappoli di gocce, che, con la loro azione di mescolamento, renderanno ancora più omogenea quella regione di fluido, fino al formarsi di una alternanza di regioni del tutto mescolate, e di regioni con forti variazioni verticali di densità: le scalinate termoaline.

Oltre l'oceano

Buona parte della ricerca riguardo alle forme di convezione in cui, oltre alla temperatura, almeno un soluto partecipa nel determinare la densità del fluido è avvenuta in oceanografia. Ma fenomeni come quelli descritti in questa breve sintesi, e collettivamente noti come *doppiamente diffusivi*, occorrono in natura non solo negli oceani.

Indipendentemente dagli oceanografi, fin dalla fine degli anni '40 del secolo scorso, la comunità dei fisici stellari, sulla base di ragionamenti puramente teorici, ebbe ragione di sospettare che instabilità doppiamente diffusive (non solo quella che produce le dita di sale, ma soprattutto un'altra, chiamata in gergo *semiconvezione*) potessero avere un qualche ruolo nella convezione stellare (si veda l'articolo [9] in questo stesso numero). In tal caso il fluido è il plasma stellare di idrogeno ionizzato, ed il ruolo del sale è svolto (generalmente) dall'elio.

Tornando sul nostro pianeta, altri casi in cui

la diffusione doppia produce fenomeni interessanti si trovano in geofisica. Durante il processo di solidificazione delle camere magmatiche, poiché sostanze diverse cristallizzano a temperature diverse, si possono innescare instabilità convettive dovute alla contemporanea presenza di più soluti. Analogamente, si ritiene che fenomeni di questo tipo siano presenti nel mantello terrestre, in particolare alla base dei continenti, e nelle piattaforme continentali in subduzione (per una introduzione generale alla convezione nel mantello si può fare riferimento all'articolo [10] in questo stesso numero).

Infine fenomeni doppiamente diffusivi sono possibili in metallurgia, ed hanno rilevanza nei processi industriali di preparazione di manufatti metallici a partire da materiali fusi. Ma, in questo caso, l'obiettivo è generalmente quello di evitare le instabilità, e mantenere il materiale omogeneo.

Una rassegna ancora attuale su questi argomenti si trova in [11].



- [1] H. STOMMEL, A. B. ARONS, D. BLANCHARD: "An oceanographical curiosity: the perpetual salt fountain", *Deep-Sea Research* **3** (1956) 152–153.
- [2] M. E. STERN: "The "Salt-Fountain" and Thermohaline Convection", *Tellus* **12** (1960) 172–175.

- [3] F. PAPARELLA: "Al confine tra matematica, biologia e arte: la morfogenesi di Turing", *Ithaca* **4** (2014) 27–36.
- [4] M. E. STERN, J. S. TURNER: "Salt fingers and convecting layers", *Deep-Sea Research* **16** (1969) 497–511.
- [5] R. W. SCHMITT: "The Caribbean Sheets and Layers Transects (C-SALT) Program", *EOS* **68** (1987) 57–60.
- [6] E. A. SPIEGEL: "La convezione da cima a fondo", *Ithaca* **8** (2016) 5–16.
- [7] J. VON HARDENBERG, F. PAPARELLA: "Non-Gaussian buoyancy statistics in fingering convection", *Physics Letters A* **374** (2010) 2646–2653.
- [8] F. PAPARELLA, J. VON HARDENBERG: "Clustering of salt fingers in double-diffusive convection leads to staircase-like stratification", *Physical Review Letters* **109** (2012) 014502.
- [9] M. BAZOT: "La convezione nelle stelle", *Ithaca* **8** (2016) 59–84.
- [10] J. WITHEHEAD: "Convezione nel mantello", *Ithaca* **8** (2016) 17–32.
- [11] J. S. TURNER: "Multicomponent Convection", *Annual Review of Fluid Mechanics* **17** (1985) 11–44.

Francesco Paparella: Laureato in Fisica presso l'Università di Torino, ha conseguito il dottorato in Geofisica presso l'Università di Genova. È attualmente "visiting assistant professor" della New York University presso il nuovo campus di Abu Dhabi (in congedo dall'Università del Salento). Si occupa di meccanica dei fluidi (applicata alla geofisica) e di sistemi dinamici (applicati alla meccanica dei fluidi ed all'ecologia).

Martingala: l'origine di un nome

Carlo Sempi

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi,"
Università del Salento, Lecce, Italy 73100

Le martingale sono oggetti matematici della teoria delle probabilità. La probabilità è spesso introdotta nell'analisi dei giochi d'azzardo; così anche le martingale hanno un'interpretazione "ludica": esse descrivono un gioco equo, vale a dire un gioco nel quale nessuno di due giocatori è sicuro di vincere. Naturalmente, le martingale sono anche molto altro e hanno vaste applicazioni. In questa breve nota, cercherò di dare un'idea della definizione, ma soprattutto mi dedicherò alla ricerca delle origini del loro nome.

Funzioni misurabili

La probabilità è una funzione a valori in $[0, 1]$ e definita su insiemi che rappresentano eventi; oltre che agli eventi singoli, diciamo A e B , è desiderabile poter parlare anche degli eventi "si realizzano sia A sia B ", rappresentato dall'intersezione $A \cap B$, e "si realizza almeno uno tra A e B ", rappresentato dall'unione $A \cup B$. In termini meno astratti, si consideri un giocatore che si avvicini a un tavolo di roulette; accanto ai risultati "esce il 17 o il 18" e "il risultato è un numero dispari" si possono considerare gli eventi "il risultato è 17 o 18 ma un numero dispari" e "il risultato è il 17, il 18 oppure un numero dispari". Per ragioni tecniche si considerano non solo unioni finite, ma anche unioni numerabili, come

nella definizione che segue.

Uno spazio di probabilità è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove Ω è un insieme non vuoto, \mathcal{F} è una tribù, o σ -algebra di sottoinsiemi di Ω , e \mathbb{P} è una misura¹ definita in \mathcal{F} con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Una tribù è una famiglia che soddisfa a tre requisiti: $\Omega \in \mathcal{F}$, il complementare A^c di un insieme A di \mathcal{F} è ancora in \mathcal{F} e l'unione numerabile $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ degli insiemi di una successione (A_n) di insiemi di \mathcal{F} appartiene anch'essa a \mathcal{F} . Gli insiemi di \mathcal{F} si dicono misurabili.

Nel caso $\Omega = \mathbb{R}$, con \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali, si considera di solito la tribù di Borel \mathcal{B} , che è la piú piccola tribù di sottoinsiemi di \mathbb{R} che contenga gli insiemi aperti, o, ciò che si dimostra essere lo stesso, gli intervalli $]a, b]$. Gli insiemi di \mathcal{B} si chiamano boreliani.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice misurabile (rispetto a \mathcal{F}) se l'immagine inversa $\varphi^{-1}(B)$ di ogni boreliano B appartiene a \mathcal{F} . Per esempio, ogni funzione continua $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile, poiché l'immagine inversa di un aperto mediante una funzione continua è un aperto. In probabilità le funzioni misurabili si chiamano variabili aleatorie e le si indicano usualmente con le ultime lettere, $X, Y,$

¹Il termine "misura" indica che vale la proprietà di additività numerabile

$$\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

se gli insiemi A_n sono in \mathcal{F} e sono a due a due disgiunti $A_j \cap A_k = \emptyset$ se $j \neq k$.

W, \dots, Z , dell'alfabeto. La ragione di questa terminologia è dovuta al fatto che gli statistici già dalla fine dell'Ottocento chiamavano così grandezze suscettibili di assumere valori diversi con date probabilità, e ciò avveniva prima della formalizzazione della teoria delle probabilità negli anni Venti e Trenta del secolo scorso.

Di una variabile aleatoria X si può considerare l'integrale

$$\int X d\mathbb{P},$$

se questo esiste; in tal caso, lo si denota più brevemente con $\mathbb{E}(X)$. L'insieme delle variabili aleatorie integrabili è indicato con $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Speranze condizionate

Siano dati (a) uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, (b) una variabile aleatoria integrabile, $X \in L^1$ e (c) una sottotribù \mathcal{G} di \mathcal{F} , vale a dire una tribù di sottoinsiemi di Ω ogni insieme della quale appartiene anche a \mathcal{F} . Si chiama *speranza condizionata* di X , data \mathcal{G} , e la si denota con $\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X)$, oppure con $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, la variabile aleatoria, *misurabile rispetto a \mathcal{G}* , l'integrale della quale coincide con quello di X quando sia calcolato su un insieme di \mathcal{G} :

$$\forall B \in \mathcal{G} \quad \int_B \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X) d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}. \quad (1)$$

Esiste un teorema, detto di Radon–Nikodym (per il quale si veda, per esempio, [1]), che stabilisce l'esistenza di una variabile aleatoria siffatta e che ne assicura anche l'unicità: se un'altra funzione Y soddisfa alle stesse condizioni, allora l'insieme dei punti nei quali $Y \neq \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X)$ ha probabilità nulla.

Il caso più semplice di speranza condizionata è illustrato nella Figura 1. Qui la curva in rosso rappresenta una variabile aleatoria continua. Lo spazio è suddiviso in intervalli; le unioni finite di questi intervalli generano una tribù. Si potrebbe dimostrare che la speranza condizionata della variabile aleatoria in figura è necessariamente costante in ciascun intervallo; il valore di tale costante è determinato dalla richiesta che in ogni intervallo sia soddisfatta la condizione di eguaglianza degli integrali in (1). Perché i due

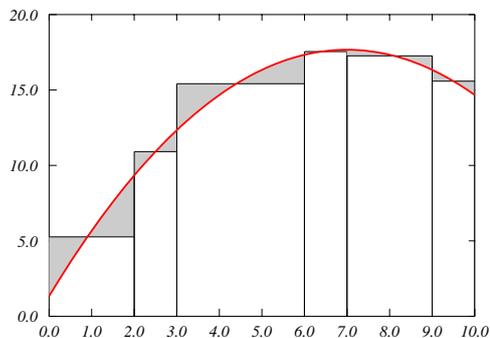


Figura 1: La speranza condizionata rispetto alla tribù generata da una famiglia finita di intervalli.

integrali siano eguali occorre che in ogni intervallo l'area della regione in grigio sotto il grafico eguagli quella della regione in grigio sopra il grafico.

Non mi soffermo qui sulle proprietà delle speranze condizionate, che pure sono importanti per lo studio delle martingale; il lettore interessato le può trovare in qualunque buon libro di probabilità, per esempio in [16].

Cosa sono le martingale?

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si dice *filtrazione*² una successione di tribù $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ tutte contenute in \mathcal{F} e tali che, per ogni $n \geq 0$, \mathcal{F}_n sia contenuta in \mathcal{F}_{n+1} , $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Se si interpreta l'indice n come il tempo (discreto), una filtrazione traduce l'idea dell'accumularsi delle informazioni con il trascorrere del tempo; perciò \mathcal{F}_n sarà una tribù contenuta in \mathcal{F}_{n+1} .

Una *martingala* (a tempo discreto) è una successione $(X_n)_{n \geq 0}$ di variabili aleatorie tali che per ogni $n \geq 0$,

- (a) X_n sia misurabile rispetto a \mathcal{F}_n ,

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad X_n^{-1}(B) \in \mathcal{F}_n;$$

- (b) X_n sia integrabile, $X_n \in L^1$;

- (c) $\mathbb{E}_n(X_{n+1}) = X_n$ ³

²Solo in italiano una filtrazione si chiama anche *scala stocastica*.

³Qui si \mathbb{E}_n è la versione più breve della scrittura formale $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}$.

Se l'eguaglianza è sostituita da una diseguaglianza si parla di *sotto-martingala* quando $\mathbb{E}_n(X_{n+1}) \geq X_n$ e di *super-martingala* quando $\mathbb{E}_n(X_{n+1}) \leq X_n$.

La proprietà (c), che caratterizza le martingale, si può esprimere in maniera (in apparenza) differente, evitando il ricorso al teorema di Radon–Nikodym implicito nella definizione di martingala: per ogni insieme A di \mathcal{F}_n si ha

$$\int_A X_{n+1} d\mathbb{P} = \int_A X_n d\mathbb{P}.$$

Di seguito dò alcuni esempi di martingale in uno spazio di probabilità fissato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; le verifiche dipendono dalle proprietà delle speranze condizionate.

1. Una successione costante $X_n = c$, per ogni $n \geq 0$, è una martingala.
2. Se (X_n) è una successione di variabili aleatorie indipendenti⁴ e centrate, vale a dire tali che $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni $n \geq 0$, allora la successione S_n , dove $S_n := \sum_{k=0}^n X_k$, è una martingala.
3. Se X è una variabile aleatoria integrabile, $X \in L^1(\mathcal{F})$ allora (X_n) , ove, per ogni $n \geq 0$, $X_n := \mathbb{E}_n(X)$, è una martingala, detta *ereditaria*.
4. Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una successione di variabili aleatorie integrabili, tutte con speranza diversa da zero, $\mathbb{E}(X_n) = \alpha_n \neq 0$, per ogni $n \geq 0$ e tali che ogni X_n sia misurabile rispetto a \mathcal{F}_n ; allora la successione

$$Y_n := \prod_{k=0}^n \frac{X_k}{\alpha_k}$$

è una martingala, detta *moltiplicativa*.

Le martingale costituiscono uno strumento potente sia per la Probabilità sia per le applicazioni della Probabilità.

Da dove viene il nome?

Di fatto nessuno sa rispondere con certezza alla domanda posta dal titolo di questa sezione. Si può però seguire una storia con qualche indizio.

La rivista *Mathematical Intelligencer* ha dedicato alla questione un articolo ([12]) sul quale tornerò

⁴Due variabili aleatorie X e Y si dicono *indipendenti* se, per ogni scelta di due boreliani A e B , si ha $\mathbb{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \mathbb{P}(Y^{-1}(B))$.

per una fotografia che vi compare. Ancora più completo è l'articolo in formato elettronico [4].

La parola *martingala* ha diversi significati; si vedano per esempio [7] e [9]:

- (a) un tipo di pantaloni indossati da agricoltori e mandriani ([6, 5]);
- (b) una danza di marinai;
- (c) un termine nautico ([7]): le martingale sono le manovre che, partendo dal bompreso, equilibrano verso il basso la trazione dei fiocchi, passando per un'altra asta detta in italiano pennaccino [14].⁵
- (d) una correggia usata per i cavalli ([6, 7, 5, 14]): è una lunga fascia di cuoio che si biforca in due strisce della stessa lunghezza; questa estremità si attacca ai finimenti della bocca del cavallo, mentre si fissa l'altra estremità al pettorale, per evitare che il cavallo alzi troppo la testa.
- (e) un sistema di gioco nel quale un giocatore che abbia perso continua a raddoppiare, o a aumentare, la propria scommessa in modo che la prima vincita faccia recuperare le perdite delle scommesse precedenti.

Naturalmente, l'ultimo significato è quello d'interesse per la probabilità. Si deve però notare che in altre lingue la parola assume anche altri significati; per esempio, in Spagnolo il Dizionario della Real Academia [8] dà un significato che non ho trovato in altre lingue: "Artimaña, artificio para engañar"⁶. Ancora un altro significato è riportato dal "Littre"[6]: "Terme de mépris appliqué a une femme"⁷.

Secondo i dizionari il nome deriverebbe dal villaggio di Martigues nella Camargue; pare che gli abitanti della zona avessero fama di essere "ingenui" o "sempliciotti". La prima citazione di questo vocabolo sarebbe in Rabelais [10], *chausses à la martingale*; si tratta di pantaloni indossati da Panurge con un'apertura sul di dietro "per rendere più facile l'escrezione" e una striscia trasversale che unisse i lembi. Pare che ancora Francesco

⁵Per i non esperti di cose di mare si può consultare il grafico al seguente indirizzo del sito [17] in russo, ma con traduzione in inglese.

⁶Trappola, artificio per ingannare.

⁷Termine di disprezzo rivolto a una donna

I, re di Francia dal 1515 al 1547, li indossasse. Da questo significato deriva il termine tuttora in uso per indicare la striscia di stoffa sul retro di giacche e cappotti, detta, appunto, martingala, oggi forse non più di moda.

Non è sorprendente che il primo riferimento al termine nel senso di interesse per i matematici sia avvenuto in francese. Sia il “Littré” ([6]) sia il “Robert” ([5]) danno vagamente il diciottesimo secolo come prima comparsa del nome. Come il nome sia passato da indicare pantaloni o una parte dell’equipaggiamento di un cavallo da tiro a una strategia di gioco non è noto. In quest’ultima accezione la parola “martingala” fu impiegata, secondo l’*Oxford Dictionary*, per la prima volta, almeno in inglese, da Thackeray nel 1854 nella frase *You have not played as yet? Do not do so; above all avoid a martingale if you do.*⁸ Tuttavia la versione elettronica dello stesso dizionario dà una citazione precedente della parola, nello stesso significato, risalente al 1815 nel *Paris Chit-chat*; non vi è dubbio che qui ci si riferisca a una martingala in un contesto di gioco: “I found him and his Mentor... calculating the infallible chances of a martingale”⁹. Un uso della parola che sembra precedere tutte le citazioni che ho dato sopra e che sembra anche essere sfuggito all’attenzione dei dizionari che ho citato, si trova nelle memorie di Giacomo Casanova scritte in francese alla fine del Settecento, *Histoire de ma vie*. Il passo in questione è il seguente: “M.M. volle le promettessi che sarei andato al casino per giocare a metà con lei. Ci andai, presi tutto il denaro che trovai e, puntando con il sistema noto ai giocatori come *martingala*, per tutto il periodo del carnevale [del 1754] feci tre o quattro vincite al giorno. Non perdetti mai la sesta carta. Se l’avessi perduta avrei dato fondo a tutto il mio denaro che ammontava a duemila zecchini.”¹⁰

Benché non si possa dire che Casanova abbia “inventato” la parola, egli è, a tutt’oggi, il primo a averla usata per iscritto nel significato di strategia

⁸Non avete ancora giocato? Non lo fate; soprattutto evitate una martingala se lo fate.

⁹Ho trovato lui e il suo mentore...cha calcolavano le infallibili probabilità di una martingala

¹⁰Nell’edizione italiana dei Meridiani citata in bibliografia la citazione compare nel Capitolo XLIV, precisamente a p. 1060; questo corrisponde al volume 4, Cap. VII dell’*editio princeps* Brockhaus-Plon, che, a sua volta, corrisponde al Tomo 3, Troisième fragment del manoscritto di Casanova.

di gioco; il mistero della transizione al significato probabilistico di martingala è così spinto un poco indietro nel tempo.

Quello che, sí, conosciamo è il nome del matematico che introdusse il termine *martingala* nel senso oggi usato in Probabilità, e delineato nella sezione precedente, e che per primo lo ha usato sistematicamente: si tratta di Jean Ville (1910–1989), uno studente di Paul Lévy e di Fréchet, che lo introdusse nel 1939 nella sua tesi di dottorato [15]. Per una biografia di Ville si veda [11].

Le martingale divennero uno strumento fondamentale nel campo delle probabilità nei lavori di J.L. Doob a partire dagli anni quaranta del secolo scorso; a lui è dedicata la fondamentale monografia di Dellacherie e Meyer [3], talvolta citata come la “Bibbia celeste” dal colore della copertina; nelle parole di questi autori, Doob *a démontré presque tous les résultats fondamentaux et ... les a utilisés sur tous les champs de bataille du calcul des probabilités, de sorte qu’aucun probabiliste ne peut plus se permettre d’ignorer la théorie des martingales.*¹¹ Nell’articolo di Snell [12] compare la foto di J.L. Doob che con orgoglio mostra, posata sulla spalla, una... martingala regalatagli da P.R. Halmos, suo primo studente di dottorato che scrisse la tesi proprio sulle martingale. Lo stesso Doob dichiarò nell’intervista a Snell [13] di aver adottato il termine martingala dopo averlo letto nella tesi di Ville che gli era stata inviata perché la recensisse.



[1] H. BAUER: *Probability theory and elements of measure theory*. Academic Press, New York-London (1981).

[2] G. Casanova, *Jacques Casanova de Seingalt Vénitien-Histoire de ma vie*, Édition intégrale, annotation et index dus à A. Hübscher (1897-1985), Brockhaus-Plon, Wiesbaden-Paris, 1960-1962; traduzione italiana *Storia della mia vita*, Introduzione di P. Chiara, a cura di P. Chiara e F. Roncoroni, Vol. 1 (1725-1755), I Meridiani, Mondadori, Milano, 1983.

[3] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER: *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII. Théorie des martingales*. Hermann, Paris (1980).

¹¹... ha dimostrato quasi tutti i risultati fondamentali e ... li ha utilizzati su tutti campi di battaglia del calcolo delle probabilità, di modo che nessun probabilista può permettersi d’ignorare la teoria delle martingale.

- [4] R. MANSUY: "The Origin of the word Martingale", *Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, Electronic Journal for History of Probability and Statistics* 5 (2009) n° 1.
- [5] *Dictionnaire alphabétique et antologique de la langue française*, Société du nouveau Littré, Paris, 1987.
- [6] É. Littré, *Dictionnaire de la langue française*, Paris, 1863–1877; Éditions du Cap, Montecarlo, 1973.
- [7] *Oxford English Dictionary*, Oxford University Press, 2000 (anche l'edizione in rete).
- [8] *Diccionario de la lengua española*, Real Academia Española, Madrid, 1992 (21–esima ed.)
- [9] S. Schwarz, *The words of mathematics. An etimological dictionary of mathematical terms in English*. The Mathematical Association of America, Washington, 1994.
- [10] F. Rabelais, *Gargantua*, Juste, Paris, 1534.
- [11] G. SHAFER: "The education of Jean André Ville", *Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, Electronic Journal for History of Probability and Statistics* 5 (2009) n° 1.
- [12] J. L. SNELL: "Gambling, probability and martingales", *Math. Intelligencer* 4 (1982) 629–632.
- [13] J. L. SNELL: "A conversation with Joe Doob", *Statist. Sci.* 12 (1997) 301–311.
- [14] <http://www.treccani.it/vocabolario/martingala/>
- [15] J. VILLE: *Étude critique de la notion de collectif*. Gauthier-Villars, Paris (1939).
- [16] D. WILLIAMS: *Probability with martingales*. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [17] <http://dic.academic.ru/dic.nsf/sea/10897/%D0%9A%D0%9E%D0%A1%D0%AB%D0%95>



Carlo Sempi: si è laureato in Fisica a Pavia nel 1970, ha conseguito il Ph.D. in Matematica Applicata a Waterloo, Canada nel 1974; è poi venuto all'allora Università di Lecce, dove ha percorso tutta la carriera accademica. Nell'ambito della probabilità si interessa di Spazi metrici e normati probabilistici e di teoria delle copule.

La lezione mancata

Le equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Ein guter Anfang braucht Begeisterung, ein gutes Ende Disziplin. (Un buon inizio richiede entusiasmo, un buon finale disciplina.)

— Dal film *Die Mannschaft (La squadra)* diretto da Martin Christ, Jens Gronheid, Ulrich Voigt.

Stefano De Leo Dipartimento di Matematica Applicata, Università Statuale di Campinas, Brasile.

In questa lezione sarà presentata, utilizzando il metodo di separazione delle variabili e lo sviluppo di funzioni in serie di Fourier, una risoluzione *unificata* delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Le equazioni dell'onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{[W]}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{[W]}(x, t), \quad (1)$$

del calore,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{[H]}(x, t) = \frac{1}{Lc} \frac{\partial}{\partial t} u^{[H]}(x, t), \quad (2)$$

e di Laplace,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{[L]}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^{[L]}(x, t) = 0, \quad (3)$$

sono equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del secondo ordine, rispettivamente di tipo iperbolico, parabolico e ellittico [1, 2], che svolgono un ruolo importante nella formulazio-

ne e descrizione di molti fenomeni in vari campi della fisica, come per esempio l'acustica, la fluidodinamica, la termodinamica e l'ottica [3, 4].

In questa lezione, tali equazioni non verranno dedotte in quanto l'attenzione sarà focalizzata nella presentazione di un metodo di risoluzione unificato che permetta di evidenziare sia la potenzialità del metodo di separazione delle variabili e dell'uso delle serie di Fourier sia le analogie e differenze tra le soluzioni delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

Per rendere questa lezione chiara, comprensiva e completa, prima di affrontare la risoluzione delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace, verrà introdotta un'appropriata notazione adimensionale (sezione I) e risolti alcuni integrali (lista di integrali presentata alla fine della lezione) che risulteranno utili nel determinare i coefficienti delle serie di Fourier (sezione III).

Il metodo di separazione delle variabili consentirà, isolando la parte spaziale in comune alle tre equazioni, di presentare una risoluzione unificata (sezione II). Vale la pena ricordare che un'equa-

zione non determina una soluzione, la soluzione è determinata quando altre condizioni, come le condizioni iniziali e/o al contorno, sono fissate. Analizzando particolari condizioni iniziali e al contorno che permettono la decomposizione in termini di semplici funzioni trigonometriche, si otterrà la soluzione in serie di Fourier i cui coefficienti, ottenuti a partire dalle condizioni date, determineranno univocamente la soluzione delle equazioni differenziali studiate. Un'analisi dettagliata delle soluzioni delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace sarà fatta per differenti condizioni iniziali e al contorno (sezioni III e IV). Prima di terminare la lezione, partendo dalla soluzione ottenuta per l'equazione del calore, sarà presentata la soluzione di un'altra importante equazione parabolica, cioè l'equazione di Schrödinger (sezione V), per la quale sarà analizzato, in particolare, il comportamento temporale di stati legati [5].

I. Notazione adimensionale

La scelta dei metodi utilizzati per risolvere problemi fisici che richiedono per la loro descrizione l'uso di equazioni differenziali alle derivate parziali, si basa sulla geometria del problema e sul tipo di condizioni al contorno. Per esempio, la scelta tra trasformate o serie di Fourier si basa sul fatto che nel primo caso l'intervallo di variazione della coordinata spaziale è infinito mentre nel secondo caso finito. Il più delle volte, il metodo di separazione delle variabili e l'uso di trasformate o serie sono strettamente legati.

L'equazione dell'onda è un'equazione differenziale lineare di tipo iperbolico che contiene una variabile temporale, una o più variabili spaziali e una funzione scalare, $u^{[W]}$, che deve essere determinata. In questa lezione sarà considerato il caso unidimensionale e sarà risolta l'equazione dell'onda con

$$0 \leq x \leq L \quad \text{e} \quad t \geq 0$$

condizioni al contorno

$$u^{[W]}(0, t) = u^{[W]}(L, t) = 0, \quad (4)$$

e condizioni iniziali

$$u^{[W]}(x, 0) = f(x), \quad \left[\frac{\partial u^{[W]}(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Prima di usare la tecnica di separazioni delle variabili e dare la soluzione in termini di funzioni trigonometriche è conveniente introdurre la seguente notazione adimensionale

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{ct}{L}.$$

Usando le nuove variabili è possibile riscrivere l'equazione dell'onda nella forma

$$u_{\xi\xi}^{[W]}(\xi, \tau) = u_{\tau\tau}^{[W]}(\xi, \tau), \quad (6)$$

$0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0$, con condizioni al contorno

$$u^{[W]}(0, \tau) = u^{[W]}(1, \tau) = 0, \quad (7)$$

e condizioni iniziali

$$u^{[W]}(\xi, 0) = f(\xi), \quad u_{\tau}^{[W]}(\xi, 0) = 0. \quad (8)$$

Usando la notazione adimensionale per l'equazione del calore si ha

$$u_{\xi\xi}^{[H]}(\xi, \tau) = u_{\tau}^{[H]}(\xi, \tau), \quad (9)$$

$0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0$, con condizioni al contorno

$$u^{[H]}(0, \tau) = u^{[H]}(1, \tau) = 0, \quad (10)$$

e condizione iniziale

$$u^{[H]}(\xi, 0) = f(\xi). \quad (11)$$

Infine, introducendo la variabile adimensionale

$$\eta = \frac{y}{L},$$

possiamo riscrivere l'equazione di Laplace come segue

$$u_{\xi\xi}^{[L]}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}^{[L]}(\xi, \eta) = 0, \quad (12)$$

$0 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 0$, con condizioni al contorno

$$u^{[L]}(0, \eta) = u^{[L]}(1, \eta) = 0, \quad (13)$$

e

$$u^{[L]}(\xi, 0) = f(\xi), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u^{[L]}(\xi, \eta) = 0. \quad (14)$$

Eq. dell'onda, del calore e di Laplace

Eq. dell' onda: $u_{\xi\xi}^{[W]}(\xi, \tau) = u_{\tau\tau}^{[W]}(\xi, \tau)$

Eq. del calore: $u_{\xi\xi}^{[H]}(\xi, \tau) = u_{\tau}^{[H]}(\xi, \tau)$

$$u^{[W,L]}(0, \tau) = u^{[W,L]}(1, \tau) = 0 ,$$

$$u^{[W,L]}(\xi, 0) = f(\xi) , \quad u_{\tau}^{[W]}(\xi, 0) = 0 ,$$

$$0 \leq \xi \leq 1 , \quad \tau \geq 0 .$$

Eq. di Laplace: $u_{\xi\xi}^{[L]}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}^{[L]}(\xi, \eta) = 0$

$$u^{[L]}(0, \eta) = u^{[L]}(1, \eta) = 0 ,$$

$$u^{[L]}(\xi, 0) = f(\xi) , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u^{[L]}(\xi, \eta) = 0 ,$$

$$0 \leq \xi \leq 1 , \quad \eta \geq 0 .$$

II. Metodo di separazione delle variabili

Il metodo della separazione delle variabili è una tecnica importante di risoluzione di equazioni differenziali che può essere utilizzata quando la struttura dell'equazione consente di riscrivere l'equazione in maniera tale che le due variabili appaiano in lati differenti dell'equazione. Nel caso delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace è ragionevole cercare soluzioni del tipo

$$\begin{matrix} u^{[W]}(\xi, \tau) & T^{[W]}(\tau) \\ u^{[H]}(\xi, \tau) & = X(\xi) T^{[H]}(\tau) \\ u^{[L]}(\xi, \eta) & Y^{[L]}(\eta) \end{matrix} . \quad (15)$$

Utilizzando la separazione delle variabili nelle equazioni (6,9,12), è possibile trasformare le equazioni differenziali alle derivate parziali originali nelle seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{X_{\xi\xi}(\xi)}{X(\xi)} = \lambda , \quad (16)$$

e

$$\frac{T_{\tau\tau}^{[W]}(\tau)}{T^{[W]}(\tau)} = \frac{T_{\tau}^{[H]}(\tau)}{T^{[H]}(\tau)} = -\frac{Y_{\eta\eta}^{[L]}(\eta)}{Y^{[L]}(\eta)} = \lambda , \quad (17)$$

dove λ rappresenta la costante di separazione. Per $\lambda = 0$ l'equazione (16) ha come soluzione

$$X(\xi) = \alpha \xi + \beta .$$

In questo caso le condizioni al contorno (7,10,13) implicano

$$X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow X(\xi) = 0 ,$$

conducendo alla soluzione nulla.

Se $\lambda \neq 0$,

$$X(\xi) = A \exp[\sqrt{\lambda} \xi] + B \exp[-\sqrt{\lambda} \xi] . \quad (18)$$

Imponendo la condizione $X(0) = X(1) = 0$ si ha il seguente sistema matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 , \quad (19)$$

che ammette soluzione non banale quando

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}} = 1 .$$

Quindi le costanti della separazione saranno date dagli autovalori

$$\sqrt{\lambda_k} = i k \pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots) . \quad (20)$$

Riscrivendo gli esponenziali immaginari in termini di funzioni trigonometriche, la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria (16) sarà data come una combinazione di autofunzioni seno e coseno associate agli autovalori λ_k ,

$$X_k(\xi) = a_k \sin(k \pi \xi) + b_k \cos(k \pi \xi) . \quad (21)$$

Usando la condizione $X(0) = 0$ si ha $b_k = 0$ e la soluzione sarà

$$X_k(\xi) \propto \sin(k \pi \xi) . \quad (22)$$

Tale soluzione soddisfa non solo la condizione $X(0) = 0$ ma anche la condizione $X(1) = 0$.

A partire dalle autofunzioni (22) e dagli autovalori (20) si potrà analizzare la parte complementare della separazione delle variabili e completare la risoluzione delle equazioni dell'onda, del calore e di Laplace.

II.A L'equazione dell'onda

Nell'equazione dell'onda, la funzione temporale $T^{[W]}$ soddisfa la stessa equazione differenziale

ordinaria della parte spaziale,

$$T_{\tau\tau}^{[W]}(\tau) = \lambda_k T^{[W]}(\tau) \quad (23)$$

La soluzione temporale sarà quindi data da

$$T_k^{[W]}(\tau) = c_k \sin(k \pi \tau) + d_k \cos(k \pi \tau) . \quad (24)$$

Usando la seconda delle condizioni iniziali dell'equazione (8), si ha

$$u_{\tau}^{[W]}(\xi, 0) = 0 \Rightarrow T_{k,\tau}^{[W]}(0) = 0 \Rightarrow c_k = 0 ,$$

e le autofunzioni temporali saranno

$$T_k^{[W]}(\tau) \propto \cos(k \pi \tau) . \quad (25)$$

Infine, la linearità dell'equazione dell'onda permette di scrivere la soluzione come segue

$$u^{[W]}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \cos(k \pi \tau) . \quad (26)$$

Questa soluzione soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali (6), le condizioni al contorno (7) e la seconda delle condizioni iniziali date in (8).

II.B L'equazione del calore

Nell'equazione del calore, la parte temporale soddisfa

$$T_{\tau}^{[H]}(\tau) = \lambda_k T^{[H]}(\tau) , \quad (27)$$

la cui soluzione é

$$T_k^{[H]}(\tau) \propto \exp(-k^2 \pi^2 \tau) . \quad (28)$$

La combinazione lineare delle autofunzioni spaziali e temporali darà

$$u^{[H]}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k^2 \pi^2 \tau) , \quad (29)$$

soluzione dell'equazione del calore (9) con condizioni al contorno (10).

II.C L'equazione di Laplace

Nell'equazione di Laplace la parte spaziale in η si comporta diversamente dalla parte spaziale in ξ ,

$$Y_{\eta\eta}^{[L]}(\eta) = -\lambda_k Y^{[L]}(\eta) . \quad (30)$$

In questo caso la soluzione non sarà una combinazione di funzioni trigonometriche ma una combinazione di esponenziali reali,

$$Y_k^{[L]}(\eta) = c_k \exp(k \pi \eta) + c_k \exp(-k \pi \eta) . \quad (31)$$

Usando la seconda delle condizioni al contorno date in (14),

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Y^{[L]}(\eta) = 0 \Rightarrow c_k = 0 ,$$

si ha

$$Y^{[L]}(\eta) \propto \exp(-k \pi \eta) . \quad (32)$$

Quindi

$$u^{[L]}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k \pi \eta) \quad (33)$$

sarà soluzione dell'equazione differenziale (12) che soddisfa le condizioni al contorno (13) e la seconda delle condizioni al contorno (14).

III. Coefficienti di Fourier

Nelle soluzioni delle equazioni dell'onda (26), del calore (29) e di Laplace (33), appaiono le costanti arbitrarie f_k . Si vedrà adesso come determinare questi coefficienti affinché la soluzione dell'equazione dell'onda soddisfi la prima delle condizioni iniziali (8), quella dell'equazione del calore soddisfi la condizione iniziale (11) ed infine quella dell'equazione di Laplace soddisfi la prima delle condizioni al contorno (14),

$$u^{[W,H,L]}(\xi, 0) = f(\xi) .$$

Questa condizione impone il seguente vincolo sui coefficienti f_k ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) = f(\xi) . \quad (34)$$

Usando il primo degli integrali dati nella lista alla fine della lezione è facile dimostrare che i coefficienti di Fourier saranno determinati dall'integrale

$$f_k = 2 \int_0^1 d\xi f(\xi) \sin(k \pi \xi) . \quad (35)$$

Separazione delle variabili

Equazione dell'onda:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \cos(k \pi \tau)$$

Equazione del calore:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k^2 \pi^2 \tau)$$

Equazione di Laplace:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k \pi \eta)$$

Coefficienti di Fourier:

$$f_k = 2 \int_0^1 d\xi f(\xi) \sin(k \pi \xi)$$

Analizzeremo adesso alcuni casi particolari per la funzione $f(\xi)$. Inizieremo con funzioni di tipo quadratiche e cubiche e finiremo con funzioni tipo seno che rappresentano buone approssimazioni per le funzioni quadratiche e cubiche e che hanno il vantaggio di avere soluzioni semplificate.

• Funzioni quadratiche e cubiche

Si considerino le seguenti funzioni

$$f(\xi) = \begin{cases} 4\xi(1-\xi) \\ 12\sqrt{3}(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi) \end{cases} \quad (36)$$

I coefficienti 4 e $12\sqrt{3}$ sono stati scelti per normalizzare le funzioni a valori di minimo/massimo dati da 0/1 per la funzione quadratica ($\xi = 0/\frac{1}{2}$) e $-1/1$ per la funzione cubica ($\xi = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}/\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$).

Usando la lista degli integrali si ottengono, con semplici calcoli, i coefficienti di Fourier per le funzioni quadratiche e cubiche,

$$f_k = \begin{cases} 16 [1 - \cos(k \pi)] / k^3 \pi^3 \\ 72 \sqrt{3} [1 + \cos(k \pi)] / k^3 \pi^3 \end{cases} \quad (37)$$

Tali coefficienti determinano univocamente la soluzione dell'equazione dell'onda, del calore e di Laplace.

È interessante osservare che per la funzione quadratica solamente i valori dispari di k contribuiscono alla soluzione. Per l'equazione dell'onda avremo

$$u^{[W,qua]}(\xi, \tau) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{32}{(2k-1)^3 \pi^3} \sin[(2k-1)\pi\xi] \cos[(2k-1)\pi\tau]$$

Quindi si troverà una soluzione nulla per tempi $\tau = (2n-1)/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

$$u^{[W,qua]}(\xi, \frac{2n-1}{2}) = 0,$$

una soluzione uguale a $-f(\xi)^{[qua]}$ per $\tau = 2n-1$,

$$u^{[W,qua]}(\xi, 2n-1) = -f(\xi)^{[qua]},$$

ed infine si tornerà alla funzione iniziale $f(\xi)^{[qua]}$ per $\tau = 2n$,

$$u^{[W,qua]}(\xi, 2n) = f(\xi).$$

L'evoluzione temporale in termini dei parametri τ e η delle soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per funzioni quadratiche è illustrata in figura 1.

Per funzioni cubiche saranno i coefficienti con k pari a dare contributi non nulli,

$$u^{[W,cub]}(\xi, \tau) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(2k)^3 \pi^3} \sin(2k\pi\xi) \cos(2k\pi\tau)$$

In questo caso la sola previsione che si può fare e sulla periodicità della soluzione,

$$u^{[W,cub]}(\xi, n) = f(\xi)^{[cub]}.$$

Il comportamento temporale completo è mostrato in figura 1. Osservando il comportamento temporale si può avere l'impressione che la soluzione dell'equazione dell'onda, con condizione iniziale cubica, sia per $\tau = 1/2$, uguale a $-f(\xi)^{[cub]}$. È chiaro che questa sarebbe una conclusione errata

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DELL'ONDA E DI LAPLACE: QUADRATICA E CUBICA

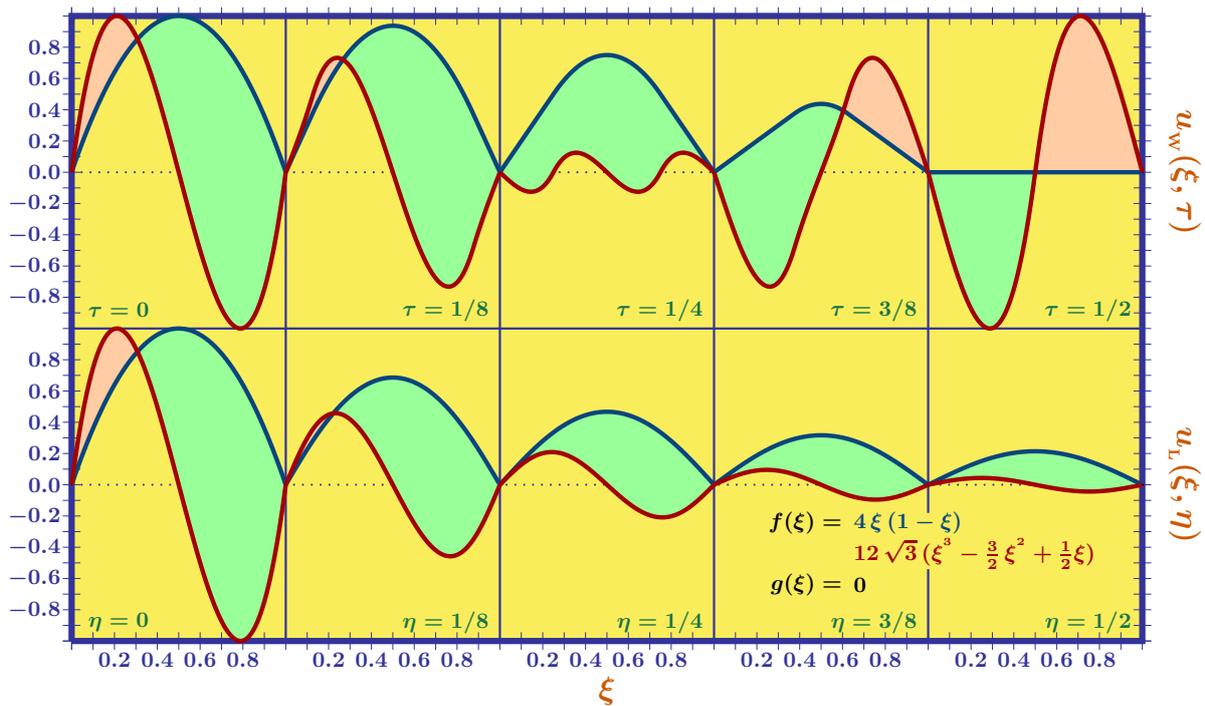


Figura 1: Soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per una funzione $f(\xi)$ di tipo quadratica, $4\xi(1-\xi)$, e per una funzione $f(\xi)$ di tipo cubica, $12\sqrt{3}(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi)$.

dato che

$$u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{2}) = -f(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(2k)^3\pi^3} \sin(2k\pi\xi) [1 + \cos(k\pi)] = -f(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{288\sqrt{3}}{(4r)^3\pi^3} \sin(4r\pi\xi).$$

Il grafico illustrato in figura 2 mostra la differenza tra le funzioni $u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{2})$ e $-f^{[cub]}(\xi)$.

Per la funzione cubica è interessante studiare cosa avviene per $\tau = 1/4$,

$$u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(2k)^3\pi^3} \sin(2k\pi\xi) \cos(k\pi/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(4k)^3\pi^3} \sin(4k\pi\xi) \cos(k\pi).$$

La soluzione sarà quindi nulla per i seguenti valori $\xi = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ (vedere figura 1). Per

$\xi = 1/8$ si avrà

$$u^{[W,cub]}(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(4k)^3\pi^3} \sin(k\pi/2) \cos(k\pi) = -f^{[cub]}(\frac{1}{4})/8$$

e per $\xi = 3/8$

$$u^{[W,cub]}(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144\sqrt{3}}{(4k)^3\pi^3} \sin(k\pi/2) \cos^2(k\pi) = f^{[cub]}(\frac{1}{4})/8.$$

• Funzioni tipo seno

È interessante osservare che le funzioni tipo seno

$$f(\xi) = \begin{cases} \sin(\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{cases} \quad (38)$$

rappresentano una buona approssimazione per le funzioni quadratica e cubica (vedere la figura 3) ed hanno il grande vantaggio, semplificando i coefficienti di Fourier della serie

$$f_k = \begin{cases} \delta[k, 1] \\ \delta[k, 2] \end{cases}, \quad (39)$$

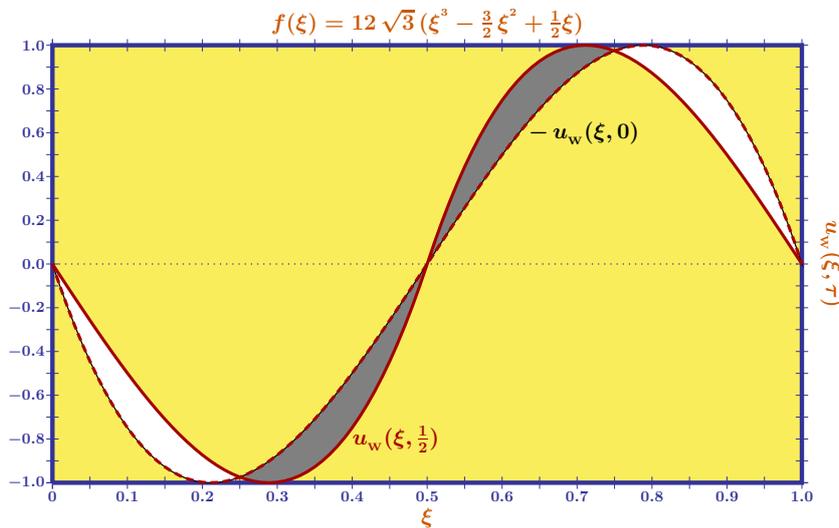


Figura 2: Differenza tra la soluzione $u^{[W,cub]}(\xi, \frac{1}{2})$ e la funzione $-f(\xi)$.

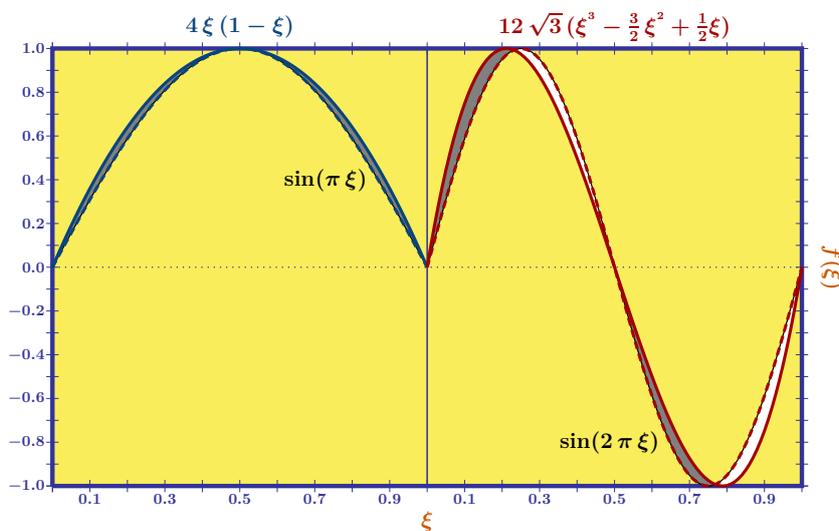


Figura 3: Comparando le funzioni quadratiche e cubiche con le funzioni tipo seno: $\sin(\pi\xi)$ e $\sin(2\pi\xi)$.

di portare alle seguenti soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace:

$$\begin{aligned}
 u^{[W]}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \sin(\pi\xi) \cos(\pi\tau), \\ \sin(2\pi\xi) \cos(2\pi\tau), \end{cases} \\
 u^{[H]}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \sin(\pi\xi) \exp(-\pi^2\tau), \\ \sin(2\pi\xi) \exp[-(2\pi)^2\tau], \end{cases} \quad (40) \\
 u^{[L]}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \sin(\pi\xi) \exp(-\pi\tau), \\ \sin(2\pi\xi) \exp(-2\pi\tau). \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'evoluzione di queste soluzioni, presentata in figura 4, può essere comparata con l'evoluzione delle soluzioni ottenute a partire da funzioni quadratiche e cubiche date in figura 1.

Per il momento si sono risolti problemi con condizioni iniziale $u_\tau^{[W]}(\xi, 0) = 0$ e al contorno $u^{[L]}(\xi, \eta \rightarrow \infty) = 0$ nulle. Per condizioni non nulle, come si vedrà nella prossima sezione, il calcolo dei coefficienti di Fourier deve essere

rivisto e generalizzato.

IV. Cambiano le condizioni iniziali e al contorno

Si consideri adesso il caso in cui la seconda condizione iniziale per l'equazione dell'onda (8) e la seconda condizione al contorno per l'equazione di Laplace (14) siano rispettivamente generalizzate introducendo una nuova funzione $g(\xi)$,

$$u_\tau^{[W]}(\xi, 0) = g(\xi) \quad (41)$$

e

$$u^{[L]}(\xi, \alpha) = g(\xi). \quad (42)$$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DELL'ONDA E DI LAPLACE TIPO SENO

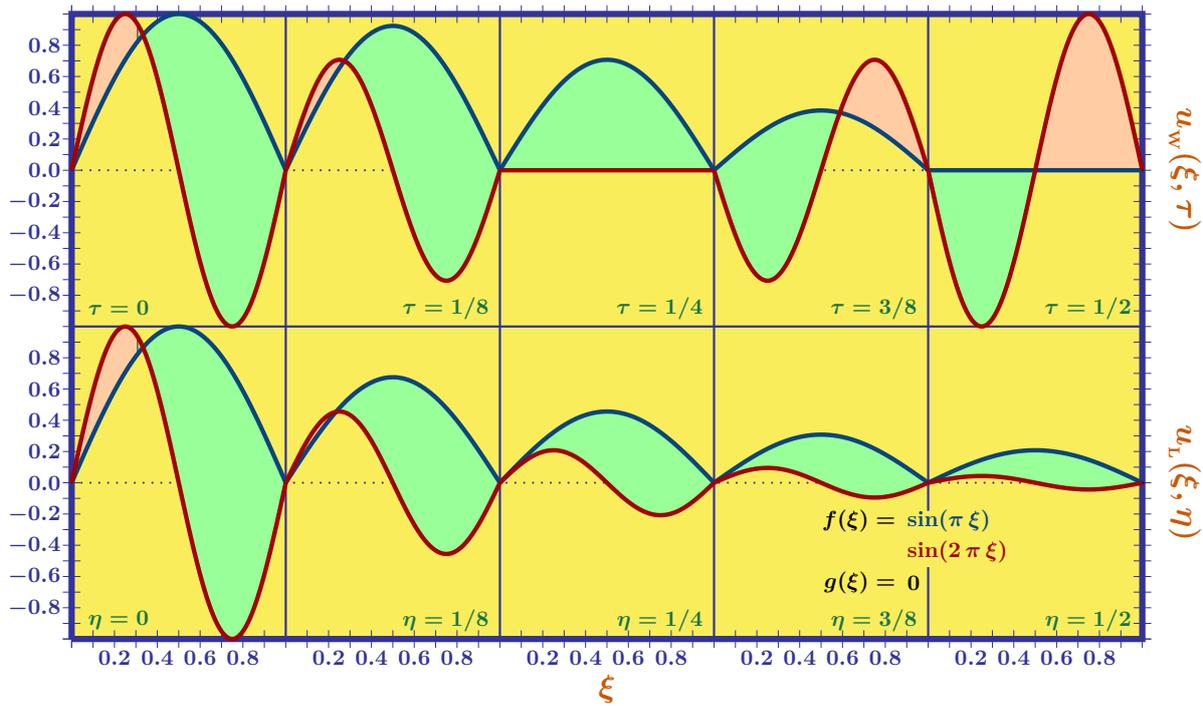


Figura 4: Soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per funzioni $f(\xi)$ tipo seno: $\sin(\pi \xi)$ e $\sin(2 \pi \xi)$. L'evoluzione in termini dei parametri τ e η è analizzata per una funzione $g(\xi)$ nulla.

Per determinare i coefficienti di Fourier che caratterizzano la soluzione dell'equazione dell'onda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{[W]} \sin(k \pi \tau) + d_k^{[W]} \cos(k \pi \tau) \right] \sin(k \pi \xi),$$

e quella dell'equazione di Laplace,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{[L]} \exp(k \pi \eta) + d_k^{[L]} \exp(-k \pi \eta) \right] \sin(k \pi \xi),$$

si useranno i coefficienti f_k e g_k ottenuti a partire dalle funzioni $f(\xi)$ e $g(\xi)$,

$$\begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = 2 \int_0^1 d\xi \begin{bmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{bmatrix} \sin(k \pi \xi). \quad (43)$$

Utilizzando i coefficienti f_k ed i nuovi coefficienti g_k si troveranno i coefficienti delle serie di Fourier,

$$\begin{pmatrix} c_k^{[W]} \\ d_k^{[W]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k / k \pi \\ f_k \end{pmatrix} \quad (44)$$

e

$$\begin{pmatrix} c_k^{[L]} \\ d_k^{[L]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k - e^{-k \pi \alpha} f_k \\ e^{k \pi \alpha} f_k - g_k \end{pmatrix} / 2 \sinh(k \pi \alpha). \quad (45)$$

È interessante osservare che per

$$\alpha \gg 1$$

la soluzione dell'equazione di Laplace può essere semplificata in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k e^{k \pi (\eta - \alpha)} + f_k e^{-k \pi \eta} \right] \sin(k \pi \xi).$$

Quindi per

$$0 \leq \eta \leq 1,$$

ritroviamo il comportamento della soluzione ottenuta considerando una $g(\xi)$ nulla,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-k \pi \eta} \sin(k \pi \xi).$$

CAMBIANDO LE CONDIZIONI PER LE EQUAZIONI DELL'ONDA E DI LAPLACE

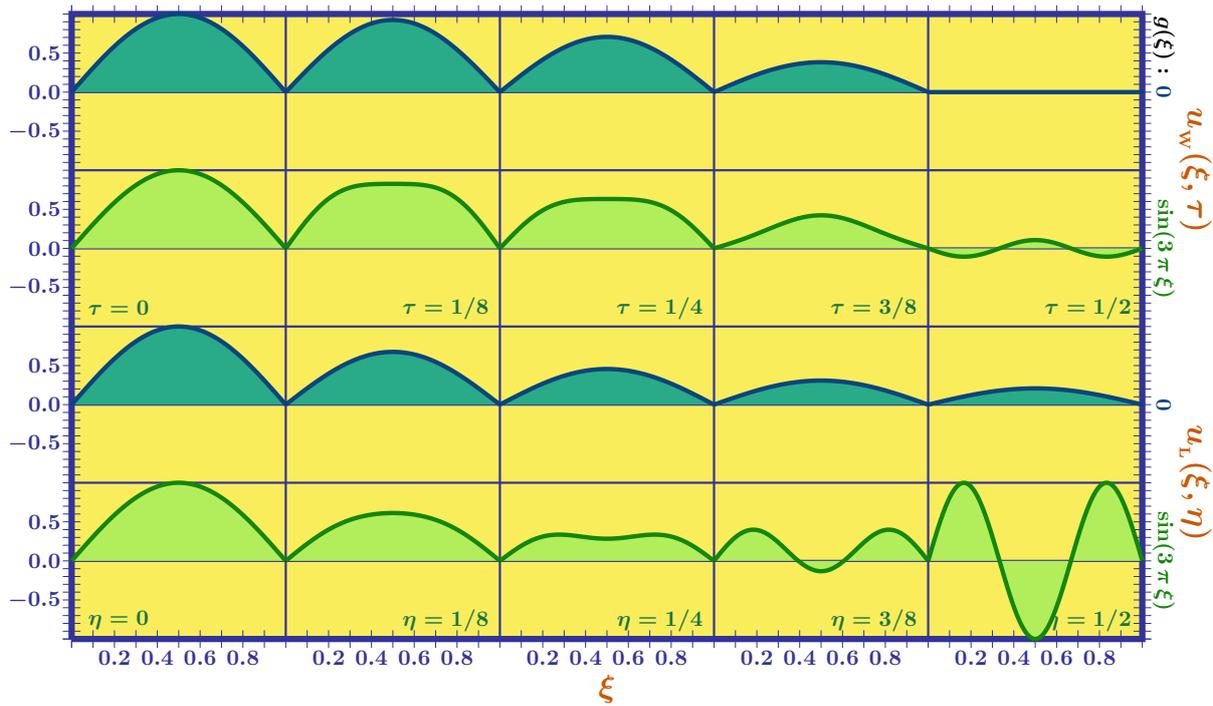


Figura 5: Confrontando le soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per una funzione $f(\xi) = \sin(\pi \xi)$ in presenza di differenti condizioni iniziali (onda) e di contorno (Laplace), $g(\xi) = 0$ e $g(\xi) = \sin(3\pi \xi)$.

Per $1 \leq \eta \ll \alpha$, si troverà una soluzione nulla ed infine per $\eta \lesssim \alpha$ si avrà

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{k\pi(\eta-\alpha)} \sin(k\pi \xi) .$$

È interessante analizzare il comportamento delle soluzioni delle equazioni dell'onda e di Laplace per condizioni iniziali e al contorno di tipo seno,

$$\{ f(\xi), g(\xi) \} = \{ \sin(r\pi \xi), \sin(m\pi \xi) \} , \quad (46)$$

con $(r, m = 1, 2, 3, \dots)$. La scelta di funzioni tipo seno semplifica notevolmente il calcolo dei coefficienti di Fourier portando alle soluzioni

$$u_{r,m}^{[W]}(\xi, \tau) = \sin(r\pi \xi) \cos(r\pi \tau) + \frac{\sin(m\pi \xi) \sin(m\pi \tau)}{m\pi} \quad (47)$$

e

$$u_{r,m}^{[L]}(\xi, \eta) = \frac{\sin(r\pi \xi) \sinh[r\pi(\alpha - \eta)]}{\sinh(r\pi \alpha)} + \frac{\sin(m\pi \xi) \sinh(m\pi \eta)}{\sinh(m\pi \alpha)} . \quad (48)$$

Il comportamento di queste soluzioni per $r = 1, m = 3$ ed $\alpha = 1/2$ è rappresentato graficamente nella figura 5.

Prima di concludere questa sezione è importante osservare che per la soluzione dell'equazione dell'onda con $r = 1$ e $m = 3$, si avrà per $\tau = 1 - \delta$ ($\delta \ll 1$),

$$u_{1,3}^{[W]}[\xi, 1 - \delta] = \sin(\pi \xi) \cos[\pi(1 - \delta)] + \frac{\sin(3\pi \xi) \sin[3\pi(1 - \delta)]}{3\pi} \approx \sin(\pi \xi) - \delta \sin(3\pi \xi) . \quad (49)$$

Per $\xi = 1/2$ si troverà

$$u_{1,3}^{[W]}[\frac{1}{2}, 1 - \delta] \approx -(1 + \delta) .$$

Seguendo lo stesso ragionamento è facile provare che

$$u_{1,3}^{[W]}[\frac{1}{2}, 2 - \delta] \approx 1 + \delta .$$

Quindi la presenza di una condizione iniziale tipo $\sin(3\pi \xi)$ per la funzione $g(\xi)$, avrà come effetto una piccola amplificazione nelle oscillazioni dell'onda rispetto alle oscillazioni ottenute nel caso di una $g(\xi)$ nulla.

COMPORAMENTO TEMPORALE DELLE SOLUZIONI DELL'EQ. DI SCHRÖDINGER

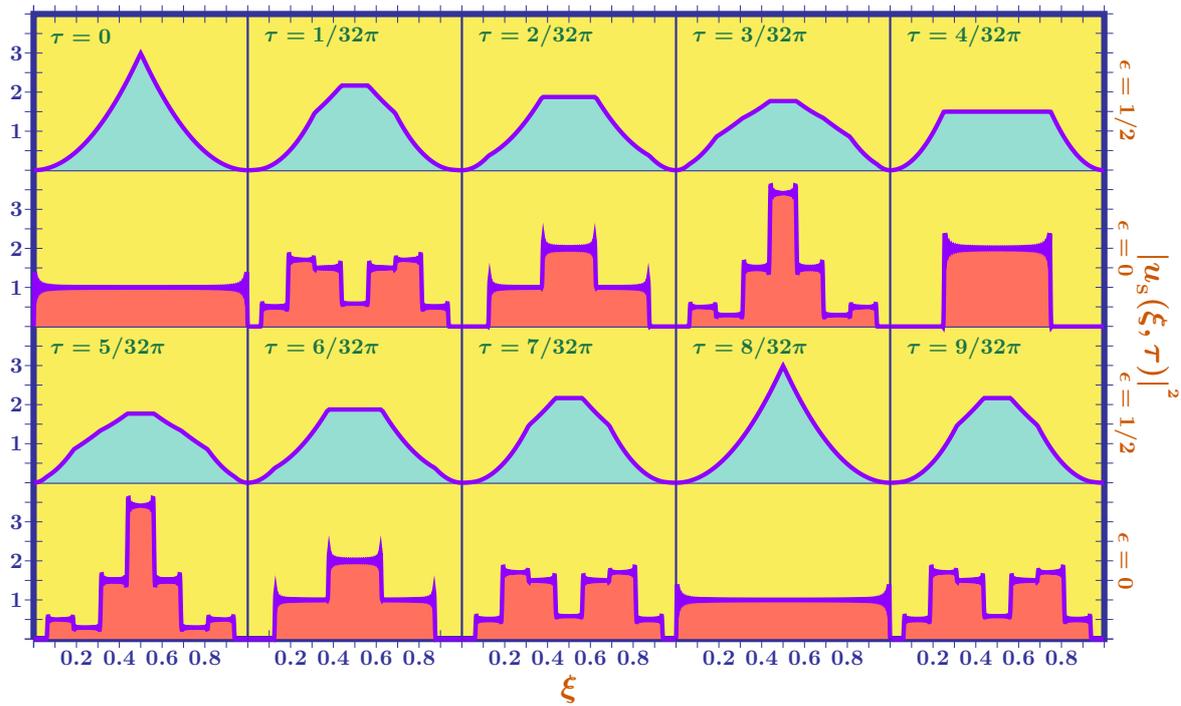


Figura 6: Confrontando il comportamento temporale delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per funzioni di onda iniziali di tipo triangolare ($\epsilon = 1/2$ e di tipo box ($\epsilon = 0$). È interessante osservare la periodicità per $\tau = 1/4\pi$.

V. L'equazione di Schrödinger

In Meccanica Quantistica, l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive come uno stato quantico di un sistema fisico cambia col tempo [5]. Formulata dal fisico austriaco Erwin Schrödinger, nel caso unidimensionale libero assume la seguente forma

$$i \hbar u_t^{[S]}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}^{[S]}(x, t). \quad (50)$$

Usando la notazione adimensionale

$$\xi = \frac{x}{L} \quad e \quad \tau = \frac{\hbar t}{2mL^2},$$

l'equazione di Schrödinger può essere riscritta come

$$u_{\xi\xi}^{[S]}(\xi, \tau) = -i u_{\tau}^{[S]}(\xi, \tau). \quad (51)$$

Usando la stessa tecnica di risoluzione utilizzata per l'equazione del calore, la soluzione dell'equazione di Schrödinger (51), con condizioni al contorno

$$u^{[S]}(0, \tau) = u^{[S]}(1, \tau) = 0 \quad (52)$$

e condizione iniziale

$$u_{\tau}^{[S]}(\xi, 0) = f(\xi), \quad (53)$$

sarà data da

$$u^{[S]}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k\pi\xi) \exp(-ik^2\pi^2\tau). \quad (54)$$

È importante osservare che le condizioni al contorno date (52) portano alla presenza di stati legati (stati di energia quantizzata) per un potenziale tipo pozzo unidimensionale infinito

$$V_0 = \begin{cases} \infty & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{per } x > L \end{cases}.$$

Si consideri adesso, come condizione iniziale, la seguente funzione lineare

$$f(\epsilon, \xi) = N \begin{cases} \xi/\epsilon & (0 \leq \xi \leq \epsilon), \\ 1 & (\epsilon \leq \xi \leq 1 - \epsilon), \\ (1 - \xi)/\epsilon & (1 - \epsilon \leq \xi \leq 1), \end{cases} \quad (55)$$

con

$$N_\epsilon = \left(1 - \frac{4}{3} \epsilon\right)^{-1}.$$

La costante di normalizzazione è scelta per garantire una probabilità unitaria

$$\int_0^1 d\xi f^2(\epsilon, \xi) = 1.$$

Partendo dalla condizione iniziale $f(\epsilon, \xi)$, come fatto nelle sezioni precedenti, utilizzando la lista di integrali si possono determinare i coefficienti di Fourier,

$$f_{\epsilon,k} = 2 N_\epsilon \frac{\sin(\epsilon k \pi) [1 - \cos(k\pi)]}{\epsilon (k \pi)^2}. \quad (56)$$

In figura 6 è illustrato il comportamento temporale delle funzioni di onda di tipo triangolare ($\epsilon = \frac{1}{2}$)

$$24 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin[(2k-1)\pi\xi]}{[(2k-1)\pi]^2} \times \exp[-i(2k-1)^2\pi^2\tau] \times \left|u_{\Delta}^{[S]}(\xi, \tau)\right|^2 = \quad (57)$$

e di tipo quadrato ($\epsilon \rightarrow 0$)

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\pi\xi]}{(2k-1)\pi} \times \exp[-i(2k-1)^2\pi^2\tau] \times \left|u_{\square}^{[S]}(\xi, \tau)\right|^2 = \quad (58)$$

Si osservi che per $\tau = 1/4\pi$ si avrà

$$\exp[-i(2k-1)^2\pi^2/4\pi] = \cos[k(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}] - i \cos[k(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}] = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

e conseguentemente a $\tau = 1/4\pi$ si troverà la funzione iniziale $|f(\epsilon, \xi)|^2$.



- [1] T. L. CHOWN: *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [2] W. E. BOYCE AND R. C. DI PRIMA: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, New York (2001).
- [3] M. BORN AND E. WOLF: *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [4] B. E. A. SALEH AND M. C. TEICH: *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, New York (2007).
- [5] C. C. TANNODJI, B. DIU AND F. LALÖE: *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New York (1977).
- [6] Lezione disponibile in pdf nella pagina web del Prof. Stefano De Leo:
<http://www.ime.unicamp.br/-deleo>



Stefano De Leo: Professore Associato presso il Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università Statale di Campinas (Unicamp), Brasile. Laureato con lode nel 1991 (Università degli Studi di Lecce, Italia), ha terminato il Dottorato in Fisica nel 1995 (Università degli Studi di Bari, Italia) ed ottenuto il titolo di Libera Docenza in Fisica Matematica nel 1999 (Unicamp).

Lista di Integrali

• **Primo integrale**

($r, k = 1, 2, 3, \dots$)

$$2 \int_0^1 d\xi \sin(r \pi \xi) \sin(k \pi \xi) = \int_0^1 d\xi \{ \cos[(r - k) \pi \xi] - \cos[(r + k) \pi \xi] \} = \boxed{\delta[k, r]}$$

• **Secondo integrale**

$$\int_0^1 d\xi \xi \sin(k \pi \xi) = \left[-\frac{\xi \cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{\sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^2} \right]_0^1 = \boxed{-\frac{\cos(k \pi)}{k \pi}}$$

• **Terzo integrale**

$$\int_0^1 d\xi \xi^2 \sin(k \pi \xi) = \left[-\frac{\xi^2 \cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{2 \xi \sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^2} + \frac{2 \cos(k \pi \xi)}{(k \pi)^3} \right]_0^1 =$$

$$\boxed{-\frac{\cos(k \pi)}{k \pi} + \frac{2 \cos(k \pi)}{(k \pi)^3} - \frac{2}{(k \pi)^3}}$$

• **Quarto integrale**

$$\int_0^1 d\xi \xi^3 \sin(k \pi \xi) = \left[-\frac{\xi^3 \cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{3 \xi^2 \sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^2} + \frac{6 \xi \cos(k \pi \xi)}{(k \pi)^3} - \frac{6 \sin(k \pi \xi)}{(k \pi)^4} \right]_0^1 =$$

$$\boxed{-\frac{\cos(k \pi)}{k \pi} + \frac{6 \cos(k \pi)}{(k \pi)^3}}$$

• **Quinto integrale**

$$2 \int_0^1 d\xi \sin(r \pi \xi) e^{i r \pi \xi} \sin(k \pi \xi) = \delta[k, 2r] + 2i \int_0^1 d\xi \sin^2(r \pi \xi) \sin(k \pi \xi) =$$

$$\delta[k, 2r] + i \int_0^1 d\xi [1 - \cos[2r \pi \xi]] \sin(k \pi \xi) =$$

$$\delta[k, 2r] + i \left\{ -\frac{\cos(k \pi \xi)}{k \pi} + \frac{\cos[(k + 2r) \pi \xi]}{2(k + 2r) \pi} + \frac{\cos[(k - 2r) \pi \xi]}{2(k - 2r) \pi} \right\}_0^1 =$$

$$\delta[k, 2r] + \frac{2i}{\pi} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2(k + 2r)} - \frac{1}{2(k - 2r)} \right]_{k(\text{odd})} =$$

$$\boxed{\delta[k, 2r] + i \left[\frac{8 r^2}{k(4 r^2 - k^2) \pi} \right]_{k(\text{odd})}}$$

Quadro Riassuntivo

Equazione dell'onda: $u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = u_{\tau\tau}(\xi, \tau)$
Equazione del calore: $u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = u_{\tau}(\xi, \tau)$
Equazione di Schrödinger: $u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = -i u_{\tau}(\xi, \tau)$

$$\begin{aligned}
 u(0, \tau) &= u(1, \tau) = 0, \\
 u(\xi, 0) &= f(\xi), \quad u_{\tau}(\xi, 0) = g(\xi), \\
 0 &\leq \xi \leq 1, \quad \tau \geq 0.
 \end{aligned}$$

Equazione di Laplace: $u_{\xi\xi}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0$

$$\begin{aligned}
 u(0, \eta) &= u(1, \eta) = 0, \\
 u(\xi, 0) &= f(\xi), \quad u(\xi, \alpha) = g(\xi), \\
 0 &\leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \alpha.
 \end{aligned}$$

Equazione dell'onda:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \pi \xi) [c_{W,k} \cos(k \pi \tau) + d_{W,k} \sin(k \pi \tau)]$$

Equazione del calore / di Schrödinger:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-k^2 \pi^2 \tau) / \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k \pi \xi) \exp(-i k^2 \pi^2 \tau)$$

Equazione di Laplace:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \pi \xi) [c_{L,k} \exp(k \pi \tau) + d_{L,k} \exp(-k \pi \tau)]$$

Coefficienti di Fourier:

$$f_k = 2 \int d\xi f(\xi) \sin(k \pi \xi) \quad \diamond \quad g_k = 2 \int d\xi g(\xi) \sin(k \pi \xi)$$

$$\begin{pmatrix} c_{W,k} \\ d_{W,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k / k \pi \\ f_k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_{L,k} \\ d_{L,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k - e^{-k\pi\alpha} f_k \\ e^{k\pi\alpha} f_k - g_k \end{pmatrix} / 2 \sinh(k \pi \alpha)$$

$$f(\xi) : \begin{cases} \xi/\epsilon & (0 \leq \xi \leq \epsilon) \\ 1 & (\epsilon \leq \xi \leq 1 - \epsilon) \\ (1 - \xi)/\epsilon & (1 - \epsilon \leq \xi \leq 1) \end{cases} \Rightarrow f_k : \frac{4 \sin(\epsilon k \pi)}{\epsilon (k \pi)^2} \quad [k \text{ odd}]$$

$$\xi(1 - \xi) \quad \frac{8}{(k \pi)^3} \quad [k \text{ odd}]$$

$$\xi(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1) \quad \frac{12}{(k \pi)^3} \quad [k \text{ even}]$$

Numero VIII Anno 2016

Viaggio nella Scienza

Ithaca



Convezione

